TEORÍA DE NÚMEROS PARA EL ESTATAL

J. H. S.

19 de agosto de 2020

Estructura de la plática

1. Máximo común divisor

Estructura de la plática

1. Máximo común divisor
2. La sugerencia universal en aritmética

Estructura de la plática

1. Máximo común divisor
2. La sugerencia universal en aritmética
3. Ejemplos adicionales

Definición de máximo común divisor

Sean a y b números enteros positivos.

Definición de máximo común divisor

Sean a y b números enteros positivos.

- Decimos que c es un *divisor común* de a y b si $c \mid a$ y $c \mid b$.

Definición de máximo común divisor

Sean a y b números enteros positivos.

• Decimos que c es un *divisor común* de a y b si $c \mid a$ y $c \mid b$.

• Puesto que todo número entero positivo tiene una cantidad **finita** de divisores, entonces a y b sólo tienen una cantidad finita de divisores comunes.

Definición de máximo común divisor

Sean a y b números enteros positivos.

• Decimos que c es un *divisor común* de a y b si $c \mid a$ y $c \mid b$.

• Puesto que todo número entero positivo tiene una cantidad **finita** de divisores, entonces a y b sólo tienen una cantidad finita de divisores comunes.

Al mayor de los divisores comunes de a y b se le conoce como el **máximo común divisor de a y b**.

Ejemplos y notación

* El mayor de los divisores comunes de a y b.

Ejemplos y notación

* El mayor de los divisores comunes de a y b.

- $a = 6$ y $b = 50$

Ejemplos y notación

* El mayor de los divisores comunes de a y b.

- $a = 6$ y $b = 50$

Divisores del 6: ± 1, ± 2, ± 3, ± 6

Ejemplos y notación

* El mayor de los divisores comunes de a y b.

- $a = 6$ y $b = 50$

Divisores del 6: ± 1, ± 2, ± 3, ± 6

Divisores del 50: ± 1, ± 2, ± 5, ± 10, ± 25, ± 50

Ejemplos y notación

* El mayor de los divisores comunes de a y b.

- $a = 6$ y $b = 50$

Divisores del 6: ± 1, ± 2, ± 3, ± 6

Divisores del 50: ± 1, ± 2, ± 5, ± 10, ± 25, ± 50

Divisores comunes del 6 y 50: ± 1, ± 2

Ejemplos y notación

* El mayor de los divisores comunes de a y b.

- $a = 6$ y $b = 50$

Divisores del 6: ± 1, ± 2, ± 3, ± 6

Divisores del 50: ± 1, ± 2, ± 5, ± 10, ± 25, ± 50

Divisores comunes del 6 y 50: ± 1, ± 2

El máximo común divisor de 6 y 50 es 2. En símbolos:

Ejemplos y notación

* El mayor de los divisores comunes de a y b.

- $a = 6$ y $b = 50$

Divisores del 6: ± 1, ± 2, ± 3, ± 6

Divisores del 50: ± 1, ± 2, ± 5, ± 10, ± 25, ± 50

Divisores comunes del 6 y 50: ± 1, ± 2

El máximo común divisor de 6 y 50 es 2. En símbolos:

$$(6, 50) = \mathrm{mcd}(6, 50) = 2.$$

- $a = 12$ y $b = 33$

- $a = 12$ y $b = 33$

Divisores del 12: ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±12

- $a = 12$ y $b = 33$

Divisores del 12: ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6, ± 12

Divisores del 33: ± 1, ± 3, ± 11, ± 33

- $a = 12$ y $b = 33$

Divisores del 12: ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6, ± 12

Divisores del 33: ± 1, ± 3, ± 11, ± 33

Divisores comunes del 12 y 33: ± 1, ± 3

- $a = 12$ y $b = 33$

Divisores del 12: ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6, ± 12

Divisores del 33: ± 1, ± 3, ± 11, ± 33

Divisores comunes del 12 y 33: ± 1, ± 3

El máximo común divisor de 12 y 33 es 3. En símbolos:

- $a = 12$ y $b = 33$

Divisores del 12: ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6, ± 12

Divisores del 33: ± 1, ± 3, ± 11, ± 33

Divisores comunes del 12 y 33: ± 1, ± 3

El máximo común divisor de 12 y 33 es 3. En símbolos:

$$(12, 33) = \mathrm{mcd}(12, 33) = 3.$$

Ejemplo.

