



ISSN 2954-4971

TZALOA

Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas



17 • 02

Información legal

TZALOA REVISTA DE LA OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS (Año 17, No. 2, Julio de 2025) es una publicación trimestral editada por la Sociedad Matemática Mexicana, A. C.

Dirección: Vicente Beristáin 165-B, Ampliación Asturias, Del. Cuauhtémoc, C.P. 06890, Ciudad de México, México.

Tel.: 55-5849-6709

Email: smm@smm.org.mx

Sitio web: <https://www.smm.org.mx>

Editor responsable: Pedro David Sánchez Salazar.

Reservas de Derechos al Uso Exclusivo 04-2022-101718033000-102, ISSN 2954-4971, ambos otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor.

Las opiniones expresadas por los autores no necesariamente reflejan la postura del editor de la publicación. Los contenidos e imágenes de Tzaloa pueden ser reproducidos y utilizados, citando apropiadamente y otorgando el crédito correspondiente a la publicación y a la Sociedad Matemática Mexicana.

TZALOA
Revista de la Olimpiada
Mexicana de Matemáticas
Año 2025, No. 2

Comité Editorial:

Francisco Eduardo Castillo Santos

Myriam Hernández Ketchul

José Hernández Santiago

Pedro David Sánchez Salazar

Comité de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Cubículo 201

Departamento de Matemáticas

Facultad de Ciencias UNAM

Circuito Interior s/n

Ciudad Universitaria

Coyoacán, C.P. 04510

Ciudad de México

Teléfono: (55) 56-22-48-64

<https://www.ommenlinea.org>

Editor en jefe:

Pedro David Sánchez Salazar

Facultad de Matemáticas

Universidad Autónoma de Yucatán

Anillo Periférico Norte, Tablaje 13615

Mérida, C.P. 97203

Yucatán

El truco de factorización favorito de Simon

José Hernández Santiago
Universidad Autónoma de Guerrero

Introducción

Los problemas en los que aparece el trinomio $X + Y + XY$ o alguna variante de él no son infrecuentes en las olimpiadas. Listamos a continuación algunos problemas de esa índole que aparecieron en exámenes aplicados en el país en años anteriores:

Problema 1. (*Semifinal estatal de la 26.ª OMM, 2012*) Determine todos los pares ordenados (a, b) , de números enteros positivos, tales que

$$a + b + ab = 134 \quad \text{y} \quad a \leq b. \quad (1)$$

Problema 2. (*Semifinal estatal de la 27.ª OMM, 2013*) Encuentre todos los pares ordenados de números enteros positivos que cumplen que su producto es igual a 5 veces su suma.

Problema 3. (*Final estatal de la 35.ª OMM, 2021*) Encuentre todos los pares ordenados $(x, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ tales que

$$\frac{1}{x} + \frac{3}{y} = \frac{1}{2}.$$

Problema 4. (*Final estatal de la 36.ª OMM, 2022*) En una cuadrícula de $m \times n$ cuadrillos, con $m \geq 3$ y $n \geq 3$, el número de cuadrillos que tienen exactamente 3 cuadrillos vecinos es igual al número de cuadrillos que tienen exactamente 4 cuadrillos vecinos. ¿Cuántos cuadrillos tiene la cuadrícula?

Nota. Decimos que dos cuadrillos de la cuadrícula son *vecinos* cuando comparten un lado.

La relación del primer problema con el trinomio $X + Y + XY$ es evidente. En el caso del segundo problema, la conexión queda de manifiesto toda vez que éste se expresa en

lenguaje algebraico: lo que el problema solicita son todos los pares ordenados $(x, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ tales que

$$xy = 5(x + y).$$

Esta ecuación se puede reescribir como

$$5x + 5y - xy = 0. \quad (2)$$

En el lado izquierdo de la ecuación aparece un trinomio del tipo $X + Y + XY$ pero en el cual los primeros dos coeficientes son iguales a 5 y el tercero es igual a -1 .

Antes de hacer comentario alguno sobre los problemas 3 y 4, vamos a enunciar lo que, en nuestra opinión, es la recomendación táctica a tener mente al abordar un problema en cuyo análisis surge una ecuación como (1) o (2):

Mantra. ¡Agregando una constante “adecuada” en ambos miembros de la ecuación es posible lograr que el trinomio en el lado izquierdo quede factorizado!

Ilustremos lo anterior en el caso del primer problema. La ecuación que se está considerando es:

$$134 = a + b + ab. \quad (3)$$

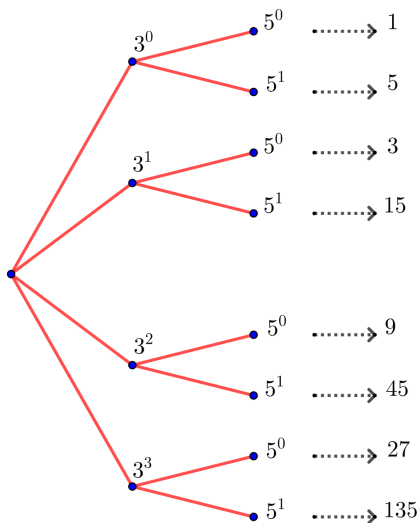
Puesto que

$$\begin{aligned} a + b + ab &= ab + a + b \\ &= a(b + 1) + b, \end{aligned}$$

al sumar 1 en ambos lados de (3) llegamos a que

$$135 = a + b + ab + 1 = a(b + 1) + (b + 1) = (a + 1)(b + 1). \quad (4)$$

Como a y b representan números enteros positivos, el problema se ha reducido a hallar todos los pares ordenados conformados por divisores positivos de 135 cuyo producto es igual a 135. Tenemos que $135 = 3^3 \cdot 5^1$ y, en consecuencia, 135 tiene $(3 + 1)(1 + 1) = 8$ divisores positivos los cuales pueden detectarse al recorrer cada una de las ramas de su respectivo árbol de divisores positivos:



Del árbol previo notamos que los pares de divisores de 135 que multiplicados dan 135, se generan al emparejar el divisor que sale de la primera rama con el divisor que emana de la última, el divisor que sale de la segunda rama con el divisor que surge de la penúltima y así sucesivamente. De esto y de la restricción $a \leq b$ se sigue que sólo hay cuatro formas de que la igualdad en (4) se cumpla:

- cuando $a + 1 = 1$ y $b + 1 = 135$,
- cuando $a + 1 = 5$ y $b + 1 = 27$,
- cuando $a + 1 = 3$ y $b + 1 = 45$ y
- cuando $a + 1 = 9$ y $b + 1 = 15$.

Como en el primer caso se obtiene que $a = 0$, la conclusión para el problema 1 es que sólo hay tres pares ordenados $(a, b) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ en los que $a \leq b$ y tales $a + b + ab = 134$: a saber, $(a = 4, b = 26)$, $(a = 2, b = 44)$ y $(a = 8, b = 14)$.

¡Hemos resuelto el primero de los problemas que listamos al inicio! Hay dos puntos clave que debemos destacar en esta solución:

PUNTO 1. La factorización en (4) se alcanzó juntando—en primer lugar—los términos en los que aparecía la incógnita a y sumando un 1 a continuación.

PUNTO 2. Como las incógnitas en el problema representaban números enteros, toda vez que se obtuvo una ecuación en la que había una expresión factorizada en uno de los lados de la misma y una constante entera en el otro, la solución se completó mediante consideraciones de divisibilidad.

Veremos ahora cómo es que apelando a estos puntos podemos establecer los problemas 2 y 3 y muchos otros. Recordemos que, en esencia, el problema 2 solicita determinar todos los pares ordenados $(x, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ tales que

$$5x + 5y - xy = 0. \quad (5)$$

Puesto que

$$5x + 5y - xy = x(5 - y) + 5y = x(5 - y) - 5(-y),$$

resulta aparente que para factorizar el lado derecho de (5) bastaría con sumar -25 en sendos lados de la ecuación. Al hacerlo la ecuación deviene en

$$\begin{aligned} -25 &= x(5 - y) - 5(-y) - 25 \\ &= x(5 - y) - 5(5 - y) \\ &= (x - 5)(5 - y) \end{aligned}$$

o equivalentemente en

$$(x - 5)(y - 5) = 25.$$

En vista de que $25 = 5^2$ se sigue que todas las posibilidades para que el producto de $(x - 5)$ y $(y - 5)$ sea igual a 25, considerando que tanto x como y han de ser números positivos, son las que se muestran en la siguiente tabla:

$(x - 5)$	$(y - 5)$
1	25
5	5
25	1

Tenemos así que todos los pares ordenados que satisfacen lo requerido son:

$$(x = 6, y = 30), (x = 10, y = 10), (x = 30, y = 6).$$

Expondremos a continuación la solución al tercer problema. Sería conveniente que el lector pause la lectura del artículo en este momento e intente resolver el problema por su cuenta antes de proseguir con la revisión de los párrafos subsecuentes; en caso de que el lector esté limitado de tiempo y prefiera analizar la solución en otra ocasión algo que podemos sugerirle es que omita los párrafos destinados a ésta y que reanude la lectura del artículo justo en donde aparece el símbolo de la manecilla.

El problema 3 pide determinar todos los pares ordenados $(x, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ tales que

$$\frac{1}{x} + \frac{3}{y} = \frac{1}{2}. \quad (6)$$

Claramente, esa ecuación se puede reescribir como

$$2(3x + y) = xy$$

o bien como

$$0 = 6x + 2y - xy. \quad (7)$$

De acuerdo con el **mantra**, es posible conseguir una expresión factorizada en la izquierda y alguna constante entera en la derecha. Emulemos la manera en la que se procedió en el problema anterior. Dado que

$$6x + 2y - xy = x(6 - y) + 2y = x(6 - y) - 2(-y),$$

vemos que un $+6$ dentro del segundo par de paréntesis bastaría para tener una expresión factorizada en el lado derecho; así pues, al sumar -12 en ambos miembros de (7) llegamos a que

$$\begin{aligned} -12 &= x(6 - y) - 2(-y) - 12 \\ &= x(6 - y) - 2(-y + 6) \\ &= (6 - y)(x - 2). \end{aligned}$$

La ecuación anterior es equivalente a

$$(x - 2)(y - 6) = 12.$$

Como los seis divisores positivos del número 12 son 1, 2, 3, 4, 6 y 12, las posibilidades para que el producto de $(x - 2)$ y $(y - 6)$ sea igual a 12 están registradas en esta tabla:

$(x - 2)$	$(y - 6)$
1	12
2	6
3	4
4	3
6	2
12	1

Se concluye así que todos los pares ordenados $(x, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ para los cuales vale (6) son: $(x = 3, y = 18), (x = 4, y = 12), (x = 5, y = 10), (x = 6, y = 9), (x = 8, y = 8)$ y $(x = 14, y = 7)$.

