TEORÍA DE NÚMEROS PARA EL ESTATAL

J. H. S.

5 de agosto de 2020

Estructura de la plática

1. El algoritmo de la división en los números enteros

Estructura de la plática

1. El algoritmo de la división en los números enteros
2. Argumentos de paridad

Estructura de la plática

1. El algoritmo de la división en los números enteros
2. Argumentos de paridad
3. Consideración de otros casos

Sean a y b números enteros con $b > 0$. Existen enteros q y r, **únicos**, tales que

El algoritmo de la división en los números enteros

Sean a y b números enteros con $b > 0$. Existen enteros q y r, **únicos**, tales que

$$a = bq + r \qquad \text{con} \qquad 0 \leq r < b.$$

El algoritmo de la división en los números enteros

Sean a y b números enteros con $b > 0$. Existen enteros q y r, **únicos**, tales que

$$a = bq + r \qquad \text{con} \qquad 0 \leq r < b.$$

q y r se denominan, respectivamente, el *cociente* y *resto* de la división de a por b.

El algoritmo de la división en los números enteros

Sean a y b números enteros con $b > 0$. Existen enteros q y r, **únicos**, tales que

$$a = bq + r \qquad \text{con} \qquad 0 \leq r < b.$$

q y r se denominan, respectivamente, el *cociente* y *resto* de la división de a por b.

EJEMPLOS.

1. $a = 63$, $b = 8$: $63 = 8(7) + 7$;

El algoritmo de la división en los números enteros

Sean a y b números enteros con $b > 0$. Existen enteros q y r, **únicos**, tales que

$$a = bq + r \qquad \text{con} \qquad 0 \leq r < b.$$

q y r se denominan, respectivamente, el *cociente* y *resto* de la división de a por b.

Ejemplos.

1. $a = 63$, $b = 8$: $63 = 8(7) + 7$;
2. $a = -90$, $b = 4$: $-90 = 4(-23) + 2$;
3. $b \mid a$ si y sólo si el resto r que se obtiene al dividir a por b es 0.

El algoritmo de la división y argumentos de paridad (en números)

Sea a un número entero. Decimos que a es **un número par** si es divisible por 2 y que es **un número impar** si no es divisible por 2.

El algoritmo de la división y argumentos de paridad (en números)

Sea a un número entero. Decimos que a es **un número par** si es divisible por 2 y que es **un número impar** si no es divisible por 2.

El algoritmo de la división indica que existen enteros q y r, **únicos**, tales que

$$a = 2q + r \qquad \text{con} \qquad 0 \leq r < 2.$$

El algoritmo de la división y argumentos de paridad (en números)

Sea a un número entero. Decimos que a es **un número par** si es divisible por 2 y que es **un número impar** si no es divisible por 2.

El algoritmo de la división indica que existen enteros q y r, **únicos**, tales que

$$a = 2q + r \qquad \text{con} \qquad 0 \leq r < 2.$$

- $r = 0$ si y sólo si a es par; en otras palabras, todo número par a es de la forma $2q$ para algún número entero q.

El algoritmo de la división y argumentos de paridad (en números)

Sea a un número entero. Decimos que a es **un número par** si es divisible por 2 y que es **un número impar** si no es divisible por 2.

El algoritmo de la división indica que existen enteros q y r, **únicos**, tales que

$$a = 2q + r \qquad \text{con} \qquad 0 \leq r < 2.$$

- $r = 0$ si y sólo si a es par; en otras palabras, todo número par a es de la forma $2q$ para algún número entero q.
- $r = 1$ si y sólo si a es impar; en otras palabras, todo número impar a es la forma $2q + 1$ para algún número entero q.

El juego de pares y nones

+	P	I
P	P	I
I	I	P

En palabras:

El juego de pares y nones

+	P	I
P	P	I
I	I	P

En palabras:

- par $+$ par $= (2q_1) + (2q_2) = 2(q_1 + q_2)$.

El juego de pares y nones

+	P	I
P	P	I
I	I	P

En palabras:

- par + par $= (2q_1) + (2q_2) = 2(q_1 + q_2)$.
- par + impar $= (2q_1) + (2q_2 + 1) = 2(q_1 + q_2) + 1$.

El juego de pares y nones

+	P	I
P	P	I
I	I	P

En palabras:

- par + par $= (2q_1) + (2q_2) = 2(q_1 + q_2)$.
- par + impar $= (2q_1) + (2q_2 + 1) = 2(q_1 + q_2) + 1$.
- impar + par $= (2q_1 + 1) + (2q_2) = 2(q_1 + q_2) + 1$.