Dos cintas de 36 m y 48 m de longitud se quieren dividir en pedazos iguales y de la mayor longitud (entera) posible. ¿Cuál será la longitud de cada pedazo?

Dos cintas de 36 m y 48 m de longitud se quieren dividir en pedazos iguales y de la mayor longitud (entera) posible. ¿Cuál será la longitud de cada pedazo?

Solución. La longitud buscada es igual al máximo común divisor de 36 y 48.

Dos cintas de 36 m y 48 m de longitud se quieren dividir en pedazos iguales y de la mayor longitud (entera) posible. ¿Cuál será la longitud de cada pedazo?

Solución. La longitud buscada es igual al máximo común divisor de 36 y 48.

Puesto que los divisores comunes de 36 y 48 son ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6 y ± 12 tenemos que $\mathrm{mcd}(36, 48) = 12$. $\square$

La sugerencia universal en aritmética

Teorema. Sean a y b números enteros positivos. Existen números enteros x, y tales que

$$\mathrm{mcd}(a, b) = ax + by.$$

En otras palabras, *el máximo común divisor de dos números enteros positivos siempre se puede expresar como una combinación lineal de a y b con coeficientes enteros.*

La sugerencia universal en aritmética

Teorema. Sean a y b números enteros positivos. Existen números enteros x, y tales que

$$\mathrm{mcd}(a, b) = ax + by.$$

En otras palabras, *el máximo común divisor de dos números enteros positivos siempre se puede expresar como una combinación lineal de a y b con coeficientes enteros.*

EJEMPLOS.

La sugerencia universal en aritmética

Teorema. Sean a y b números enteros positivos. Existen números enteros x, y tales que

$$\mathrm{mcd}(a, b) = ax + by.$$

En otras palabras, *el máximo común divisor de dos números enteros positivos siempre se puede expresar como una combinación lineal de a y b con coeficientes enteros.*

EJEMPLOS.

- $\mathrm{mcd}(2, 3) = 1 \quad \text{y} \quad 1 = 2(-1) + 3(1)$

La sugerencia universal en aritmética

Teorema. Sean a y b números enteros positivos. Existen números enteros x, y tales que

$$\mathrm{mcd}(a, b) = ax + by.$$

En otras palabras, *el máximo común divisor de dos números enteros positivos siempre se puede expresar como una combinación lineal de a y b con coeficientes enteros.*

EJEMPLOS.

- $\mathrm{mcd}(2, 3) = 1$ y $1 = 2(-1) + 3(1)$
- $\mathrm{mcd}(4, 18) = 2$ y $2 = 4(-4) + 18(1)$

La sugerencia universal en aritmética

Teorema. Sean a y b números enteros positivos. Existen números enteros x, y tales que

$$\mathrm{mcd}(a, b) = ax + by.$$

En otras palabras, *el máximo común divisor de dos números enteros positivos siempre se puede expresar como una combinación lineal de a y b con coeficientes enteros.*

EJEMPLOS.

- $\mathrm{mcd}(2, 3) = 1 \quad \text{y} \quad 1 = 2(-1) + 3(1)$
- $\mathrm{mcd}(4, 18) = 2 \quad \text{y} \quad 2 = 4(-4) + 18(1)$
- $\mathrm{mcd}(6, 51) = 3 \quad \text{y} \quad 3 = 6(-8) + 51(1)$

Idea de la demostración. Lo que hacemos es fijarnos en todos los números enteros positivos que se pueden expresar como una combinación lineal de a y b con coeficientes enteros.