☞ Al resolver cada uno de estos tres problemas, hemos llegado a una ecuación del tipo

$$Ax + By + Cxy = D \quad (8)$$

donde los coeficientes A, B, C y D han sido números enteros y los primeros tres de ellos distintos de cero. En cada caso, la idea que seguimos fue sumar $\frac{AB}{C}$ en sendos lados para obtener una expresión factorizada en el lado izquierdo y una constante en los números enteros en el lado derecho. He aquí el desglose pormenorizado de lo conseguido al proceder de ese modo:

$$\begin{aligned}
 D + \frac{AB}{C} &= Ax + By + Cxy + \frac{AB}{C} \\
 &= Cx\left(\frac{A}{C} + y\right) + B\left(\frac{A}{C} + y\right) \\
 &= (Cx + B)\left(\frac{A}{C} + y\right)
 \end{aligned}$$

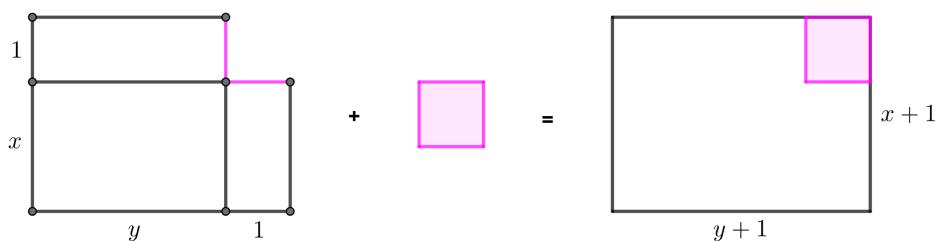
y de aquí que

$$AB + CD = (Cx + B)(Cy + A).$$

Cuando las incógnitas x y y representan números enteros, el problema se ha convertido en uno de analizar los divisores del número entero $AB + CD$. No obstante, es de men-

cionar que la idea de buscar la expresión factorizada en el lado izquierdo de (8) puede ser de utilidad incluso cuando no sepamos de antemano que x y y son números enteros.

Es justamente a la idea de conseguir la factorización en el lado izquierdo de (8) mediante la inserción del término $\frac{AB}{C}$ a lo que se le conoce como el **truco de factorización favorito de Simon (TFFS)** o **completación del rectángulo**. La segunda denominación hace sentido al considerar el caso especial del trinomio $x + y + xy$, el cual puede entenderse como la suma de las áreas de los tres rectángulos en la parte inicial de la figura que se presenta a continuación y la cual puede “completarse” a un rectángulo de lados $x + 1$ y $y + 1$ al añadir un cuadrado de lado 1.



En la segunda sección del artículo mostraremos que hay múltiples contextos en los cuales puede ser útil la idea de completar un rectángulo; esperamos que los problemas que abordaremos resulten llamativos a todos nuestros lectores. En la tercera sección socializamos algunos comentarios sobre el origen de la denominación “**truco de factorización favorito de Simon**”; finalmente, en la cuarta sección listamos diez problemas adicionales para que los lectores más entusiastas los trabajen por su cuenta y nos envíen sus soluciones para que las publiquemos en el próximo número de TZALOA.

Otros ejemplos

De los cuatro problemas planteados al inicio de la sección anterior, sólo nos falta discutir el último. Lo que se solicita en ese problema es determinar las dimensiones de una cuadrícula en la cual el total de cuadrillos que tienen exactamente 3 cuadrillos vecinos es igual al total de cuadrillos que tienen 4 cuadrillos vecinos.

Lo que notamos en primera instancia es que en una cuadrícula de tamaño $m \times n$, con $m \geq 3$ y $n \geq 3$, hay tres tipos de cuadrillos: aquellos que tienen exactamente 2 cuadrillos vecinos, aquellos que tienen exactamente 3 cuadrillos vecinos y aquellos que tienen 4 cuadrillos vecinos. A guisa de ejemplo consideremos el caso de una cuadrícula de tamaño 4×3 ; en el interior de cada uno de los cuadrillos que la conforman anotamos el total de cuadrillos que tiene por vecinos:

