Tlamati Sabiduría

Sobre un método para encontrar los polinomios de Darboux de un sistema dinámico

Andrés Piedra
Giovanni Wences*
José Hernández-Santiago

Escuela Superior de Matemáticas No 2, Universidad Autónoma de Guerrero. Avenida Las Delicias s/n, Col. Nuevo Horizonte, 40660, Ciudad Altamirano, Guerrero, México

**Autor de correspondencia:*
giovanniwences@uagro.mx

Resumen

En este artículo se explica detalladamente un método para encontrar los polinomios de Darboux. Esta metodología se ejemplifica con el campo vectorial asociado al modelo de Lorenz. El uso de polinomios homogéneos con cierto peso y el método de las curvas características para resolver ecuaciones diferenciales parciales lineales es la herramienta crucial para encontrar estos polinomios.

Palabras clave: Sistema de Lorenz, Polinomio de Darboux, Método de las curvas características

Como citar el artículo:

Piedra, A., Wences, G., Hernández-Santiago, J. (2022). Sobre un método para encontrar los polinomios de Darboux de un sistema dinámico. *Tlamati Sabiduría*, 14, 11-15.

Editor Asociado: Dr. José María Sigarreta-Almira

Recibido: 06 agosto 2022; Recibido en la versión corregida: 05 septiembre 2022; Publicado: 17 octubre 2022

Abstract

This article explains in detail a method to find the Darboux polynomials. This methodology is exemplified by the vector field associated with the Lorenz model. Weighted homogeneous polynomials and the method of characteristic curves to solve linear partial differential equations are crucial for finding these polynomials.

Keywords: Lorenz system, Darboux polynomial, Method of characteristic curves

Introducción

Uno de los modelos clásicos dentro de la teoría de sistemas dinámicos es el llamado sistema polinomial diferencial de Lorenz:

$$
\begin{aligned}
x' &= s(y-x) \\
y' &= rx - y - xz \qquad (1) \\
z' &= -bz + xy
\end{aligned}
$$

donde x, y, z, son variables reales, mientras que s, r y b son parámetros reales. Este sistema ha sido ampliamente estudiado desde el punto de vista dinámico (Sparrow, 1982) y desde el punto de vista de integrabilidad algebraica. Para el segundo enfoque se han usado varias teorías de integrabilidad para estudiar este problema. Algunos de los trabajos clásicos se pueden consultar en Steeb (1982), Schwartz (1985), Strelcyn y Wojciechowski (1988), Giacomini *et al.* (1991), Cairó y Hua (1993), Gupta (1993), Goriely (1996), por citar algunos.

Darboux desarrolló los así llamados *polinomios de Darboux* para encontrar las primeras integrales de un sistema diferencial polinomial (Darboux, 1878). Él mostró que, si se tienen suficientes polinomios, entonces la derivación polinomial tiene una primera integral racional, la cual puede ser expresada por medio de estos polinomios. Aquí nace la conexión entre la geometría algebraica y la teoría de Darboux de integrabilidad. El propósito de este artículo es despertar el interés en esta línea de investigación. La importancia de los polinomios de Darboux es crucial para el análisis de los sistemas dinámicos, tal como la exploración e identificación de propiedades geométricas, como centros, problemás de bifurcación, linealización, entre otros. En un sistema bidimensional, conociendo las primeras integrales de un sistema dinámico es posible determinar su retrato fase. Por ello, la motivación principal de este trabajo es calcular los polinomios de Darboux del bien conocido Modelo Caótico de Lorenz.

En la literatura se han usado diferentes estrategias para calcular las primeras integrales de una derivación polinomial (e.g. Labrunie, 1996; Moulin-Ollagnier, 1997). Sin embargo, la mayoría los trabajos acerca de estos temas de investigación están basados en los polinomios de Darboux. Para más resultados o aplicaciones de los polinomios de Darboux, se puede consultar Goriely (2001), Dumortier *et al.* (2006), Ferragut *et al.* (2019), Duarte y Da Mota (2021), Pranevich *et al.* (2022). En Goriely (2001) y Chavarriga y Grau (2003), el lector puede encontrar algunas cuestiones abiertas y algunas relaciones entre el cálculo de polinomios de Darboux y el problema 16 de Hilbert.

Método

Denotemos por

$$
\frac{d}{dt} = P_1(x,y,z)\frac{\partial}{\partial x} + P_2(x,y,z)\ \frac{\partial}{\partial y}
+P_3(x,y,z)\frac{\partial}{\partial z}
$$

al campo vectorial polinomial asociado al sistema de Lorenz, donde $P_1(x,y,z) = s(y-x)$, $P_2(x,y,z) = rx - y - xz$, y $P_3(x,y,z) = -bz + xy$.

