



CENTRO DE CIENCIAS
MATEMÁTICAS



Memorias
MATEMÁTICAS
del PCCM



Prefacio

Las *Lecciones Matemáticas del PCCM 2017* es una serie de minicursos impartidos por profesores y alumnos del Posgrado Conjunto de Ciencias Matemáticas UNAM-UMSNH. La idea fundamental fue que cada curso estuviera preparado de manera panorámica y accesible para todo público con conocimientos básicos en matemáticas. Los temas que se presentan en las Lecciones Matemáticas son de distintas áreas, a manera de mostrar y contemplar la diversidad de opciones que ofrece el Posgrado Conjunto. Por mencionar algunas están: Teoría de Números, Topología General, Teoría de Conjuntos, Ecuaciones Diferenciales, Geometría Algebraica, Topología Algebraica, Geometría Diferencial, Análisis Funcional, etc.

Este evento tiene como objetivo situar un punto de reunión para compartir conocimientos entre expositor y asistente. Debido a la diversidad del público que estudia en nuestro Posgrado Conjunto, cada expositor imparte un minicurso cuya intención es proveer un panorama general sobre un tema de su preferencia. Este ejercicio es sustancioso tanto para el expositor como para el asistente; por un lado el conferencista transmite su forma de comprender las matemáticas, y por otra parte, el asistente desarrolla nuevas ideas y críticas sobre un tema posiblemente nuevo. El ambiente que se crea con la acción *pregunta-respuesta* son de las actividades por excelencia para construir conocimiento.

Así es como el presente documento, las *Memorias Matemáticas*, son la recopilación de las notas en las que se basó cada expositor para dar su curso. Te invitamos, estimado lector, a que te sumerjas en estas memorias plasmadas en papel, contruyas tu propia crítica acerca del tema de tu preferencia y le hagas saber tu opinión al expositor.

Agradecimientos

Preparar un minicurso para un público tan general requiere de mucha preparación y experiencia. Las *Lecciones Matemáticas* no fue una tarea fácil para los expositores, y por ello, en primera instancia, queremos agradecerles su apoyo en esta iniciativa. También, debemos mucho a las personas que gracias a su apoyo fue posible desarrollar esta actividad. En especial, al director del CCM, Dr. Daniel Juan Pineda por permitirnos usar las instalaciones así como el apoyo con los deliciosos bocadillos, a los encargados de la unidad de computo Miguel A. Magaña Lemus y L. Gerardo Tejero Gómez por el soporte técnico proporcionado en todo momento, y finalmente a Coppelia Cerda Farías por la emisión de carteles y el maravilloso diseño de la portada.

Organizadores:
Héctor Alonzo Barriga Acosta
Israel Morales Jiménez

Contents

Peces y una Flotilla Pesquera, un Análisis de Bifurcación <i>Víctor F. Breña Medina</i>	1
Vectores Quasi-analíticos y Operadores Autoadjuntos <i>Fredy Díaz García</i>	10
Singularidades Cónicas en Superficies Planas <i>Juan Ahtziri González Lemus</i>	15
Un Teorema de Trascendencia en Números <i>José Hernández Santiago</i>	19
El Grupo de Difeomorfismos del Espacio Afín \mathbb{R}^n o \mathbb{C}^n <i>Jesús Muciño Raymundo</i>	23
El Uso del Axioma de Martin en Pruebas de Independencia <i>Sonia Navarro Flores</i>	28
Sobre el Espacio Moduli de Haces Vectoriales <i>Hugo Torres López</i>	32
Introducción a la Teoría de Campos de Norma <i>Elmar Wagner</i>	39

Peces y una Flotilla Pesquera, un Análisis de Bifurcación

Dr. Víctor F. Breña Medina

Profesor-Investigador del Centro en Ciencias Matemáticas, UNAM-Morelia

RESUMEN. Por medio de un modelo simplificado, en estas notas se explora uno de los impactos ecológicos que tiene una flotilla pesquera en una población de peces. El modelo consiste en una ecuación diferencial parcial no lineal de tipo parabólico, donde el ingrediente clave que se toma en cuenta está relacionado con la cantidad limitada de alimento que tiene una población de peces. El análisis que se presenta consiste en el uso de la teoría del análisis asintótico y la teoría de bifurcación. Se presentan también algunos resultados numéricos.