2	3	2
3	4	3
3	4	3
2	3	2

Podemos inferir de este caso particular que los cuadrillos con exactamente 3 cuadrillos vecinos son los de la orilla con excepción de los que aparecen en las esquinas de la cuadrícula. De esto se sigue que el total de cuadrillos con exactamente 3 cuadrillos vecinos en una cuadrícula $m \times n$ es igual a $2(m-2) + 2(n-2)$. Por otro lado, no resulta difícil convencerse de que el total de cuadrillos con 4 cuadrillos vecinos es igual a $(m-2)(n-2)$. En consecuencia, con la finalidad de determinar las dimensiones de una cuadrícula en la que se cumpla lo solicitado, es necesario determinar las soluciones de la ecuación

$$(m-2)(n-2) = 2(m-2) + 2(n-2) \quad (9)$$

en números enteros m y n (ambos mayores que 2). Mediante la sustitución $X = m-2$ y $Y = n-2$, la ecuación en (9) se puede reescribir como

$$2X + 2Y - XY = 0; \quad (10)$$

si sumamos un -4 a la expresión en el lado izquierdo obtenemos

$$2X + 2Y - XY - 4 = X(2-Y) + 2(Y-2) = (-X+2)(Y-2).$$

Ergo, se ha logrado expresar la ecuación (10) como

$$(X-2)(Y-2) = 4.$$

Puesto que $X-2 = m-4$ y $Y-2 = n-4$, los posibles valores enteros que m y n pueden asumir se extraen del análisis de las seis posibilidades siguientes:

- $m-4 = -4, n-4 = -1.$ • $m-4 = -2, n-4 = -2.$ • $m-4 = -1, n-4 = -4.$
- $m-4 = 1, n-4 = 4.$ • $m-4 = 2, n-4 = 2.$ • $m-4 = 4, n-4 = 1.$

Las primeras tres posibilidades no conducen a una solución (m, n) en la que tanto m como n sean mayores que 2. En el cuarto caso se obtiene que $m = 5$ y $n = 8$; en el quinto caso se llega a que $m = 6$ y $n = 6$ y, finalmente, en el sexto caso se obtiene que $m = 8$ y $n = 5$. Así pues, el total de cuadrillos en una cuadrícula, con al menos tres renglones

y al menos tres columnas, en la que el total de cuadritos con exactamente 3 cuadritos vecinos es igual al total de cuadritos con exactamente 4 cuadritos vecinos, es $5 \times 8 = 40$ o $6 \times 6 = 36$.

Los ejemplos que siguen constituyen un pequeño muestrario de situaciones en las que es de ayuda recurrir al **truco de factorización favorito de Simon**.

Problema 5. (*Problemas del calendario matemático (año 2005), p. 30.*) Determine todos los números enteros positivos a y b tales que

$$\text{mcd}(a, b) + \text{mcm}(a, b) = a \cdot b.$$

Solución. Es un hecho conocido que $\text{mcd}(a, b) \cdot \text{mcm}(a, b) = a \cdot b$. Luego, si hacemos $X = \text{mcd}(a, b)$ y $Y = \text{mcm}(a, b)$, la ecuación original se puede reescribir como

$$X + Y - XY = 0.$$

Al sumar -1 en sendos miembros llegamos a la ecuación

$$X + Y - XY - 1 = -1,$$

la cual deviene en

$$(X - 1)(Y - 1) = 1.$$

Puesto que tanto X como Y son números enteros positivos, entonces $X - 1 = 1$ y $Y - 1 = 1$; de esto se desprende que $\text{mcd}(a, b) = 2$, $\text{mcm}(a, b) = 2$ y, por consiguiente, $a \cdot b = 4$. Se tiene así que $(a = 4, b = 1)$, $(a = 2, b = 2)$ o $(a = 1, b = 4)$, pero sólo en el segundo par ordenado se cumple que $\text{mcd}(a, b) = 2$. Concluimos así que los únicos números enteros positivos a y b que satisfacen la igualdad $\text{mcd}(a, b) + \text{mcm}(a, b) = a \cdot b$ son $a = 2$ y $b = 2$. $\square$

En la demostración por inducción matemática del problema que se presenta enseguida, surge de forma natural el trinomio $X + Y - XY$. Consideramos valioso exponer este ejemplo, pues con ayuda de él es muy fácil establecer la célebre desigualdad entre la media geométrica y la media aritmética: esto indica que, al explicar la desigualdad entre la media geométrica y la media aritmética mediante inducción matemática, hay alternativas distintas a la demostración por inducción *à la* Cauchy (cf. [1] pp. 143-144], [4] pp. 56-57] o [6] p. 12]).

Problema 6. Sea n un número entero mayor a 1. Si $x_1, x_2, \dots, x_n$ son números reales positivos tales que $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$, entonces $x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n$.

Solución. Analicemos el caso $n = 2$. Supongamos que x_1 y x_2 son números reales positivos cuyo producto es igual a 1. Entonces, al tenerse que $(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 \geq 0$, se sigue que $x_1 - 2\sqrt{x_1 x_2} + x_2 \geq 0$ y, por lo tanto, $x_1 + x_2 \geq 2\sqrt{x_1 x_2} = 2$.

Supongamos que la desigualdad $x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n$ se cumple para cualesquiera números reales positivos $x_1, x_2, \dots, x_n$ cuyo producto es igual a 1.