La expresión $\frac{d}{dt}$ también es llamada *Derivación Polinomial*. Un polinomio real $f(x,y,z)$ se llama *polinomio de Darboux* del sistema polinomial diferencial de Lorenz si

$$
\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}P_1 + \frac{\partial f}{\partial y}P_2 + \frac{\partial f}{\partial z}P_3 = kf,
$$

donde $k(x,y,z)$ es un polinomio real, llamado *cofactor* de f. La forma general de k es

$k(x,y,z)=k_1x+k_2y+k_3z+c$,
donde c es una constante, es decir, este polinomio siempre resulta ser de grado menor o igual que 1. Si $f(x,y,z)$ es un polinomio de Darboux de (1), entonces el conjunto algebraico $V(f)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \ f(x,y,z)=0\}$, es llamado *superficie algebraica* asociada al sistema. Esta superficie es *invariante* bajo el flujo del sistema, es decir, cualquier órbita con punto inicial en $V(f)$ siempre permanecerá en $V(f)$.

Llibre y Zhang (2002) obtienen la clasificación de los polinomios irreducibles de Darboux de las primeras integrales racionales y de la integrabilidad algebraica para el sistema de Lorenz. El método que utilizan será el que se abordará a lo largo de este artículo de manera detallada.

El método consta de cuatro pasos:

Paso 1: Se considera adecuadamente un cambio de variable en el sistema (1).

$$x=\alpha^{-1}X,\ y=\alpha^{-2}Y,\ z=\alpha^{-2}Z,\ t=\alpha T \quad (2)$$

Llamemos a (1,2,2) al peso de las variables x,y,z; estas coordenadas son los exponentes positivos de α. Mediante este cambio de variable, el sistema de Lorenz se convierte en el nuevo sistema:

$$\begin{aligned}X'&=s(Y-\alpha X)\\ Y'&=-XZ-\alpha Y+r\alpha^2X \qquad (3)\\ Z'&=XY-b\alpha Z.\end{aligned}$$

En efecto, como $x'=\frac{dx}{dt}$, entonces el cambio de variable (2) implica que $x'=\alpha^{-2}\frac{dX}{dT}$. Así que $X'=s(Y-\alpha X)$. Análogamente, $y'=\alpha^{-3}\frac{dY}{dT}$ y $z'=\alpha^{-3}\frac{dZ}{dT}$ implican que $Y'=-XZ-\alpha Y+r\alpha^2X$ y $Z'=XY-b\alpha Z$, respectivamente.

Luego, denotamos por

$$\frac{d}{dT}=\frac{\partial}{\partial X}\frac{dX}{dT}+\frac{\partial}{\partial Y}\frac{dY}{dT}+\frac{\partial}{\partial Z}\frac{dZ}{dT}$$

al flujo asociado al sistema (3).

Paso 2: Se supone que $f(x,y,z)$ es un polinomio de Darboux para el sistema de Lorenz, con cofactor $k(x,y,z)$.

Usando el cambio de variable (2), se pueden deducir los polinomios $F(X,Y,Z)=\alpha^l f(\alpha^{-1}X,\alpha^{-2}Y,\alpha^{-2}Z)$ y $K(X,Y,Z)=\alpha^2k(\alpha^{-1}X,\alpha^{-2}Y,\alpha^{-2}Z)$, donde l y 2 son los grados peso más altos en las componentes homogéneas peso de f y k, en las variables x,y,z, con peso (1,2,2), respectivamente.

Nótese que se puede verificar que el polinomio $F(X,Y,Z)$ es un polinomio de Darboux del sistema (3), con cofactor $\alpha^{-1}K(X,Y,Z)$. Esto es

$$\frac{dF}{dT}=\frac{\partial F}{\partial X}\frac{dX}{dT}+\frac{\partial F}{\partial Y}\frac{dY}{dT}+\frac{\partial F}{\partial Z}\frac{dZ}{dT}=\alpha^{-1}KF$$

Ahora supongamos que

$$F=F_0+\alpha F_1+\alpha^2F_2+\cdots+\alpha^mF_m,$$

donde F_i es un polinomio homogéneo peso en X,Y,Z con el grado peso $l-i$, para $i=0,1,\cdots,m$ y $l\geq m$. Con esto, escribimos

$$s(Y-\alpha X)\sum_{i=0}^m\alpha^i\frac{\partial F_i}{\partial X}+(-XZ-\alpha Y+r\alpha^2X)\sum_{i=0}^m\alpha^i\frac{\partial F_i}{\partial Y}+(XY-b\alpha Z)\sum_{i=0}^m\alpha^i\frac{\partial F_i}{\partial Z}=(k_1X+k_2\alpha^{-1}Y+k_3\alpha^{-1}Z+c\alpha)\sum_{i=0}^m\alpha^iF_i$$