El juego de pares y nones

+	P	I
P	P	I
I	I	P

En palabras:

- par + par $= (2q_1) + (2q_2) = 2(q_1 + q_2)$.
- par + impar $= (2q_1) + (2q_2 + 1) = 2(q_1 + q_2) + 1$.
- impar + par $= (2q_1 + 1) + (2q_2) = 2(q_1 + q_2) + 1$.
- impar + impar $= (2q_1 + 1) + (2q_2 + 1) = 2(q_1 + q_2 + 1)$.

El juego de pares y nones

$\times$	P	I
P	P	P
I	P	I

En palabras:

El juego de pares y nones

$\times$	P	I
P	P	P
I	P	I

En palabras:

- par $\times$ par $= (2q_1)(2q_2) = 2(2q_1q_2)$.

El juego de pares y nones

$\times$	P	I
P	P	P
I	P	I

En palabras:

- par $\times$ par $= (2q_1)(2q_2) = 2(2q_1q_2)$.
- par $\times$ impar $= (2q_1)(2q_2+1) = 2(q_1)(2q_2+1)$.

El juego de pares y nones

$\times$	P	I
P	P	P
I	P	I

En palabras:

- par $\times$ par $= (2q_1)(2q_2) = 2(2q_1q_2)$.
- par $\times$ impar $= (2q_1)(2q_2+1) = 2(q_1)(2q_2+1)$.
- impar $\times$ par $= (2q_1+1)(2q_2) = 2(q_2)(2q_1+1)$.

El juego de pares y nones

$\times$	P	I
P	P	P
I	P	I

En palabras:

- par $\times$ par $= (2q_1)(2q_2) = 2(2q_1q_2)$.
- par $\times$ impar $= (2q_1)(2q_2+1) = 2(q_1)(2q_2+1)$.
- impar $\times$ par $= (2q_1+1)(2q_2) = 2(q_2)(2q_1+1)$.
- impar $\times$ impar $= (2q_1+1)(2q_2+1) = 2(2q_1q_2+q_1+q_2)+1$.

Ejemplo 1. Demuestre que n^2 es un número par si y sólo si n es un número par.

Ejemplo 1. Demuestre que n^2 es un número par si y sólo si n es un número par.

Solución. Si n es un número par, entonces es claro que n^2 es un número par.

Ejemplo 1. Demuestre que n^2 es un número par si y sólo si n es un número par.

Solución. Si n es un número par, entonces es claro que n^2 es un número par.

Por otro lado, si $n^2 = (n)(n)$ es un número par entonces n no puede ser impar (pues IMPAR por $\text{IMPAR} = \text{IMPAR}$). En consecuencia, n tiene que ser un número par. $\square$

Ejemplo 2. ¿Es posible encontrar enteros a y n tales que $a^2 = 4n^2 + 4n + 3$?

Ejemplo 2. ¿Es posible encontrar enteros a y n tales que $a^2 = 4n^2 + 4n + 3$?

Solución. La respuesta breve es no porque el suponer que hay enteros a y n que cumplen esa ecuación nos lleva a algo **absurdo**.

Ejemplo 2. ¿Es posible encontrar enteros a y n tales que $a^2 = 4n^2 + 4n + 3$?

Solución. La respuesta breve es no porque el suponer que hay enteros a y n que cumplen esa ecuación nos lleva a algo **absurdo**.

Para cada número entero n se cumple que $4n^2 + 4n + 3$ es un número impar; por ende, si la ecuación $a^2 = 4n^2 + 4n + 3$ tiene soluciones en número enteros a y n entonces a es necesariamente un número impar.

Ejemplo 2. ¿Es posible encontrar enteros a y n tales que $a^2 = 4n^2 + 4n + 3$?

Solución. La respuesta breve es no porque el suponer que hay enteros a y n que cumplen esa ecuación nos lleva a algo **absurdo**.

Para cada número entero n se cumple que $4n^2 + 4n + 3$ es un número impar; por ende, si la ecuación $a^2 = 4n^2 + 4n + 3$ tiene soluciones en número enteros a y n entonces a es necesariamente un número impar.

Supongamos que $a = 2Q + 1$ para algún entero Q. Entonces debe ser

Ejemplo 2. ¿Es posible encontrar enteros a y n tales que $a^2 = 4n^2 + 4n + 3$?

Solución. La respuesta breve es no porque el suponer que hay enteros a y n que cumplen esa ecuación nos lleva a algo **absurdo**.

Para cada número entero n se cumple que $4n^2 + 4n + 3$ es un número impar; por ende, si la ecuación $a^2 = 4n^2 + 4n + 3$ tiene soluciones en número enteros a y n entonces a es necesariamente un número impar.