Consideremos $n+1$ números reales positivos $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ tales que $x_1 x_2 \cdots x_{n+1} = 1$. Si $x_1 = x_2 = \dots = x_{n+1} = 1$, entonces $x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1} = n+1$ y la conclusión deseada se tiene. Si no se cumple que todos los números $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ son iguales a 1, entonces alguno de ellos debe ser menor que 1 y alguno de ellos debe ser mayor que 1; digamos que $x_n > 1$ y que $x_{n+1} < 1$. Puesto que $1 = x_1 x_2 \cdots x_{n+1} = x_1 x_2 \cdots x_{n-1} (x_n x_{n+1})$, podemos aplicar la hipótesis de inducción a los números $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n x_{n+1}$ y con ello obtenemos que

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n x_{n+1} > n.$$

De esto se desprende que

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n + x_{n+1} &> n + x_n + x_{n+1} - x_n x_{n+1} \\ &= n + 1 + x_n + x_{n+1} - x_n x_{n+1} - 1 \\ &= n + 1 + (x_n - 1)(1 - x_{n+1}); \end{aligned}$$

y, en vista de que $(x_n - 1)(1 - x_{n+1}) > 0$, tenemos que la expresión $n + 1 + (x_n - 1)(1 - x_{n+1})$ es mayor que $n + 1$ y, en consecuencia,

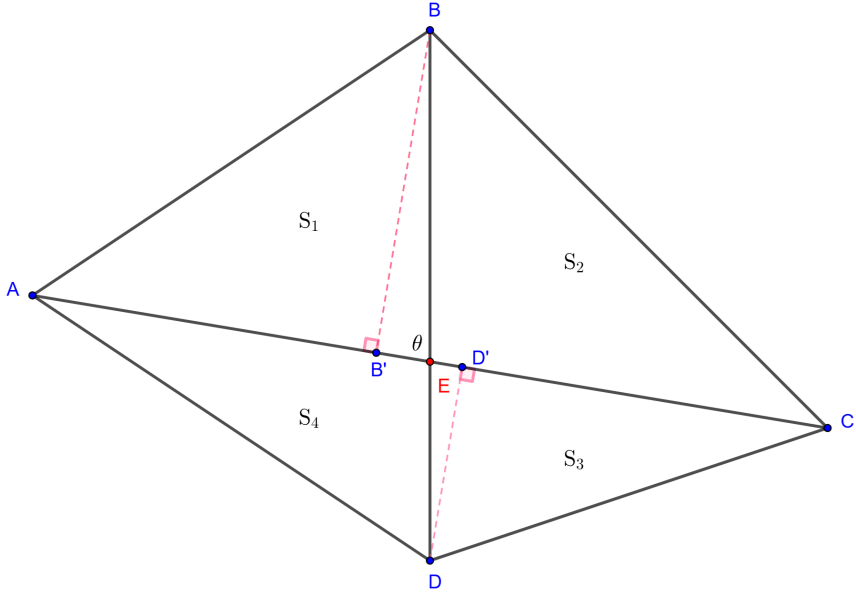
$$x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n + x_{n+1} > n + 1$$

que es justamente lo que deseábamos establecer. □

El rango de aplicabilidad del **truco de factorización favorito de Simon** es amplio. Aunque los primeros problemas abordados podrían catalogarse como de álgebra o de aritmética solamente, el problema que presentamos ahora podría considerarse como uno de geometría.

Problema 7. (2.º Concurso Regional del Sureste de la OMM, 2016.) Las diagonales de un cuadrilátero convexo $ABCD$ se intersectan en el punto E . Sean S_1, S_2, S_3 y S_4 las áreas de los triángulos AEB, BEC, CED y DEA , respectivamente. Supóngase que $S_1 = x + y + xy$, $S_2 = y + z + yz$, $S_3 = w + z + wz$ y que $S_4 = w + x + wx$ para algunos números reales w, x, y y z . Demuestre que o E es el punto medio de la diagonal AC o E es el punto medio de la diagonal BD .

Solución. En lo que sigue recurriremos a los elementos indicados en el diagrama que se muestra a continuación: B' es el pie de la altura por B del triángulo AEB , D' es el pie de la altura por D del triángulo CED y asumimos que $\angle AEB = \theta$.



Del **TFBS** se obtiene que $S_1 + 1 = (x+1)(y+1)$, $S_2 + 1 = (y+1)(z+1)$, $S_3 + 1 = (w+1)(z+1)$ y $S_4 + 1 = (w+1)(x+1)$; a su vez, de estas igualdades se desprende que

$$(S_1 + 1)(S_3 + 1) = (S_2 + 1)(S_4 + 1). \quad (11)$$

Por otra parte, es conocido que

$$S_1 S_3 = \left(\frac{1}{2} (AE)(EB) \sin \theta \right) \left(\frac{1}{2} (CE)(ED) \sin \theta \right) \quad (12)$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{1}{2} (CE)(EB) \sin \theta \right) \left(\frac{1}{2} ((AE)(ED) \sin \theta) \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} (CE)(EB) \sin(\pi - \theta) \right) \left(\frac{1}{2} ((AE)(ED) \sin(\pi - \theta)) \right) \\ &= S_2 S_4. \end{aligned} \quad (13)$$

De (11), (12) y (13) se llega a que

$$S_1 + S_3 = S_2 + S_4.$$

Considerando el diagrama y denotando con h_1 a BB' y con h_2 a DD' tenemos que la igualdad anterior se puede reescribir como

$$\frac{AE \cdot h_1}{2} + \frac{CE \cdot h_2}{2} = \frac{CE \cdot h_1}{2} + \frac{AE \cdot h_2}{2}.$$

