



4a. Olimpiada Femenil de Matemáticas

Segundo examen selectivo - Mayo de 2025

INDICACIONES GENERALES

- La duración del examen es de 4.5 horas.
- Las participantes de Nivel 1 deben resolver los problemas 1, 2, 3, y 4 y las participantes de Nivel 2 deben resolver los problemas 3, 4, 5 y 6.
- No está permitido usar calculadoras o dispositivos móviles durante el examen.
- Durante la primera hora de la aplicación es válido hacer preguntas sobre palabras en el examen cuyo significado desconozca o sobre frases que considere ambiguas en los planteamientos de los problemas.
- Justificar adecuadamente cada una de sus soluciones. En este examen cada problema tiene el valor clásico de **7 puntos**.
- **IMPORTANTE:** Las figuras que acompañan a un problema dado ilustran de manera **aproximada** la situación planteada.

P R O B L E M A S

1.

- a) Encuentre un ejemplo de una tercia (p, a, b) , de números enteros positivos, en la que p es un número primo y para la cual se cumple que

$$p^2 + a^2 = b^2. \quad (1)$$

- b) Demuestre que en cada tercia (p, a, b) , de números enteros positivos, en la que p es un número primo mayor que 3 y que satisface la ecuación (1) se cumple que $12 \mid a$ y que $2(p + a + 1)$ es un cuadrado perfecto.

2. ¿Cuántos triángulos se pueden formar escogiendo tres vértices de un polígono regular de 12 lados de manera que el triángulo tenga un ángulo interior de 45° ?

3. Un tren que va en movimiento rectilíneo uniforme (esto es, describiendo una trayectoria recta y recorriendo distancias iguales en intervalos de tiempos iguales) tarda 6 segundos en pasar delante de un observador y 15 segundos en pasar totalmente por un túnel de 270 m de longitud. Determine la longitud del tren.

4. Los puntos P y Q están sobre el lado BC de un triángulo acutángulo ABC de modo que $\angle PAB = \angle BCA$ y $\angle CAQ = \angle ABC$. Los puntos M y N están en las rectas AP y AQ , respectivamente; supóngase además que P es el punto medio de AM y que Q es el punto medio de AN . Demuestre que las rectas BM y CN se cruzan en la circunferencia circunscrita del triángulo ABC .

Nota. Al hacer la figura para este problema se vale suponer que el punto P está entre C y Q .

5. Se colocan cincuenta y un puntos en el interior de un cuadrado cuyo lado mide 1 cm. Demuestre que es posible trazar un círculo de radio $1/7$ cm que encierre en su interior a tres de los cincuenta y un puntos dados.

6.

- a) Encuentre un ejemplo de dos números enteros positivos n y k tales que los números $\binom{n}{k-1}$, $\binom{n}{k}$ y $\binom{n}{k+1}$ estén en progresión aritmética (en ese orden).
- b) Determine todos los pares ordenados (n, k) , de números enteros no negativos, tales que los números $\binom{n}{k-1}$, $\binom{n}{k}$ y $\binom{n}{k+1}$ estén en progresión aritmética (en ese orden).