Sí hay números positivos que se pueden expresar como combinación lineal de a y b con coeficientes enteros:

Sí hay números positivos que se pueden expresar como combinación lineal de a y b con coeficientes enteros:

$$\begin{aligned} a &= a(1) + b(0) \\ b &= a(0) + b(1) \end{aligned}$$

Sí hay números positivos que se pueden expresar como combinación lineal de a y b con coeficientes enteros:

$$\begin{aligned} a &= a(1) + b(0) \\ b &= a(0) + b(1) \end{aligned}$$

Fijémonos en **el menor número entero positivo que se puede representar como combinación lineal** de a y b; llamémosle d.

Sí hay números positivos que se pueden expresar como combinación lineal de a y b con coeficientes enteros:

$$\begin{aligned} a &= a(1) + b(0) \\ b &= a(0) + b(1) \end{aligned}$$

Fijémonos en **el menor número entero positivo que se puede representar como combinación lineal** de a y b; llamémosle d.

Afirmamos que d es el máximo común divisor de a y b.

d es el menor entero positivo que se puede expresar como una combinación lineal de a y b con coeficientes enteros; digamos que $d = ax_0 + by_0$ para algunos números enteros x_0 y y_0.

d es el menor entero positivo que se puede expresar como una combinación lineal de a y b con coeficientes enteros; digamos que $d = ax_0 + by_0$ para algunos números enteros x_0 y y_0.

- $d \mid a$: Por el algoritmo de la división en los números enteros tenemos que

d es el menor entero positivo que se puede expresar como una combinación lineal de a y b con coeficientes enteros; digamos que $d = ax_0 + by_0$ para algunos números enteros x_0 y y_0.

- $d \mid a$: Por el algoritmo de la división en los números enteros tenemos que

$$a = dq + r$$

para algunos números enteros q y r, donde $0 \leq r < d$. r tiene que ser igual a 0 pues, en caso contrario, r sería un número positivo que se podría representar como una combinación lineal de a y b con coeficientes enteros:

d es el menor entero positivo que se puede expresar como una combinación lineal de a y b con coeficientes enteros; digamos que $d = ax_0 + by_0$ para algunos números enteros x_0 y y_0.

- $d \mid a$: Por el algoritmo de la división en los números enteros tenemos que

$$a = dq + r$$

para algunos números enteros q y r, donde $0 \leq r < d$. r tiene que ser igual a 0 pues, en caso contrario, r sería un número positivo que se podría representar como una combinación lineal de a y b con coeficientes enteros:

$$\begin{aligned} r &= a - dq \\ &= a - (ax_0 + by_0)q \\ &= a(1 - x_0 q) + b(-y_0 q) \end{aligned}$$

d es el menor entero positivo que se puede expresar como una combinación lineal de a y b con coeficientes enteros; digamos que $d = ax_0 + by_0$ para algunos números enteros x_0 y y_0.

- $d \mid a$: Por el algoritmo de la división en los números enteros tenemos que

$$a = dq + r$$

para algunos números enteros q y r, donde $0 \leq r < d$. r tiene que ser igual a 0 pues, en caso contrario, r sería un número positivo que se podría representar como una combinación lineal de a y b con coeficientes enteros:

$$\begin{aligned} r &= a - dq \\ &= a - (ax_0 + by_0)q \\ &= a(1 - x_0 q) + b(-y_0 q) \end{aligned}$$

Al ser $r < d$, lo anterior no puede cumplirse (se estaría contradiciendo la minimalidad de d). Así pues, $r = 0$ y $d \mid a$.

d es el menor entero positivo que se puede expresar como una combinación lineal de a y b con coeficientes enteros; digamos que $d = ax_0 + by_0$ para algunos números enteros x_0 y y_0.

d es el menor entero positivo que se puede expresar como una combinación lineal de a y b con coeficientes enteros; digamos que $d = ax_0 + by_0$ para algunos números enteros x_0 y y_0.