Palabras clave: Ecuaciones de reacción-difusión, Análisis de bifurcación, Análisis asintótico.

1. Introducción

El tipo de problemas matemáticos que a menudo son piezas clave para el entendimiento de ciertos fenómenos suelen ser de naturaleza no lineal. Algunas de las características dinámicas que se manifiestan en estos fenómenos pueden ser representadas por medio de variables continuas y/o discretas. Asimismo, las características de estos fenómenos son comúnmente formuladas en términos de relaciones de correspondencia. De este modo, estos fenómenos son susceptibles de entenderse utilizando la *teoría de los sistemas dinámicos*. Desde este punto de vista, los ingredientes clave del tipo de análisis que se aborda en estas notas son: (i) las *variables de estado*, las cuales representan determinadas propiedades de un fenómeno; estas variables están relacionadas por medio de ciertas (ii) *relaciones de correspondencia* y un *operador de evolución*; finalmente, (iii) un *conjunto de parámetros* caracterizan al fenómeno en estudio. Estos son las componentes esenciales de un sistema dinámico.

El enfoque que abordaremos aquí consistirá del uso de variables de estado continuas. De esta forma, echaremos mano de la *teoría de las ecuaciones diferenciales* (ordinarias y parciales). Un ejemplo de esto son las *ecuaciones de movimiento* que describen la trayectoria de una partícula bajo la influencia de un campo de fuerzas. Estas ecuaciones con consecuencia directa de las *Leyes de Newton* y pueden escribirse en la for-

ma

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{u}; \boldsymbol{\mu}), \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^m, \quad (1)$$

donde $\mathbf{u}^T \equiv (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ es la variable de estado. Esta variable se define por la posición generalizada \mathbf{q} y el momentum generalizado \mathbf{p} . Por otro lado, $\boldsymbol{\mu}$ es el vector de parámetros asociado a este fenómeno físico; por ejemplo, la masa de la partícula, la magnitud del campo electromagnético, coeficientes de fricción y viscosidad, entre otros. Nótese que los elementos que dan pie al sistema (1) definen un *sistema dinámico*; en otras palabras, este sistema está comprendido por: (i) una variable de estado \mathbf{u} , (ii) un operador de evolución d/dt , (iii) una relación de correspondencia \mathbf{f} y (iv) un vector de parámetros $\boldsymbol{\mu}$.

El enfoque que seguiremos en estas lecciones consistirá en considerar el problema que aquí se analiza como un sistema dinámico. En lugar de la función \mathbf{f} , trabajaremos con un funcional \mathcal{F} cuyo dominio es un espacio de Banach \mathcal{B} . De este modo, el problema a resolver tomará la forma siguiente:

$$\mathbf{u}_t = \mathcal{F}(\mathbf{u}; \boldsymbol{\mu}), \quad \mathbf{u} \in \mathcal{B}, \quad \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^m, \quad (2)$$

donde \mathbf{u}_t denota el operador de evolución de la variable de estado respecto a la variable independiente. En estas lecciones nos referiremos a t como la variable independiente que representa el tiempo. En este sentido, \mathbf{u}_t es la razón de cambio instantáneo de \mathbf{u} respecto al tiempo.