Cuando igualamos los términos con α^i para $i=0,1,\cdots,m+2$, obtenemos

$$\begin{aligned}&L[F_0]=k_1XF_0,\\ &L[F_1]=k_1XF_1+cF_0+sX\frac{\partial F_0}{\partial X}+Y\frac{\partial F_0}{\partial Y}+bZ\frac{\partial F_0}{\partial Z},\ldots \qquad (4)\\ &L[F_j]=k_1XF_j+cF_{j-1}+sX\frac{\partial F_{j-1}}{\partial X}+Y\frac{\partial F_{j-1}}{\partial Y}+bZ\frac{\partial F_{j-1}}{\partial Z}-rX\frac{\partial F_{j-2}}{\partial Y}\end{aligned}$$

para $j=2,3,\ldots,m+2$, donde $F_j=0$ para $j>m$ y L es el operador diferencial parcial de la forma

$$L=sY\frac{\partial}{\partial X}-XZ\frac{\partial}{\partial Y}+XY\frac{\partial}{\partial Z}.$$

Al igualar los términos con α^{-1}, resulta que $k_2 = k_3 = 0$.

Paso 3: Se resuelven las ecuaciones diferenciales parciales de (4).

La herramienta principal de solución es el método de curvas características para resolver ecuaciones diferenciales parciales lineales. Una exposición clara de este método puede verse en Bleecker y Csordas (1992).

Como resultado de solucionar las ecuaciones diferenciales parciales en (4), se obtienen polinomios homogéneos F_i, con cierto peso, y las condiciones de los coeficientes del sistema.

Paso 4: De la restricción $f(x) = F(x)|_{\alpha=1} = \sum_{i=1}^{p} F_i$, *se obtienen todos los polinomios de Darboux para el sistema de Lorenz* (1).

La lista es la siguiente:

1.- $f_1(x,y,z) = x^2 - 2sz$

2.- $f_2(x,y,z) = x^4 - \frac{4}{3}x^2z - \frac{4}{9}y^2 - \frac{8}{9}xy + \frac{4}{3}rx^2$

3.- $f_3(x,y,z) = y^2 + z^2$

4.- $f_4(x,y,z) = x^4 - x^2z - 4y^2 + 8xy - 4rx^2 - 16(1-r)z$

5.- $f_5(x,y,z) = y^2 + z^2 - rx^2$

6.-$f_6(x,y,z) = x^4 - 4sx^2z - 4s^2y^2 + 4s(4s-2)xy - (4s-2)^2x^2$

7.- $f_7(x,y,z) = y^2 + z^2 - 2bz$

Importancia de calcular los polinomios de Darboux para el sistema de Lorenz

Con base en los polinomios de Darboux se construyen familias de superficies transversales al flujo del sistema de Lorenz. Desde el punto de vista caótico, cada una de las familias separa el espacio fase $\mathbb{R}^3$ y, por tanto, puede usarse para describir la ubicación del atractor global del flujo (Giacomini y Neukirch, 1997).

Los polinomios de Darboux también proporcionan la clasificación de todas las superficies algebraicas invariantes, de las primeras integrales racionales y de la integrabilidad algebraica para el sistema de Lorenz. Prelle y Singer (1983) usaron todos los polinomios de Darboux de una derivación polinomial, para calcular una primera integral en una estructura especial de un sistema diferencial polinomial.

Los polinomios de Darboux son también usados en el estudio cualitativo de los sistemas diferenciales polinomiales (e.g. Giacomini *et al.*, 1991) así como en problemas físicos (e.g. Hewitt, 1991; Giacomini *et al.*, 1996; Valls, 2005; Llibre y Valls, 2008).

Cuando en el sistema de Lorenz se usa el cambio peso de las variables x, y, z hay dos características importantes que resaltar. Primero, la solución general de las ecuaciones características para $[F_i] = G_i + H_i$ es fácil de obtener, ya que el proceso de reducción de la ecuación diferencial parcial lineal a las ecuaciones diferenciales ordinarias, resulta simple. Segundo, el cálculo para resolver los polinomios F_i se vuelve más fácil.

