PROBLEMAS DE PRÁCTICA

(Semana 4)

1. Si $11n$ deja resto 6 cuando se divide entre 7, ¿qué resto deja $5n$ cuando se le divide entre 7?

2. Sean P y Q números enteros mayores o iguales a 0. ¿Puede ser $2^{2^P} + 2^{2^Q}$ igual a un cuadrado perfecto?

3. Demuestre que si un número primo p puede escribirse en la forma

$$p = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2,$$

donde p_1, p_2, p_3 son números primos y $p_1 < p_2 < p_3$, entonces $p_1 = 3$.

4. Demuestre que si p es un número primo impar entonces $p = 4m + 1$ para algún número entero m ó $p = 4m + 3$ para algún número entero m.

5. Demuestre que si p es un número primo de la forma $4m + 3$ entonces **no** es posible hallar números enteros x, y tales que $p = x^2 + y^2$.

6. Denotemos con p_n al n-ésimo número primo (por ejemplo, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, etc.). Demuestre que

$$p_n > 3n$$

para todo número entero $n \geq 12$.

7. Determine todos los pares ordenados (x, y) de números enteros positivos tales que $615 + 2^x = y^2$.

8. ¿Es posible que, al escribir todos los dígitos de alguna potencia de 2, los últimos cuatro que se escriban sean $2, 0, 2, 0$?

9. Considere el número $10^{100} + 1$. ¿De cuántos dígitos consiste ese número? ¿El número es primo o compuesto?

10. Demuestre que cada número de la sucesión

$$49, 4489, 444889, 44448889, 4444488889, \ldots$$

es un cuadrado perfecto.

TEORÍA DE NÚMEROS PARA LA OLIMPIADA ESTATAL

Gro., México; a 9 de agosto de 2020.