Ahora, debido a que los fenómenos en biología, química, física e ingeniería son no lineales, en general \mathcal{F} es un funcional con esta misma propiedad. De este manera, los objetos matemáticos que dan lugar a un modelo matemático—e.g. funciones e integrales—generalmente no pueden ser evaluados exactamente. Con el fin de llevar a cabo un estudio profundo, es necesario conocer algunos comportamientos aproximados de estas evaluaciones. Para ello, el *análisis asintótico* es una poderosa teoría que es esencial para el entendimiento de problemas no lineales. Por ejemplo, la *fórmula de Stirling* para la función factorial está dada por

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} n^{n+1/2} e^{-n}, \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty; \quad (3)$$

véase, por ejemplo, [1] para los detalles de la deducción de (3) por medio del análisis asintótico. La intención de estas lecciones es dar respuesta a interrogantes desde el punto de vista de la teoría de bifurcación en un ejemplo sencillo. Primero se exponen algunas nociones básicas del análisis asintótico, en seguida se construye el modelo en cuestión y procederemos al análisis; se muestran algunas simulaciones numéricas. En la última sección, se presentan algunos comentarios finales.

1.1. Algunos conceptos básicos

Con el fin de comenzar el análisis del problema que en la siguiente sub-sección se expone, repasemos de manera informal algunos conceptos básicos.

Variando parámetros

Primero, notemos que el sistema (2) tiene la característica que todos los valores de la variable de estado \mathbf{u}_* tales que no cambian respecto al tiempo, satisfacen la ecuación $\mathcal{F}(\mathbf{u}_*; \mu) = 0$. Estos valores son conocidos como *soluciones de equilibrio*. Por el otro lado, debido al *Teorema de la Función Implícita* (TFImp), estas soluciones de equilibrio dependen de los parámetros. Esto quiere decir que para cada valor de los parámetros, se tiene un valor de la solución de equilibrio, i.e. $\mathbf{u}_* = \mathbf{u}_*(\mu)$. Hacemos énfasis en el hecho que la existencia de esta última relación depende de las condiciones necesarias y suficientes del TFImp.

El conjunto de soluciones del sistema dinámico (2), ya sean de equilibrio o no, cambian al variar uno o más parámetros. Es decir, al variar los parámetros, las soluciones cambian de tal manera que: (i) son topológicamente equivalentes al conjunto de soluciones originales (previamente a la variación de los parámetros) o (ii) su

topología cambia. Cuando lo segundo ocurre, diremos que una *bifurcación* es un cambio topológico de las soluciones de equilibrio cuando sus parámetros cruzan un *valor crítico de bifurcación*.

Arquetipos de bifurcaciones pueden encontrarse en la naturaleza. Por ejemplo, la velocidad de caída de un paracaidista cambia respecto al área de contacto del paracaídas. Es decir, la velocidad de caída sufre un cambio drástico en el momento en que el paracaídas se abre. Para un estudio detallado de una amplia diversidad de tipos de bifurcaciones, véase [2].

Aproximaciones con encanto

Ahora, el símbolo \sim utilizado en (3), indica cuando dos funciones son asintóticamente equivalentes; dicho de otra forma, la función $n!$ y la función $\sqrt{2\pi n} n^{n+1/2} e^{-n}$ son aproximadamente equivalentes cuando $n \gg 1$. Los símbolos \ll y \gg son utilizados para indicar valores asintóticamente por debajo o por arriba, respectivamente, del valor que se está comparando.

En el sentido expuesto en el párrafo anterior, una de las nociones más básicas y relevantes en la teoría del análisis asintótico es la *notación de orden*. Esta notación tiene dos caras, las cuales son:

1. $f(z) = \mathcal{O}(g(z))$. Una función $f(z)$ se dice que es de orden \mathcal{O} -grande de $g(z)$ cuando $z \rightarrow z_0$, si $\exists K, \delta > 0$ tales que $|f| \leq K|g|$ cuando $|z_0| < |z| < \delta$, para algunas constantes K y δ . Alternativamente, se puede verificar que esta condición es equivalente al límite

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = L,$$

donde L es finito y distinto de cero.

2. $f(z) = o(g(z))$. Una función $f(z)$ se dice que es de orden o -chica de $g(z)$ cuando $z \rightarrow z_0$, si $\forall K > 0, \exists \delta > 0$ tal que $|f| \leq K|g|$ cuando $|z_0| < |z| < \delta$. Equivalentemente, se puede verificar que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = 0.$$

De este modo, el orden \mathcal{O} indica que una función está acotada o es igual a otra función, mientras que el orden o indica que la cota es estricta. Como consecuencia, si $f(z) = o(g(z))$, entonces $f(z) = \mathcal{O}(g(z))$.