Conclusiones

La contribución de este artículo es la descripción detallada, explícita y ejemplificada de un método para calcular los polinomios de Darboux, que, si bien es conocido, en los trabajos existentes en los cuales se aplica no se expone con mayor descripción.

A pesar de que el método presentado en este artículo requiere de una serie de cálculos extensos para encontrar los polinomios de Darboux, es general y puede ser aplicado a otros sistemas diferenciales polinomiales.

Referencias

Bleecker, D., Csordas, G. (1992). Basic Partial Differential Equations. Ed. Van Nostrand Reinhold, New York. ISBN 0-412-06761-7.

Cairó, L., Hua, D. (1993). Comments on integrals of motion for the Lorenz system, Journal of Mathermatical Physics, 34, 4370-4371.

Chavarriga, J., Grau, M. (2003). Some open problems related to 16b Hilbert problem. Scientia Series A: Mathematical Sciences, 9, 1-26.

Darboux, G. (1878) Mémoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré. Bulletin des Sciences

Mathématiques et Astronomicques, Série 2, 1, 60-96.
Duarte, L.G.S., Da Mota, L.A.C.S. (2021). An efficient method for computing Liouvillian first integralsof planar polynomial vector fields. Journal of Differential Equations, 300, 356-385.
Dumortier, F., Llibre, J., Artés, J.C. (2006). Qualitative theory of planar differential systems. Universitext. Springer-Verlag, Berlin. ISBN 3-540-32893-9.
Ferragut, A., Galindo, C., Monserrat, F. (2019). On the computation of Darboux first integrals of a class of planar polynomial vector fields, J. Math. Anal. Appl. 478, 743-763
Giacomini, H., Llibre, J., Viano, M. (1996). On the nonexistence, existence and uniqueness of limit cycles. Nonlinearity, 9, 501-516.
Giacomini, H.J., Neukirch, S. (1997). Integrals of motion and the shape of the attractor for the Lorenz model, Physics Letters A, 227, 309-318.
Giacomini, H.J., Repetto, C.E., Zandron, O.P. (1991). Integrals of motion for three-dimensional non-Hamiltonian dynamical systems, Journal of Physics A, 24, 4567-4574.
Gine, J. (2007). On some open problems in planar differential systems and Hilbert's 16th problem. Chaos Solitons Fractals, 31, 1118-1134.
Goriely, A. (1996). Integrability, partial integrability, and nonintegrability for systems of ordinary differential equations. Journal of Mathematical Physics, 37, 1871-1893.
Goriely, A. (2001). Integrability and nonintegrability of dynamical systems. Advanced Series in Nonlinear Dynamics. 19. World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ. ISBN: 978-981-02-3533-8.
Gupta (1993). Integrals of motion for the Lorenz systems. Journal of Mathematical Physics, 34, 801-804.
Hewitt, C.G. (1991). Algebraic invariant curves in cosmological dynamical systems and exact solutions. General Relativity and Gravitation, 23, 1363-1383.
Labrunie, S. (1996). On the polynomial first integrals of the (a,b,c) Lotka–Volterra system. Journal of Mathematical Physics, 37, 5539-5550.
Llibre, J., Zhang, X. (2002). Invariant algebraic surfaces of the Lorenz system. Journal of Mathematical Physics, 43, 1622.
Llibre J., Valls C. (2008) Darboux integrability and algebraic invariant surfaces for the Rikitake system. Journal of Mathematical Physics, 49, 032702.
Moulin-Ollagnier, J. (1997). Polynomial first integrals of the Lotka–Volterra system. Bulletin des Sciences Mathematiques, 121, 463-476.
Pranevich, A., Grin, A., Musafirov, E. (2022). Darboux polynomials and first integrals of polynomial Hamiltonian systems. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 109.
Prelle, M.J., Singer, M.F. (1983) Elementary first integrals of differential equations. Transactions of the American Mathematical Society, 279, 215-229.
Schwarz, F. (1985). An algorithm for determining polynomial first integrals of autonomous systems of ordinary differential equations. Journal of Symbolic Computation, 1, 229-233.
Sparrow, C. (1982). The Lorenz Equations. Applied Mathematical Sciences, 141. Springer, New York. ISBN: 978-1-4612-5767-7
Steeb, W.H. (1982). Continuous symmetries of the Lorenz model and the Rikitake two-disc dynamo system. Journal of Physics, A, 15.
Strelcyn, J.M., Wojciechowski, S. (1988). A method of finding integrals for three-dimensional systems. Physics Letters A, 133, 207-212.
Valls, C. (2005). Rikitake system: analytical and Darbouxian integrals Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics, 135, 1309-1326.