Claramente esta igualdad es equivalente a

$$AE(h_1 - h_2) = CE(h_1 - h_2).$$

Resulta que si $h_1 - h_2 \neq 0$, entonces $AE = CE$ de lo cual se colige que E es el punto medio de la diagonal AC . En caso contrario tenemos que $h_1 = h_2$; dado que $\sphericalangle BEB' = \sphericalangle DED'$ y $\sphericalangle EB'B = \frac{\pi}{2} = \sphericalangle ED'D$, el criterio ALA de congruencia permite garantizar que $\triangle DD'E \cong \triangle BB'E$. De esto se infiere que $BE = DE$, lo que indica que—en el caso en turno— E es el punto medio de la diagonal BD . $\square$

Cerramos esta sección del artículo con la exposición de una solución al tercer problema del primer examen del Concurso Nacional de la 29.^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas; desde el planteamiento del mismo es aparente que el **truco de factorización favorito de Simon** podría ser de ayuda en su resolución.

Problema 8. (*Concurso Nacional de la 29.^a OMM, 2015.*) Sea $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ una función que satisface las dos condiciones siguientes:

a) $f(1) = 1$.

b) $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+, f(a + b + ab) = a + b + f(ab)$.

¿A qué número es igual $f(2015)$?

Solución. Haciendo $a = b = 1$ se obtiene que $f(3) = f(1 + 1 + 1) = 1 + 1 + f(1) = 3$.

Por otro lado, si sólo hacemos $b = 1$ llegamos a que

$$\begin{aligned} f(2a + 1) &= f(a + 1 + a) \\ &= a + 1 + f(a) \end{aligned} \tag{14}$$

para cada $a \in \mathbb{Z}^+$. Si hacemos $b = 3$, obtenemos que

$$\begin{aligned} f(4a + 3) &= f(a + 3 + 3a) \\ &= a + 3 + f(3a) \end{aligned} \tag{15}$$

para cada $a \in \mathbb{Z}^+$. Empero, la relación en (14) brinda otra manera de calcular $f(4a + 3)$: en efecto,

$$\begin{aligned} f(4a + 3) &= f(2(2a + 1) + 1) \\ &= (2a + 1) + 1 + f(2a + 1) \\ &= (2a + 2) + a + 1 + f(a) \\ &= 3a + 3 + f(a). \end{aligned} \tag{16}$$

Combinando (15) y (16) se tiene que

$$f(3a) = 2a + f(a) \tag{17}$$

para cada $a \in \mathbb{Z}^+$. De (17) se desprende que $f(9) = 6 + f(3) = 6 + 3 = 9$; además, puesto que $f(9) = f(2(4) + 1) = 4 + 1 + f(4) = 5 + f(4)$, notamos que $f(4) = 4$. Así pues, $f(12) = 8 + f(4) = 12$ y $f(36) = 24 + f(12) = 36$.

Usando la identidad (14) reiteradamente tenemos que

$$\begin{aligned} f(2015) &= 1008 + f(1007) \\ &= 1008 + 504 + f(503) \\ &= 1008 + 504 + 252 + f(251) \\ &= 1008 + 504 + 252 + 126 + f(125) \\ &= 1008 + 504 + 252 + 126 + 63 + f(62) \\ &= 1953 + f(62). \end{aligned}$$

Para calcular $f(62)$ lo que hacemos es analizar las soluciones de la ecuación $a+b+ab = 62$ en números enteros positivos a y b . Del **truco de factorización favorito de Simon** se deduce que $a + 1$ y $b + 1$ tienen que ser divisores positivos de 63 con producto igual a tal número. Considerando el caso en el que $a = 6$ y $b = 8$ llegamos a que

$$f(62) = f(6 + 8 + 6 \cdot 8) = 6 + 8 + f(48).$$

Todo el problema se ha reducido a evaluar la función f en 48. Puesto que la única solución de la ecuación $a + b + ab = 48$ en números enteros positivos a y b es ($a = 6, b = 6$), podemos deducir que $f(48) = f(6 + 6 + 6 \cdot 6) = 6 + 6 + f(36) = 12 + 36 = 48$ y de aquí que

$$f(2015) = 1953 + f(62) = 1953 + 14 + f(48) = 1953 + 14 + 48 = 2015.$$

□

En el prefacio del primer volumen de los *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, G. Pólya y G. Szegő señalan que “una idea que sólo puede usarse una vez es un truco y si la idea puede usarse en más de una ocasión entonces ésta deviene en un método”. Aunque no resulte del todo claro si este *dictum* aplica o no al **truco de factorización favorito de Simon**, hay algo que sí hemos podido constatar a lo largo de este trabajo: la aplicación del **TFFS** a veces se da al inicio de una solución; en otras ocasiones puede darse en el nudo de la misma y, en otras tantas, es un ingrediente clave en el desenlace.

¿Qué hay en un nombre?

Si bien la denominación **truco de factorización favorito de Simon** no está del todo establecida en muchas comunidades hispanoparlantes, el nombre es bastante familiar para todos quienes fueron usuarios asiduos del sitio web artofproblemsolving.com (t.c.c. AoPS) durante algunos de los primeros años del sitio. AoPS fue lanzado en 2003

por Richard Rusczyk; es de mencionar que el intercambio de matemáticas que se lleva a cabo en los foros del sitio es de una magnitud tal que, en la nota publicada hace algunos años en *The New Yorker* sobre Rusczyk, la autora se refirió a AoPS como “el campamento mundial de matemáticas de Richard Rusczyk”.