A continuación definiremos tres conceptos principales:

1. Dos funciones f y g son *asintóticamente equivalentes* si

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = 1;$$

esta comparación se denota como $f(z) \sim g(z)$ cuando $z \rightarrow z_0$.

2. Una sucesión $\{\varphi_n(z)\}_{n \in \mathbb{N}}$ se dice que es una *sucesión asintótica* si $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\varphi_{n+1}(z) = o(\varphi_n(z)), \quad \text{cuando } z \rightarrow z_0.$$

3. Para una sucesión asintótica $\varphi_n(z)$ cuando $z \rightarrow z_0$, la serie $\sum_{n=1}^N a_n \varphi_n(z)$ es una *expansión asintótica* de $f(z)$, si $\forall N \in \mathbb{N}$,

$$f(z) = \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n(z) + o(\varphi_N(z)), \quad \text{cuando } z \rightarrow z_0.$$

Una de las herramientas más útiles para obtener expansiones asintóticas de funciones es el *Teorema de Taylor*. Por ejemplo, la serie de Taylor de la exponencial cuando $z \rightarrow z_0$ está dada por

$$e^z = 1 + (z - z_0) + \frac{(z - z_0)^2}{2!} + \frac{(z - z_0)^3}{3!} + \dots,$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. A partir de la definición dada en el inciso 3, vemos que la expansión anterior es una serie asintótica válida para $z \rightarrow z_0$ debido a que los órdenes de los términos decrecen gradualmente. De esta manera, la expansión asintótica de e^z de orden 3 se denota como

$$e^z = 1 + (z - z_0) + \frac{(z - z_0)^2}{2!} + O((z - z_0)^3).$$

Para mayores detalles sobre los métodos que se utilizarán a continuación, véanse [3, 4, 5]. A continuación veremos un ejemplo para aterrizar estas ideas en el tipo de problemas que interesan en estas lecciones.

1.2. Un problema de calentamiento

En una amplia diversidad de problemas necesitamos construir soluciones a *problemas de valores a la frontera* (PVF) no lineales; estas soluciones se encuentran cercanas a valores críticos de un parámetro. Por ejemplo, consideremos el PVF

$$(P1) \begin{cases} u'' = \lambda f(u), & 0 < x < \pi, \\ u(0) = u(\pi) = 0, & \lambda: \text{parámetro}, \end{cases}$$

¹Se conoce como *rama* al conjunto de puntos que representan las soluciones de equilibrio para cada valor del parámetro de bifurcación.

donde $f(u)$ es una función no lineal tal que $f(0) = 0$, $f'(0) < 0$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) > 0$.

Notemos que $u \equiv 0$ en $0 \leq x \leq \pi$ es una solución para cualquier valor de λ . De este modo, estamos interesados en dar respuesta a las siguientes preguntas:

- ¿Habrán valores especiales de λ tales que una solución no trivial emerja (o bifurque) de la solución trivial $u \equiv 0$?
- En el caso de ser afirmativa la respuesta a la pregunta anterior, ¿cuál es el comportamiento local de la rama¹ que bifurca?
- ¿Qué forma tienen las ramas de bifurcación lejos de los puntos de bifurcación?

Para responder las dos primeras preguntas, supongamos que $u \ll 1$. Debido a esto, tenemos que el problema linealizado es $u_0'' - \lambda f'(0)u_0 = 0$ para $0 \leq x \leq \pi$. La solución a este problema es

$$u_0(x) = A \sin(nx), \quad \text{con } \lambda = -\frac{n^2}{f'(0)} > 0, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4)$$

En la Figura 1.2, se encuentran el *diagrama de bifurcación* linealizado del problema (P1). Un diagrama de bifurcación consiste en la representación de las soluciones de equilibrio que corresponden a cada valor del parámetro de bifurcación. En esta representación, los distintos conjuntos de soluciones de equilibrio que son topológicamente equivalentes son coleccionados en porciones del diagrama conocidos como *ramas*. En la Figura 1.2, la rama trivial y los puntos de bifurcación para cada valor de n están dibujados por una línea sólida gruesa y circunferencias, respectivamente. Las líneas punteadas corresponden a las ramas que contienen a las soluciones no triviales $u_0(x)$ para cada valor de λ .