Supongamos que $a = 2Q + 1$ para algún entero Q. Entonces debe ser

$$\begin{aligned} (2Q+1)^2 &= 4n^2 + 4n + 3 \\ 4Q^2 + 4Q + 1 &= 4n^2 + 4n + 3 \\ 4(Q^2 + Q - n^2 - n) &= 2, \end{aligned}$$

Ejemplo 2. ¿Es posible encontrar enteros a y n tales que $a^2 = 4n^2 + 4n + 3$?

Solución. La respuesta breve es no porque el suponer que hay enteros a y n que cumplen esa ecuación nos lleva a algo **absurdo**.

Para cada número entero n se cumple que $4n^2 + 4n + 3$ es un número impar; por ende, si la ecuación $a^2 = 4n^2 + 4n + 3$ tiene soluciones en número enteros a y n entonces a es necesariamente un número impar.

Supongamos que $a = 2Q + 1$ para algún entero Q. Entonces debe ser

$$\begin{array}{rcl} (2Q+1)^2 & = & 4n^2 + 4n + 3 \\ 4Q^2 + 4Q + 1 & = & 4n^2 + 4n + 3 \\ 4(Q^2 + Q - n^2 - n) & = & 2, \end{array}$$

pero esto último no puede cumplirse jamás (es afirmar que $4 \mid 2$). $\square$

Consideración de otros casos

Ejemplo 3. Demuestre que 3 no divide a $n^2 - 2$ cuando n es un número entero.

Consideración de otros casos

Ejemplo 3. Demuestre que 3 no divide a $n^2 - 2$ cuando n es un número entero.

Solución. Con respecto a la división por 3, un número n sólo puede ser de alguna de las tres formas siguientes:

Ejemplo 3. Demuestre que 3 no divide a $n^2 - 2$ cuando n es un número entero.

Solución. Con respecto a la división por 3, un número n sólo puede ser de alguna de las tres formas siguientes:

$$n = 3q, \qquad n = 3q + 1, \qquad n = 3q + 2.$$

Consideración de otros casos

Ejemplo 3. Demuestre que 3 no divide a $n^2 - 2$ cuando n es un número entero.

Solución. Con respecto a la división por 3, un número n sólo puede ser de alguna de las tres formas siguientes:

$$n = 3q, \qquad n = 3q + 1, \qquad n = 3q + 2.$$

• Si n es de la forma $3q$, entonces $n^2 - 2 = 9q^2 - 2 = 3(3q^2 - 1) + 1$ y, por tanto, $3 \nmid n^2 - 2$ en este caso.

Consideración de otros casos

Ejemplo 3. Demuestre que 3 no divide a $n^2 - 2$ cuando n es un número entero.

Solución. Con respecto a la división por 3, un número n sólo puede ser de alguna de las tres formas siguientes:

$$n = 3q, \qquad n = 3q + 1, \qquad n = 3q + 2.$$

• Si n es de la forma $3q$, entonces $n^2 - 2 = 9q^2 - 2 = 3(3q^2 - 1) + 1$ y, por tanto, $3 \nmid n^2 - 2$ en este caso.

• Si n es de la forma $3q + 1$, entonces $n^2 - 2 = 9q^2 + 6q - 1 = 3(3q^2 + 2q - 1) + 2$ y, por tanto, $3 \nmid n^2 - 2$ en este caso.

Ejemplo 3. Demuestre que 3 no divide a $n^2 - 2$ cuando n es un número entero.

Solución. Con respecto a la división por 3, un número n sólo puede ser de alguna de las tres formas siguientes:

$$n = 3q, \qquad n = 3q + 1, \qquad n = 3q + 2.$$

• Si n es de la forma $3q$, entonces $n^2 - 2 = 9q^2 - 2 = 3(3q^2 - 1) + 1$ y, por tanto, $3 \nmid n^2 - 2$ en este caso.

• Si n es de la forma $3q + 1$, entonces
$n^2 - 2 = 9q^2 + 6q - 1 = 3(3q^2 + 2q - 1) + 2$ y, por tanto, $3 \nmid n^2 - 2$ en este caso.

- Si n es de la forma $3q+2$, entonces $n^2-2 = 9q^2+12q+2 = 3(3q^2+4q)+2$ y, por tanto, $3 \nmid n^2-2$ en este caso.

- Si n es de la forma $3q+2$, entonces

$n^2-2=9q^2+12q+2=3(3q^2+4q)+2$ y, por tanto, $3\nmid n^2-2$ en este caso.

¡Los tres casos anteriores abarcan las infinitas posibilidades para n! $\square$


That's all Folks!