Fue el usuario ComplexZeta de AoPS quien tuvo la audacia de empezar a llamar **truco de factorización favorito de Simon** a la idea sobre la cual ha versado este artículo. El nombre de ComplexZeta en el mundo *off-line* es Simon Rubinstein-Salzedo: este dato echa un poco de luz sobre la elección del nombre para el truco.

Simon Rubinstein-Salzedo obtuvo su grado de doctor en matemáticas por la Universidad de Stanford en el año 2012 con una tesis sobre el control de la ramificación en campos de números (la cual fue supervisada por Akshay Venkatesh, uno de los ganadores de la Medalla Fields en 2018). En la actualidad Simon Rubinstein-Salzedo es director de un instituto educativo para estudiantes aptos de educación media superior (*the Euler Circle*). Traducimos a continuación la intervención que Rubinstein-Salzedo tuviera en [Quora](#) cuando le preguntaron sobre el origen del **truco de factorización favorito de Simon** y la popularidad del mismo.

«Yo no lo descubrí; el truco ya era bastante conocido cuando yo era un estudiante de bachillerato (aunque tal vez no en la misma forma en que yo lo usaba). Del nombre que propuse puede verse que no estaba alegando prioridad alguna sobre él; lo único que quise indicar con el nombre es que era un truco que me gustaba bastante.

El nombre *pegó* simplemente porque yo estaba en el lugar correcto y en el momento preciso. AoPS fue lanzado a finales de mayo de 2003, alrededor de un mes antes de que yo egresara del bachillerato. Fui un usuario frecuente de AoPS desde un inicio; probablemente llegué a ser uno de los tres usuarios más prolíficos del sitio por una buena temporada. Después de algunos meses, Richard Rusczyk me invitó a ser un instructor asistente para las clases de AoPS; esto contribuyó a que fuera bastante conocido en la comunidad AoPS, tanto por mis publicaciones en el foro como por mi participación en las clases como instructor asistente. Unos meses después, por ahí de octubre de 2003, resolví un problema que alguien puso en el sitio y mencioné en el hilo respectivo que yo lo resolvería mediante el **truco de factorización favorito de Simon**. No sé por qué me referí a mí mismo en tercera persona en ese instante en particular, pero lo hice.

Aparentemente, la gente pensó que el nombre mediante el cual me referí a esa idea era bueno y Richard, Matthew y otros instructores empezaron a usar el nombre en sus clases y en sus libros [(cf. [5] pp. 329-333)]. Aparte de mi comentario inicial en el mencionado hilo de octubre de 2003, hice nada en absoluto para popularizar el término: la comunidad lo hizo por mí.

Me resulta bastante extraño que el aspecto por el cual soy más famoso en la vida es por un *post* en AoPS que hice cuando tenía 18 años. Considero

que he tenido logros de mayor relevancia: por ejemplo, dirigir *the Euler Circle* e intentar revolucionar la educación para los estudiantes talentosos en matemáticas al procurar generar para ellos una oportunidad de acceder a una formación digna y desafiante que nadie más está dispuesto a ofrecerles. Sin embargo, todo indica que a las personas les cae en gracia apelar a ese truco de factorización que lleva mi nombre; en ese sentido, parece que la denominación ha contribuido en alguna medida a potenciar las habilidades de resolución de problemas de algunos sectores estudiantiles. Eso es algo que me resulta grato. Empero, lo que se me hace totalmente bizarro es que el **truco de factorización favorito de Simon** me ha convertido en una especie de celebridad entre los estudiantes que participan en los concursos de matemáticas: algunas veces me piden autógrafos cuando participo en círculos matemáticos o cuando asisto a algunos concursos. Ciertamente no merezco ese tipo de atenciones: de niño me iba bastante bien en los concursos, pero había varios estudiantes a los que les iba mejor que a mí y, sin embargo, pocos de ellos tienen algún estatus de celebridad. Considero que ellos lo merecen mucho más que yo... »

Independientemente de la impresión que del caso tenga cada quien, es innegable que la preeminencia de AoPS en el ámbito de las olimpiadas ha influido en que la denominación acuñada por ComplexZeta siga siendo vigente hogaño y en que ésta sea estándar en diversos círculos matemáticos alrededor del orbe.

Dado que la idea de “completar cuadrados” está relativamente bien establecida (cf. [5 pp. 360-365] o [7 pp. 2-6]), es posible que muchos lectores opten por referirse a la factorización como “completación del rectángulo” de aquí en más. Evidentemente, no debe haber tema alguno con la denominación que cada quien llegue a adoptar. Como ya lo expresara el gran W. Shakespeare en algún momento: “... aquello a lo que nos referimos como una rosa tendría la misma fragancia bajo cualquier otro nombre.”.

