PROBLEMAS DE PRÁCTICA

(Semana 5)

1. Considere la progresión aritmética $-3, 1, 5, 9, 13, 17, \ldots$

a) ¿Es el número 2023 un término de esa progresión aritmética? En caso de que la respuesta sea afirmativa, determine la posición del número en la progresión.

b) Calcule la suma de los primeros 100 términos de esta progresión aritmética.

2. Se tienen dos listas de números positivos; cada una consiste de tres términos en progresión aritmética y la suma de los números en cada lista es 15. La diferencia común de los números en la primera lista es una unidad mayor que la diferencia común de los números en la segunda lista; además, el producto de los números en la primera lista es al producto de los números en la segunda lista tanto como 7 es a 8. Halle los números que conforman a la primera progresión aritmética.

3. Los números enteros a, b, c y d están en progresión aritmética; suponga además que $a < b < c < d$. Demuestre que

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{d}} = \frac{3}{\sqrt{a}+\sqrt{d}}.$$

4. Encuentre una progresión aritmética de 5 números primos con una diferencia común de 6. Demuestre que sólo hay una progresión aritmética con estas especificaciones (es decir, que conste de 5 números primos y cuya diferencia común sea igual a 6).

5. Demuestre que si alguno de los términos de una progresión aritmética es un cuadrado perfecto entonces en esa progresión aritmética aparecen una infinidad de cuadrados perfectos.

6. Denotemos con p_n al n-ésimo número primo (así pues, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7 \ldots$)

a) Demuestre que si $p_{k+1} - p_k = 1$ entonces $k = 1$.

b) Convencerse de que lo anterior implica que si $k > 1$ entonces $p_{k+1} - p_k \geq 2$.

c) Demuestre que si $k \geq 3$ entonces $p_{k+2} - p_k \geq 6$.

7. Denotemos con p_n al n-ésimo número primo. Demuestre que $p_n > 36$ para todo número entero $n \geq 12$.

— **Reducción al absurdo**

8. Hay mil cofres cerrados dispuestos uno al lado del otro en cierto rincón de Bikini Bottom. Se sabe que el tesoro del pirata Kidd se encuentra en exactamente uno de esos cofres. Si en cada uno de los cofres está grabada la siguiente leyenda "El tesoro se encuentra en uno los cofres adyacentes a mí" y, además, sólo una de tales inscripciones es verídica, ¿cómo le haría usted para determinar el cofre en el que se halla el tesoro del pirata Kidd si se le permitiera destapar a lo más dos de los mil cofres?

9. Demuestre que si n es un número entero entonces $4 \nmid n^2 + 2$.

10. Sean a, b y c tres números impares. Demuestre que no existen enteros u y v tales que

$$a\left(\frac{u}{v}\right)^2 + b\left(\frac{u}{v}\right) + c = 0.$$

TEORÍA DE NÚMEROS PARA LA OLIMPIADA ESTATAL

Gro., México; a 16 de agosto de 2020.