TEORÍA DE NÚMEROS PARA EL ESTATAL

J. H. S.

30 de julio de 2020

- Problemas relacionados con la forma $x + y + xy$

- Problemas relacionados con la forma $x + y + xy$

1. Determine todas las parejas de números enteros positivos (a, b) que cumplen que

$$a + b + ab = 134 \quad \text{y} \quad a \leq b.$$

- Problemas relacionados con la forma $x + y + xy$

1. Determine todas las parejas de números enteros positivos (a, b) que cumplen que

$$a + b + ab = 134 \quad \text{y} \quad a \leq b.$$

La idea clave de la solución es sumar 1 en ambos lados de la ecuación; lo que logramos con eso es factorizar la expresión en el lado izquierdo:

- Problemas relacionados con la forma $x + y + xy$

1. Determine todas las parejas de números enteros positivos (a, b) que cumplen que

$$a + b + ab = 134 \quad \text{y} \quad a \leq b.$$

La idea clave de la solución es sumar 1 en ambos lados de la ecuación; lo que logramos con eso es factorizar la expresión en el lado izquierdo:

$$\begin{aligned} a + b + ab + 1 &= 135 \\ (a+1)(b+1) &= 135 \end{aligned}$$

- Problemas relacionados con la forma $x + y + xy$

1. Determine todas las parejas de números enteros positivos (a, b) que cumplen que

$$a + b + ab = 134 \quad \text{y} \quad a \leq b.$$

La idea clave de la solución es sumar 1 en ambos lados de la ecuación; lo que logramos con eso es factorizar la expresión en el lado izquierdo:

$$\begin{aligned} a + b + ab + 1 &= 135 \\ (a+1)(b+1) &= 135 \end{aligned}$$

Entonces tanto $a + 1$ como $b + 1$ son divisores positivos de $135 = (3^3)(5)$.

$$(a+1)(b+1) = 135$$

$$(a+1)(b+1) = 135$$

Divisores positivos de $135 : 1, 3, 5, 9, 15, 27, 45, 135$

$$(a+1)(b+1) = 135$$

Divisores positivos de 135 : $1, 3, 5, 9, 15, 27, 45, 135$

$a+1$	$b+1$
1	135
3	45
5	27
9	15

2. (Examen regional del 2019) Encuentre los valores de x, y y z sabiendo que

$$\begin{aligned} x+y+xy &= 8 \\ y+z+yz &= 15 \\ z+x+zx &= 35 \end{aligned}$$

2. (Examen regional del 2019) Encuentre los valores de x, y y z sabiendo que

$$\begin{aligned} x + y + xy &= 8 \\ y + z + yz &= 15 \\ z + x + zx &= 35 \end{aligned}$$

Al sumar 1 en ambos lados de cada una de las ecuaciones obtenemos

2. (Examen regional del 2019) Encuentre los valores de x, y y z sabiendo que

$$\begin{aligned} x + y + xy &= 8 \\ y + z + yz &= 15 \\ z + x + zx &= 35 \end{aligned}$$

Al sumar 1 en ambos lados de cada una de las ecuaciones obtenemos

$$\begin{aligned} (x+1)(y+1) &= 9 \qquad (1) \\ (y+1)(z+1) &= 16 \qquad (2) \\ (z+1)(x+1) &= 36 \qquad (3) \end{aligned}$$

2. (Examen regional del 2019) Encuentre los valores de x, y y z sabiendo que

$$\begin{aligned} x+y+xy &= 8 \\ y+z+yz &= 15 \\ z+x+zx &= 35 \end{aligned}$$

Al sumar 1 en ambos lados de cada una de las ecuaciones obtenemos

$$\begin{aligned} (x+1)(y+1) &= 9 \qquad (1) \\ (y+1)(z+1) &= 16 \qquad (2) \\ (z+1)(x+1) &= 36 \qquad (3) \end{aligned}$$

De (1) y (2) se obtiene:

2. (Examen regional del 2019) Encuentre los valores de x, y y z sabiendo que

$$\begin{aligned} x + y + xy &= 8 \\ y + z + yz &= 15 \\ z + x + zx &= 35 \end{aligned}$$