Ahora, para responder la última pregunta, supongamos un parámetro $\varepsilon \ll 1$ y la expansión asintótica de la forma

$$u = \varepsilon u_0 + \varepsilon^2 u_1 + \varepsilon^3 u_2 + \dots, \quad \lambda = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \varepsilon^2 \lambda_2 + \dots \quad (5)$$

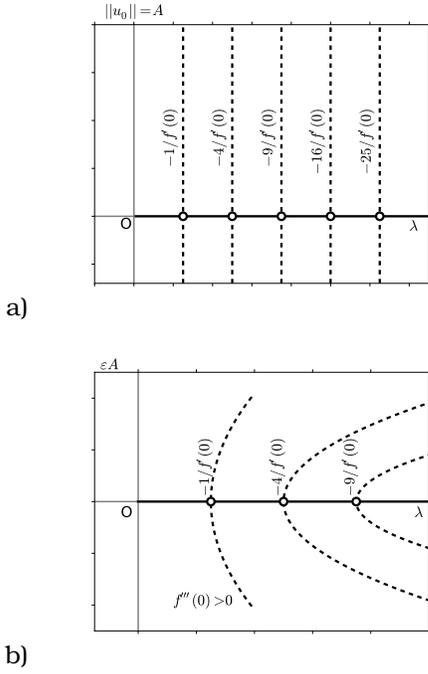


Fig. 1: (a) Diagrama de bifurcación linealizado. (b) Diagrama de bifurcación no lineal a orden $O(\epsilon^3)$. La rama trivial es dibujada por la línea sólida en el eje horizontal, cada bifurcación está indicado por una circunferencia y las líneas punteadas indican ramas de soluciones no triviales.

Al sustituir (5) en (P1), el término derecho está dado por

$$\begin{aligned} \lambda f(u) &= (\lambda_0 + \epsilon \lambda_1 + \epsilon^2 \lambda_2 + \dots) f(\epsilon u_0 + \epsilon^2 u_1 + \epsilon^3 u_2 + \dots), \\ &= (\lambda_0 + \epsilon \lambda_1 + \epsilon^2 \lambda_2 + \dots) \left[(\epsilon u_0 + \epsilon^2 u_1 + \epsilon^3 u_2) f'(0) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\epsilon^3}{6} u_0^3 f'''(0) + \dots \right], \\ &= \epsilon \lambda_0 u_0 f'(0) + \epsilon^2 (\lambda_0 u_1 + \lambda_1 u_0) f'(0) \\ &\quad + \epsilon^3 \left[(\lambda_0 u_2 + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_0) f'(0) + \frac{1}{6} \lambda_0 u_0^3 f'''(0) \right] + \dots; \end{aligned}$$

el término de la izquierda está dado por $u'' = \epsilon u_0'' + \epsilon^2 u_1'' + \epsilon^2 u_2'' + \dots$. Al coleccionar los términos en potencias de ϵ , obtenemos

$$O(1): \mathcal{L}u_0 = u_0'' - \lambda_0 f'(0)u_0 = 0, \quad u_0(0) = u_0(\pi) = 0, \quad (6a)$$

$$O(\epsilon): \mathcal{L}u_1 = u_1'' - \lambda_0 f'(0)u_1 = \lambda_1 f'(0)u_0, \quad u_1(0) = u_1(\pi) = 0, \quad (6b)$$

$$O(\epsilon^2): \mathcal{L}u_2 = u_2'' - \lambda_0 f'(0)u_2 = (\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_0) f'(0) + \frac{1}{6} \lambda_0 u_0^3 f'''(0), \quad u_2(0) = u_2(\pi) = 0, \quad (6c)$$

⋮

El operador \mathcal{L} es conocido como el operador de linealización, el cual es lineal. De esta mane-

ra, primero tenemos que encontrar un elemento del núcleo de \mathcal{L} y, en seguida, encontramos elementos del rango sucesivamente. En otras palabras, resolvemos las ecuaciones para cada término de la expansión asintótica (5).