Ya se ha demostrado que $d \mid a$; procediendo de la misma manera se puede demostrar que $d \mid b$. Faltaría establecer que d es el más grande de los divisores comunes de a y b. Eso lo podemos hacer como sigue.

d es el menor entero positivo que se puede expresar como una combinación lineal de a y b con coeficientes enteros; digamos que $d = ax_0 + by_0$ para algunos números enteros x_0 y y_0.

Ya se ha demostrado que $d \mid a$; procediendo de la misma manera se puede demostrar que $d \mid b$. Faltaría establecer que d es el más grande de los divisores comunes de a y b. Eso lo podemos hacer como sigue.

Supongamos que $c \mid a$ y que $c \mid b$. Si pensamos que $a = cq_1$ y $b = cq_2$ para algunos números enteros q_1 y q_2, entonces

d es el menor entero positivo que se puede expresar como una combinación lineal de a y b con coeficientes enteros; digamos que $d = ax_0 + by_0$ para algunos números enteros x_0 y y_0.

Ya se ha demostrado que $d \mid a$; procediendo de la misma manera se puede demostrar que $d \mid b$. Faltaría establecer que d es el más grande de los divisores comunes de a y b. Eso lo podemos hacer como sigue.

Supongamos que $c \mid a$ y que $c \mid b$. Si pensamos que $a = cq_1$ y $b = cq_2$ para algunos números enteros q_1 y q_2, entonces

$$\begin{aligned} d &= ax_0 + by_0 \\ &= c(q_1x_0 + q_2y_0) \end{aligned}$$

d es el menor entero positivo que se puede expresar como una combinación lineal de a y b con coeficientes enteros; digamos que $d = ax_0 + by_0$ para algunos números enteros x_0 y y_0.

Ya se ha demostrado que $d \mid a$; procediendo de la misma manera se puede demostrar que $d \mid b$. Faltaría establecer que d es el más grande de los divisores comunes de a y b. Eso lo podemos hacer como sigue.

Supongamos que $c \mid a$ y que $c \mid b$. Si pensamos que $a = cq_1$ y $b = cq_2$ para algunos números enteros q_1 y q_2, entonces

$$\begin{aligned} d &= ax_0 + by_0 \\ &= c(q_1 x_0 + q_2 y_0) \end{aligned}$$

de donde se sigue que $c \mid d$ y, por ende, $c \leq d$.

d es el menor entero positivo que se puede expresar como una combinación lineal de a y b con coeficientes enteros; digamos que $d = ax_0 + by_0$ para algunos números enteros x_0 y y_0.

Ya se ha demostrado que $d \mid a$; procediendo de la misma manera se puede demostrar que $d \mid b$. Faltaría establecer que d es el más grande de los divisores comunes de a y b. Eso lo podemos hacer como sigue.

Supongamos que $c \mid a$ y que $c \mid b$. Si pensamos que $a = cq_1$ y $b = cq_2$ para algunos números enteros q_1 y q_2, entonces

$$\begin{aligned} d &= ax_0 + by_0 \\ &= c(q_1x_0 + q_2y_0) \end{aligned}$$

de donde se sigue que $c \mid d$ y, por ende, $c \leq d$.

¡$d = \mathrm{mcd}(a, b)$! $\square$

Moraleja

Tenemos otra forma de verificar que un número entero positivo d es el máximo común divisor de los enteros a y b.

Moraleja

Tenemos otra forma de verificar que un número entero positivo d es el máximo común divisor de los enteros a y b.

d es el máximo común divisor de los enteros positivos a y b cuando:

Moraleja

Tenemos otra forma de verificar que un número entero positivo d es el máximo común divisor de los enteros a y b.

d es el máximo común divisor de los enteros positivos a y b cuando:

- $d \mid a \quad \text{y} \quad d \mid b$

Moraleja

Tenemos otra forma de verificar que un número entero positivo d es el máximo común divisor de los enteros a y b.

d es el máximo común divisor de los enteros positivos a y b cuando:

- $d \mid a$ y $d \mid b$
- Si $c \mid a$ y $c \mid b$ entonces $c \mid d$.