Al sumar 1 en ambos lados de cada una de las ecuaciones obtenemos

$$(x+1)(y+1) = 9 \tag{1}$$

$$(y+1)(z+1) = 16 \tag{2}$$

$$(z+1)(x+1) = 36 \tag{3}$$

De (1) y (2) se obtiene:

$$\frac{x+1}{z+1} = \frac{9}{16} \tag{4}$$

2. (Examen regional del 2019) Encuentre los valores de x, y y z sabiendo que

$$\begin{aligned} x + y + xy &= 8 \\ y + z + yz &= 15 \\ z + x + zx &= 35 \end{aligned}$$

Al sumar 1 en ambos lados de cada una de las ecuaciones obtenemos

$$(x+1)(y+1) = 9 \tag{1}$$
$$(y+1)(z+1) = 16 \tag{2}$$
$$(z+1)(x+1) = 36 \tag{3}$$

De (1) y (2) se obtiene:

$$\frac{x+1}{z+1} = \frac{9}{16} \tag{4}$$

Luego, de (3) y (4) se llega a que:

$$(x+1)^2 = (36)\left(\frac{9}{16}\right).$$

3. Encuentre todas las parejas de enteros positivos (x, y) que cumplen que su producto es igual a 5 veces su suma.

3. Encuentre todas las parejas de enteros positivos (x, y) que cumplen que su producto es igual a 5 veces su suma.

Se trata de resolver la ecuación

$$5(x + y) = xy.$$

Este problema es del mismo tipo que los dos anteriores.

3. Encuentre todas las parejas de enteros positivos (x, y) que cumplen que su producto es igual a 5 veces su suma.

Se trata de resolver la ecuación

$$5(x + y) = xy.$$

Este problema es del mismo tipo que los dos anteriores.

$$\begin{aligned} 5x + 5y &= xy \\ x(5 - y) + 5y &= 0 \end{aligned}$$

3. Encuentre todas las parejas de enteros positivos (x, y) que cumplen que su producto es igual a 5 veces su suma.

Se trata de resolver la ecuación

$$5(x+y) = xy.$$

Este problema es del mismo tipo que los dos anteriores.

$$\begin{aligned} 5x + 5y &= xy \\ x(5-y) + 5y &= 0 \end{aligned}$$

Restando 25 en ambos lados se puede factorizar la expresión resultante de la izquierda:

$$\begin{aligned} x(5-y) + 5y - 25 &= -25 \\ x(5-y) + 5(y-5) &= -25 \\ (5-y)(x-5) &= -25 \\ (y-5)(x-5) &= 25 \end{aligned}$$

El problema se ha reducido a determinar para qué números enteros positivos x, y se cumple que

$$(x-5)(y-5) = 25.$$

El problema se ha reducido a determinar para qué números enteros positivos x, y se cumple que

$$(x-5)(y-5)=25.$$

¡La respuesta está entre los divisores de 25!

El problema se ha reducido a determinar para qué números enteros positivos x, y se cumple que

$$(x-5)(y-5) = 25.$$

¡La respuesta está entre los divisores de 25!

Los divisores de $25 = 5^2$ son $\pm 1, \pm 5, \pm 25$.

El problema se ha reducido a determinar para qué números enteros positivos x, y se cumple que

$$(x-5)(y-5) = 25.$$

¡La respuesta está entre los divisores de 25!

Los divisores de $25 = 5^2$ son $\pm1, \pm5, \pm25$.

$x-5$	$y-5$
1	25
5	5
25	1

El problema se ha reducido a determinar para qué números enteros positivos x, y se cumple que

$$(x-5)(y-5) = 25.$$

¡La respuesta está entre los divisores de 25!

Los divisores de $25 = 5^2$ son $\pm 1, \pm 5, \pm 25$.

$x-5$	$y-5$
1	25
5	5
25	1

Conclusión: $x = 6,\ y = 30;\ x = 10,\ y = 10;\ x = 30,\ y = 6.$ $\square$

4. Determine todos los números enteros x, y que cumplen que

$$(x^3 - 1)(y^3 - 1) = 3(x^2y^2 + 2).$$


That's all Folks!