La solución para la ecuación de $O(1)$ está dada por (4). Entonces, podemos utilizar la *identidad de Lagrange* $\langle u_0, \mathcal{L}u_1 \rangle - \langle \mathcal{L}u_0, u_1 \rangle = u_0 u_1' - u_0' u_1 \Big|_0^\pi$, donde utilizamos el producto usual en L^2 ; véase, por ejemplo, [1].

Dado que se satisface (6a), entonces a partir de la identidad de Lagrange, tenemos que

$$\lambda_1 \langle u_0, u_0 \rangle f'(0) = \langle u_0, \mathcal{L}u_1 \rangle = 0,$$

lo cual implica que $\lambda_1 = 0$.

Utilizando la misma identidad en (6c), obtenemos que $\langle u_0, \mathcal{L}u_2 \rangle = 0$, entonces obtenemos que

$$\lambda_2 \langle u_0, u_0 \rangle f'(0) + \frac{\lambda_0}{6} \langle u_0, u_0^3 \rangle f'''(0) = 0;$$

utilizando el valor de λ_0 y calculando las integrales correspondientes para u_0 , encontramos que

$$\lambda_2 = \frac{n^2 f'''(0)}{8 f'(0)^2} A^2.$$

Por lo tanto, una aproximación asintótica de orden $O(\epsilon^3)$ para el parámetro de bifurcación y la función asociada es

$$\lambda \sim \lambda_0 + \frac{n^2 f'''(0)}{8 f'(0)^2} (\epsilon A)^2, \quad u \sim \epsilon A \sin(nx). \quad (7)$$

donde λ_0 está dada por (4). De esta manera, obtenemos la Figura 1.2; si $f'''(0) < 0$, las parábolas cambian de concavidad, como puede verse a partir de la aproximación asintótica para λ en (7).

Ejercicio. Se tiene una columna de algún material y longitud R . En sus extremos hay una fuerza P actuando. Haciendo una parametrización respecto a la longitud de arco s y tomando en cuenta que I es el momento de inercia y E es el módulo de Young, el problema de valores a la frontera que satisface el ángulo $\varphi(s)$ respecto a la vertical en cada punto sobre la columna está dado por

$$(P2) \begin{cases} \frac{d^2 \varphi}{ds^2} + \lambda \sin(\varphi) = 0, & 0 < s < R, \\ \varphi(0) = \varphi(R) = 0, & \lambda := \frac{P}{EI}, \end{cases}$$

¿Cuál es el valor crítico de P para el cual la columna se dobla?

2. Peces y una flotilla pesquera

El siguiente problema pretende dar respuesta a la siguiente pregunta: una flotilla pesquera se encuentra a una distancia H de la playa y, entre la región donde está la flotilla y la orilla del mar, hay una población de peces cuyo alimento es limitado. ¿Cuál es la distancia H óptima para pescar sin que la población de peces se extinga?

Este es un problema que puede formularse desde el punto de vista de la teoría de bifurcación. En este sentido, las preguntas que estamos interesados en responder son las siguientes:

- ¿Existe una solución de equilibrio no trivial? ¿Es esta solución estable? ¿Cuál es el valor de H para que la solución de equilibrio trivial no es la única solución estable?
- ¿Cuál es el diagrama de bifurcación y la estabilidad de las distintas ramas de soluciones de equilibrio?