Moraleja

Tenemos otra forma de verificar que un número entero positivo d es el máximo común divisor de los enteros a y b.

d es el máximo común divisor de los enteros positivos a y b cuando:

- $d \mid a$ y $d \mid b$
- Si $c \mid a$ y $c \mid b$ entonces $c \mid d$.

Ejemplos adicionales.

Ejemplo. Sean a, b y k números enteros positivos. Demuestre que si $\mathrm{mcd}(a, b) = d$ entonces $\mathrm{mcd}(a, ak + b) = d$.

Ejemplos adicionales.

Ejemplo. Sean a, b y k números enteros positivos. Demuestre que si $\mathrm{mcd}(a, b) = d$ entonces $\mathrm{mcd}(a, ak + b) = d$.

Dem. Según lo aprendido previamente, bastaría con verificar que d satisface las dos condiciones siguientes:

a) $d \mid a \quad \text{y} \quad d \mid ak + b$

b) Si $c \mid a \quad \text{y} \quad c \mid ak + b$, entonces $c \mid d$

Ejemplos adicionales.

Ejemplo. Sean a, b y k números enteros positivos. Demuestre que si $\operatorname{mcd}(a, b) = d$ entonces $\operatorname{mcd}(a, ak + b) = d$.

Dem. Según lo aprendido previamente, bastaría con verificar que d satisface las dos condiciones siguientes:

a) $d \mid a \quad \text{y} \quad d \mid ak + b$

b) Si $c \mid a \quad \text{y} \quad c \mid ak + b$, entonces $c \mid d$

Verificación de a): Por hipótesis, $d \mid a$ y $d \mid b$. Entonces, $d \mid ak$ y, por ende, $d \mid ak + b$.

Ejemplos adicionales.

Ejemplo. Sean a, b y k números enteros positivos. Demuestre que si $\operatorname{mcd}(a, b) = d$ entonces $\operatorname{mcd}(a, ak + b) = d$.

Dem. Según lo aprendido previamente, bastaría con verificar que d satisface las dos condiciones siguientes:

a) $d \mid a \quad \text{y} \quad d \mid ak + b$

b) Si $c \mid a \quad \text{y} \quad c \mid ak + b$, entonces $c \mid d$

Verificación de a): Por hipótesis, $d \mid a$ y $d \mid b$. Entonces, $d \mid ak$ y, por ende, $d \mid ak + b$.

Verificación de b): Supongamos que $c \mid a$ y que $c \mid ak + b$, entonces $c \mid ak$ y, en consecuencia, $c \mid b$. Como $d = \operatorname{mcd}(a, b)$, se sigue que $c \mid d$. $\square$

Ejemplo. Sean a y b números enteros positivos. Demuestre que si $\mathrm{mcd}(a, b) = d$ entonces $\mathrm{mcd}\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$.

Ejemplo. Sean a y b números enteros positivos. Demuestre que si $\mathrm{mcd}(a, b) = d$ entonces $\mathrm{mcd}\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$.

Dem. d es una combinación lineal de a y b con coeficientes enteros; es decir, existen números enteros x y y tales que

Ejemplo. Sean a y b números enteros positivos. Demuestre que si $\operatorname{mcd}(a, b) = d$ entonces $\operatorname{mcd}\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$.

Dem. d es una combinación lineal de a y b con coeficientes enteros; es decir, existen números enteros x y y tales que

$$d = ax + by.$$

Ejemplo. Sean a y b números enteros positivos. Demuestre que si $\operatorname{mcd}(a,b) = d$ entonces $\operatorname{mcd}\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$.

