PROBLEMAS DE PRÁCTICA

(Semana 3)

1. Encuentre el número capicúa positivo más pequeño que es divisible por 3, 5 y 11.

2. Determine todos los pares ordenados (x, y) de números enteros positivos tales que $x^3 - y^3 = 721$.

3. Sabiendo que x, y son números enteros positivos que satisfacen

$$\begin{aligned} xy + x + y &= 71 \\ x^2y + xy^2 &= 880, \end{aligned}$$

determine el valor de la expresión $x^2 + y^2$.

4.

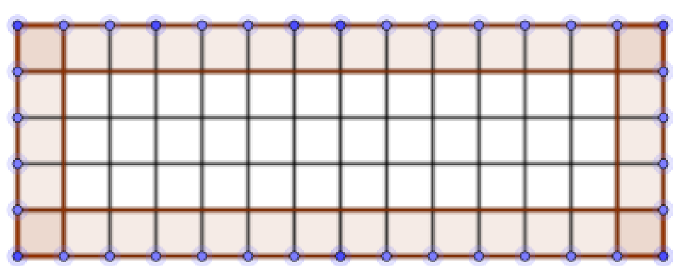
a) Encuentre todos los pares ordenados (x, y) de números enteros positivos tales que $6xy + 3x - y = 11$.

b) Encuentre todos los pares ordenados (x, y) de números enteros positivos tales que $x - y + xy = 20$.

5. Encuentre todos los enteros positivos a y b tales que

$$\frac{a + b^{-1}}{a^{-1} + b} = 13 \qquad \text{y} \qquad a + b \leq 80.$$

6. Se dibuja un rectángulo (el término no excluye al cuadrado) en papel cuadriculado y se sombrean las casillas del contorno. En el ejemplo de abajo, el número de cuadrículas sombreadas es inferior al de las que permanecen en blanco, en el interior. ¿Será posible dibujar un rectángulo de proporciones tales que el borde (de una casilla de anchura) contenga igual número de cuadrados que el rectángulo blanco interior? De ser así, la tarea consiste en hallar todas las posibilidades de hacerlo.



7. En una encuesta, a una mujer le preguntaron cuántos hijas tenía y la edad de cada una de ellas. Ella dijo:

"Tengo 3 hijas, sus edades son números enteros y el producto de sus edades es 36."

El encuestador le dijo que esa información no era suficiente para determinar la edad de cada una de las hijas. Ella replicó:

"Le diría la suma de sus edades, pero se quedaría en las mismas."

El encuestador insistió en que le diera al menos otro dato para determinar las edades; a esa petición la madre respondió:

"Está bien: a la mayor de mis hijas le encanta el helado de vainilla".

¿Cuáles son las edades de las 3 hijas?

8. Denotemos con p_n al n-ésimo número primo. Demuestre que ninguno de los números $p_1 p_2 \cdots p_n + 1$ es un cuadrado perfecto.

9. Demuestre que $n^{42} - 27$ es un número compuesto para cada número entero $n \geq 2$.

10. Demuestre que $n^4 - 20n^2 + 4$ es un número compuesto para todo número entero n.

TEORÍA DE NÚMEROS PARA LA OLIMPIADA ESTATAL

Gro., México; a 4 de agosto de 2020.