

38a. OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS

GRO. – EXAMEN SELECTIVO FINAL – 12/10/2024

INDICACIONES GENERALES

- La duración del examen es de 4.5 horas.
- No está permitido usar calculadoras o dispositivos móviles durante el examen.
- Durante la primera hora del examen puedes hacer preguntas sobre palabras que desconozcas o frases en los planteamientos que no te queden claras.

P R O B L E M A S

1. Un número entero positivo es llamado *especial* si al sumar sus dígitos obtenemos un número primo y al multiplicar sus dígitos también obtenemos un número primo. Por ejemplo, 12 es un número especial. ¿Cuántos números especiales de cinco dígitos hay en total?

2. Sean ABC un triángulo y D el punto medio de BC . Supongamos que $\angle ADB = 45^\circ$ y que $\angle ACD = 30^\circ$. ¿Cuánto mide el ángulo BAD ?

3. Ana y Beto juegan el siguiente juego. Ana elige tres números reales diferentes de cero. Usando esos tres números como coeficientes, Beto forma un polinomio cuadrático $p(x)$. Ana gana el juego si ambas raíces del polinomio $p(x)$ son números racionales y, en caso contrario, el juego lo gana Beto. ¿Alguno de los dos jugadores puede aplicar una estrategia que le permita ganar siempre? En caso afirmativo, indique cuál de los jugadores puede hacerlo y describa concisamente la estrategia.

Nota: Un número racional es un número de la forma $\frac{a}{b}$ donde a y b son números enteros con $b \neq 0$.

4. En cierto hospital hay muchos bebés recién nacidos. Se sabe que la suma de las edades (en años) de todos estos bebés es mayor que 3 y que la suma de los cuadrados de sus edades es mayor que 1. Demuestre que en el hospital hay tres bebés cuya suma de edades es mayor que 1.

Nota: Tome en cuenta que, por ejemplo, si un bebé tiene seis meses entonces su edad se puede expresar como 0.5 años.