Dem. d es una combinación lineal de a y b con coeficientes enteros; es decir, existen números enteros x y y tales que

$$d = ax + by.$$

Dividiendo ambos lados de la ecuación entre d obtenemos

Ejemplo. Sean a y b números enteros positivos. Demuestre que si $\operatorname{mcd}(a, b) = d$ entonces $\operatorname{mcd}\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$.

Dem. d es una combinación lineal de a y b con coeficientes enteros; es decir, existen números enteros x y y tales que

$$d = ax + by.$$

Dividiendo ambos lados de la ecuación entre d obtenemos

$$1 = \left(\frac{a}{d}\right)x + \left(\frac{b}{d}\right)y.$$

Ejemplo. Sean a y b números enteros positivos. Demuestre que si $\operatorname{mcd}(a, b) = d$ entonces $\operatorname{mcd}\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$.

Dem. d es una combinación lineal de a y b con coeficientes enteros; es decir, existen números enteros x y y tales que

$$d \quad = \quad ax + by.$$

Dividiendo ambos lados de la ecuación entre d obtenemos

$$1 = \left(\frac{a}{d}\right) x + \left(\frac{b}{d}\right) y.$$

1 es combinación lineal de a/d y b/d; como no puede haber una combinación lineal de estos números que de como resultado un entero positivo menor se concluye lo deseado. $\square$

Un dato muy importante

Ejemplo. Sean a, b y c números enteros. Si $a \mid bc$ y $\mathrm{mcd}(a, b) = 1$, entonces $a \mid c$.

Un dato muy importante

Ejemplo. Sean a, b y c números enteros. Si $a \mid bc$ y $\mathrm{mcd}(a, b) = 1$, entonces $a \mid c$.

Dem. Por la sugerencia universal en aritmética, existen números enteros x y y tales que

Un dato muy importante

Ejemplo. Sean a, b y c números enteros. Si $a \mid bc$ y $\mathrm{mcd}(a, b) = 1$, entonces $a \mid c$.

Dem. Por la sugerencia universal en aritmética, existen números enteros x y y tales que

$$1 = ax + by. \tag{1}$$

Un dato muy importante

Ejemplo. Sean a, b y c números enteros. Si $a \mid bc$ y $\mathrm{mcd}(a, b) = 1$, entonces $a \mid c$.

Dem. Por la sugerencia universal en aritmética, existen números enteros x y y tales que

$$1 = ax + by. \tag{1}$$

Supongamos que $bc = aQ$ para algún número entero Q.

Un dato muy importante

Ejemplo. Sean a, b y c números enteros. Si $a \mid bc$ y $\mathrm{mcd}(a,b) = 1$, entonces $a \mid c$.

Dem. Por la sugerencia universal en aritmética, existen números enteros x y y tales que

$$1 = ax + by. \qquad (1)$$

Supongamos que $bc = aQ$ para algún número entero Q.

Multiplicando ambos lados de (1) por c se obtiene que

Un dato muy importante

Ejemplo. Sean a, b y c números enteros. Si $a \mid bc$ y $\mathrm{mcd}(a, b) = 1$, entonces $a \mid c$.

Dem. Por la sugerencia universal en aritmética, existen números enteros x y y tales que

$$1 = ax + by. \tag{1}$$

Supongamos que $bc = aQ$ para algún número entero Q.

Multiplicando ambos lados de (1) por c se obtiene que

$$\begin{aligned} c &= acx + bcy \\ &= acx + aQy \end{aligned}$$

Un dato muy importante

Ejemplo. Sean a, b y c números enteros. Si $a \mid bc$ y $\mathrm{mcd}(a, b) = 1$, entonces $a \mid c$.

Dem. Por la sugerencia universal en aritmética, existen números enteros x y y tales que

$$1 = ax + by. \tag{1}$$

Supongamos que $bc = aQ$ para algún número entero Q.

Multiplicando ambos lados de (1) por c se obtiene que

$$\begin{aligned} c &= acx + bcy \\ &= acx + aQy \end{aligned}$$

o bien que

Un dato muy importante

Ejemplo. Sean a, b y c números enteros. Si $a \mid bc$ y $\mathrm{mcd}(a, b) = 1$, entonces $a \mid c$.

