PROBLEMAS DE PRÁCTICA

(Semana 7)

1. Sean a y b números enteros positivos. Demuestre que si $\text{mcd}(a,b) = 1$, entonces el máximo común divisor de $a^2 - ab + b^2$ y $a + b$ es 1 o 3.

2. Si $56a = 65b$, demuestre que $a + b$ es un número compuesto.

3. ¿Cuál es el menor entero n para el cual

$$(2^2 - 1)(3^2 - 1)(4^2 - 1) \cdots (n^2 - 1)$$

es un cuadrado perfecto?

4. El producto de las edades de los hijos de Arturo es $1\,664$. La edad del más grande es el doble de la edad del más pequeño. ¿Cuántos hijos tiene Arturo en total?

5.

a) ¿Cuántos números enteros positivos dividen a $20!$?

b) ¿Cuántos de los divisores positivos de 20! son múltiplos de 3?

c) ¿Para qué número entero n se cumple que $n! = 2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$?

d) ¿En cuántos ceros termina $666!$? Ejemplos: 5! termina en un cero pues $5! = 120$, $10! =$ termina en dos ceros pues $10! = 3\,628\,800$.

6. Determine todos los números primos p tales que $9p+1$ es un cubo perfecto.

7. Halle todos los números primos p tales que $p^2 + 11$ tiene exactamente 6 divisores positivos distintos.

8.

a) Sea $n > 1$ y suponga que la descomposición canónica de n es $p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$. Demuestre que n es un cuadrado perfecto si y sólo si 2 divide a cada uno de los α_i.

b) Sea n un número entero positivo. Demuestre que n es un cuadrado perfecto si y sólo si $d(n)$ es un número impar.

9. Sean $1 = d_1 < d_2 < d_3 < \ldots < d_k = n$ los divisores del número entero positivo n. Encuentre todos los números n tales que $n = d_2^2 + d_3^3$.

10. Encuentre todas las ternas (x, y, n) de números enteros positivos tales que $\text{mcd}(x, n+1) = 1$ y $x^n + 1 = y^{n+1}$.

TEORÍA DE NÚMEROS PARA LA PRESELECCIÓN

Gro., México; a 16 de septiembre de 2020.