Problemas adicionales

Listamos a continuación algunos problemas en los que resulta de ayuda recurrir al **truco de factorización favorito de Simon**. Exhortamos a todos nuestros lectores a que intenten los problemas y a que nos hagan llegar sus soluciones a la cuenta revistaomm@gmail.com. En el próximo número de la revista publicaremos las soluciones a los problemas; naturalmente, algunas de las que presentemos serán elegidas dentro de las que la comunidad olímpica tenga a bien enviarnos. Finalmente, si saben de otros problemas en cuya solución se eche mano del **TFFS**, no duden en escribirnos, ¡será todo un gusto leerlos!

- ① Si $A = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ : \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{13}\}$, ¿a cuánto es igual $\max\{x + y : (x, y) \in A\}$?

- ② Sean x y y números enteros positivos distintos tales que

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{19}.$$

¿A qué número es igual $\sqrt{x+y}$?

- ③ Determine todos los números enteros $n \geq 1$ tales que la ecuación

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{n}$$

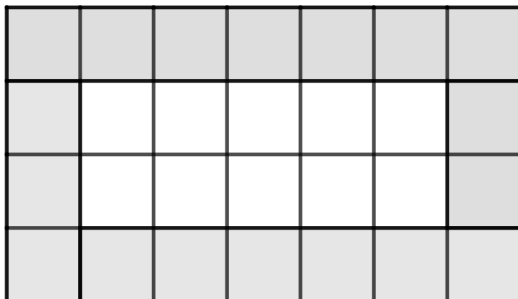
tiene exactamente una solución $(x, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$.

- ④ Sea $n \in \mathbb{Z}$. Supóngase que hay exactamente 2005 pares ordenados $(x, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ tales que

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n}.$$

Demuestre que n es un cuadrado perfecto.

- ⑤ ([4] p. 17 y pp. 93-94] o [8] p. 14 y pp. 17-18]) Se dibuja un rectángulo (el término no excluye al cuadrado) en papel cuadriculado y se somborean las casillas del contorno. En el ejemplo de abajo, el número de cuadritos sombreados es mayor que el número de cuadritos que aparecen en blanco, en el interior. ¿Será posible dibujar un rectángulo de proporciones tales que el borde (de una casilla de anchura) contenga igual número de cuadritos que el rectángulo blanco en su interior? En caso de que la respuesta sea afirmativa, la tarea consiste en hallar todas las dimensiones posibles del rectángulo.



- ⑥ Los números reales x , y y z son tales que

$$\begin{cases} x + y + xy = 8 \\ y + z + yz = 15 \\ z + x + zx = 35 \end{cases}$$

Determine el valor numérico de la expresión $x + y + z + xyz$.

⑦ Encuentre todas las ternas $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ tales que

$$\begin{cases} x + y - z = 23 \\ x^2 + y^2 - z^2 = 23 \end{cases}$$

⑧ (T. Andreescu; *Math. reflections*, (2017), no. 1, prob. O397.) Determine todos los pares ordenados $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ que cumplen que

$$(x^3 - 1)(y^3 - 1) = 3(x^2 y^2 + 2).$$

⑨ (*Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas*, 2016.) Determine todos los números primos p, q, r y k para los cuales se cumple que $pq + qr + rp = 12k + 1$.

⑩ Sea n un número entero positivo. Anita y Benito juegan el siguiente juego. Benito cuenta los pares ordenados (a, b) , de números enteros positivos, tales que $a + b = n$. Anita cuenta los pares ordenados (c, d) , de números enteros positivos, tales que $c^{-1} + d^{-1} = n^{-1}$. Gana el jugador que obtiene el mayor número de pares ordenados. ¿Para cuáles n 's gana Anita?



Una fotografía de Simon Rubinstein-Salzedo (incluida con la debida autorización).

Bibliografía

- [1] M. Aigner & G. M. Ziegler, *Proofs from THE BOOK* (6th edition). Springer Verlag, 2018.
- [2] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega y R. Valdez Delgado, *Álgebra*. Serie: Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Coedición del Instituto de Matemáticas de la Universidad Nacional Autónoma de México y la Sociedad Matemática Mexicana, 2014.
- [3] I. Chen, Richard Rusczyk's worldwide math camp. *The New Yorker*. Artículo disponible en la red desde el 12 de noviembre de 2021: <https://www.newyorker.com/culture/persons-of-interest/richard-ruszyks-worldwide-math-camp>. Fecha de último acceso: 24 de junio de 2025.
- [4] M. Fortes Besprosvani (coordinador ed.), *Olimpiadas de matemáticas: 140 problemas, seis años de éxito*. Academia de la Investigación Científica, México, D. F., 1993.
- [5] R. Rusczyk, *Introduction to algebra*. AoPS Incorporated, 2007.
- [6] J. C. Sampedro y M. Tetlalmatzi Montiel, [Una demostración inductiva directa de la desigualdad media geométrica - media aritmética](#). *Miscelánea Matemática*, (Jul. 1999), No. 28, pp. 11-15.
- [7] D. A. Solís Gamboa y I. Zhong Zhang, Apuntes sobre la ecuación cuadrática. *Tzaloa*, (2024), No. 2, pp. 1-22.
- [8] M. Gardner, *Wheels, life and other mathematical amusements*. W. H. Freeman and Co., USA, 1983.

SOCIEDAD
MATEMATICA
MEXICANA



Olimpiada
Mexicana
de Matemáticas
www.ommenlinea.org
tel: 5622 • 4864