Dem. Por la sugerencia universal en aritmética, existen números enteros x y y tales que

$$1 = ax + by. \tag{1}$$

Supongamos que $bc = aQ$ para algún número entero Q.

Multiplicando ambos lados de (1) por c se obtiene que

$$\begin{aligned} c &= acx + bcy \\ &= acx + aQy \end{aligned}$$

o bien que

$$c = a(cx + Qy)$$

Un dato muy importante

Ejemplo. Sean a, b y c números enteros. Si $a \mid bc$ y $\mathrm{mcd}(a, b) = 1$, entonces $a \mid c$.

Dem. Por la sugerencia universal en aritmética, existen números enteros x y y tales que

$$1 = ax + by. \tag{1}$$

Supongamos que $bc = aQ$ para algún número entero Q.

Multiplicando ambos lados de (1) por c se obtiene que

$$\begin{aligned} c &= acx + bcy \\ &= acx + aQy \end{aligned}$$

o bien que

$$c = a(cx + Qy)$$

y la prueba termina. $\square$

Justificación de los criterios compuestos de divisibilidad

Ejemplo. Sean a, b y c números enteros. Si $a \mid c$, $b \mid c$ y $\mathrm{mcd}(a, b) = 1$, entonces $(ab) \mid c$.

Justificación de los criterios compuestos de divisibilidad

Ejemplo. Sean a, b y c números enteros. Si $a \mid c$, $b \mid c$ y $\mathrm{mcd}(a, b) = 1$, entonces $(ab) \mid c$.

Dem. $c = aP$ y $c = bQ$ para algunos números enteros P y Q. Por otro lado,

Justificación de los criterios compuestos de divisibilidad

Ejemplo. Sean a, b y c números enteros. Si $a \mid c$, $b \mid c$ y $\mathrm{mcd}(a,b) = 1$, entonces $(ab) \mid c$.

Dem. $c = aP$ y $c = bQ$ para algunos números enteros P y Q. Por otro lado,

$$1 = ax + by$$

Justificación de los criterios compuestos de divisibilidad

Ejemplo. Sean a, b y c números enteros. Si $a \mid c$, $b \mid c$ y $\mathrm{mcd}(a, b) = 1$, entonces $(ab) \mid c$.

Dem. $c = aP$ y $c = bQ$ para algunos números enteros P y Q. Por otro lado,

$$1 = ax + by$$

para algunos números enteros x y y. Multiplicando por c ambos lados de la igualdad anterior:

Justificación de los criterios compuestos de divisibilidad

Ejemplo. Sean a, b y c números enteros. Si $a \mid c$, $b \mid c$ y $\mathrm{mcd}(a, b) = 1$, entonces $(ab) \mid c$.

Dem. $c = aP$ y $c = bQ$ para algunos números enteros P y Q. Por otro lado,

$$1 = ax + by$$

para algunos números enteros x y y. Multiplicando por c ambos lados de la igualdad anterior:

$$\begin{aligned} c &= acx + bcy \\ &= a(bQ)x + b(aP)y \\ &= (ab)(Qx + Py) \end{aligned}$$

Justificación de los criterios compuestos de divisibilidad

Ejemplo. Sean a, b y c números enteros. Si $a \mid c$, $b \mid c$ y $\mathrm{mcd}(a, b) = 1$, entonces $(ab) \mid c$.

Dem. $c = aP$ y $c = bQ$ para algunos números enteros P y Q. Por otro lado,

$$1 = ax + by$$

para algunos números enteros x y y. Multiplicando por c ambos lados de la igualdad anterior:

$$\begin{aligned} c &= acx + bcy \\ &= a(bQ)x + b(aP)y \\ &= (ab)(Qx + Py) \end{aligned}$$

y la prueba termina. $\square$


That's all Folks!