PROBLEMAS DE PRÁCTICA

(Semana 8)

1.

a) Determine el dígito de las unidades del número 17^{15}.

b) ¿Cuánto suman los últimos ocho dígitos del número 2001^{2001}?

2. Calcule el resto que se obtiene al dividir el número

$$999\,998\,997\,996 \cdots 003\,002\,001$$

entre 13.

3. ¿Es posible encontrar números enteros a y b tales que $a^3 + b^3 + c^3 = 5$? Justifique adecuadamente su respuesta.

4. Al intentar calcular 2^{100} con una calculadora cuya batería está por agotarse se despliega en la pantalla lo siguiente:

$$1\square 67650600228229401496703205 3\square\square.$$

En lugar de cada uno de los tres cuadros en blanco debería aparecer un dígito del número 2^{100}. ¿Podría decir cuáles son los tres dígitos que la calculadora no está mostrando?

5. Sea n un número entero. Demuestre que si d es un divisor común de n^2+1 y $(n+1)^2+1$ entonces $d = \pm 1$ o $d = \pm 5$.

6. Considere el polinomio $f(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)+1$ y un número primo impar p. Demuestre que p divide a $f(n)$ para algún número entero n si y sólo si p divide a $m^2 - 5$ para algún entero m.

7. Sea p un número primo impar. Demuestre que $2^{2^p - 2} \equiv 1 \pmod{2^p + 1}$.

8. Determine todos los números primos de la forma $1 + 2^p + 3^p + \cdots + p^p$, donde p es un número primo.

9. Demuestre que si $p > 3$ es un número primo entonces $p^2 \equiv 1 \pmod{24}$.

10. Encuentre todos los números de 7 dígitos que son múltiplos de 3 y 7 y cuyos únicos dígitos son 3 o 7.

TEORÍA DE NÚMEROS PARA LA PRESELECCIÓN

Gro., México; a 27 de septiembre de 2020.