Consideremos que la densidad de peces es suficientemente grande y que la orilla del mar es plana. Debido a estas suposiciones, sea $X \in [0, H]$ y $u(T, X)$ la densidad de peces al tiempo T en la posición X . Supongamos, además, que cada pez se mueve de manera aleatoria, esto permite suponer que la densidad de peces sigue un proceso de difusión; esta es una consecuencia de la versión más simple de la ecuación Fokker-Planck; véase, por ejemplo, [6]. Por el otro lado, el alimento de los peces es limitado y que cada individuo no puede escapar del cerco formado por la flotilla. De esta manera, la densidad máxima de peces que la región $[0, H]$ puede contener está dada por el parámetro u_m y se cumple que $u_X(T, 0) = u_X(T, H) = 0$. Con estos ingredientes, tenemos el siguiente problema de Cauchy

$$(P3) \begin{cases} u_T = v^2 u_{XX} + \gamma g(u), & 0 < X < H, \quad T > 0, \\ u_X(0) = u_X(H) = 0, & \gamma > 0, \end{cases}$$

donde v^2 es el coeficiente de difusión y γ es un parámetro relacionado con el crecimiento intrínseco de la densidad de población. La función $g(u)$ tomará la forma logística, i.e. $g(0) = g(u_m) = 0$, $g'(0) = 1$, entonces

$$g(u) = u \left(1 - \frac{u}{u_m} \right).$$

Re-escalamiento

Sea $x = X/H$, $T = \alpha t$ y $u = u_m w$; esto conduce a la ecuación

$$\frac{1}{\alpha} w_t = \frac{v^2}{H^2} w_{xx} + \gamma w (1 - w).$$

Al tener la igualdad $\alpha = 1/\gamma$, obtenemos el problema

$$(PP) \begin{cases} w_t = D w_{xx} + f(w), & 0 < x < 1, t > 0, f(w) = w(1 - w), \\ w_x(t, 0) = w_x(t, 1) = 0, & w(0, x) = \varphi_0(x), D := \frac{v^2}{H^2 \gamma}. \end{cases}$$

El parámetro D recibe el nombre de *coeficiente de difusión efectiva*. Notemos que: (i) $w = 0$ es solución de equilibrio y (ii) si $v \ll 1$, $H \gg 1$ o $\gamma \gg 1$, entonces $D \ll 1$. Estas dos observaciones indican que a través del parámetro D , encontraremos el valor crítico H_c para el cual la solución de equilibrio trivial no es única. Esta una condición indispensable debido a que la solución $w(t) \equiv 0$ representa la extinción de peces.

Problema de equilibrio

El problema (PP) puede ser considerado como un sistema dinámico, donde el funcional \mathcal{F} es una ecuación diferencial de segundo orden no lineal. Ahora, si tomamos $a = 1/\sqrt{D}$ y buscamos las soluciones de equilibrio, obtenemos el problema

$$(PE) \begin{cases} v_{xx} + a^2 f(v) = 0, & 0 < x < 1 \\ v_x(0) = v_x(1) = 0, & f(v) = v(1 - v) \end{cases}$$

2.1. Análisis de bifurcación

Una vez definido el problema (PE), al linealizar la ecuación para v , se satisface que $v_{0xx} + a^2 v_0 = 0$. Esto conduce a que $v_0(x) = \cos(ax)$, donde $v_0(1) = 0$; por lo tanto, $a = \pi/2$. Esto quiere decir que existe una solución de equilibrio no trivial asintótica. Ahora, construiremos una rama de soluciones por medio de un *análisis débil no lineal*.

Expandimos asintóticamente el parámetro a y la variable de estado v como sigue:

$$a = \frac{\pi}{2} (1 + \varepsilon a_1 + \dots), \quad v = \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \dots, \quad \varepsilon \ll 1.$$

De esta manera, tenemos que

$$\begin{aligned} a^2 f(v) &= \frac{\pi^2}{4} (1 + 2\varepsilon a_1 + \dots) \left[(\varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2) f'(0) + \frac{\varepsilon^2 v_0^2}{2} f''(0) \dots \right] \\ &= \frac{\pi^2}{4} \left[\varepsilon v_0 f'(0) + \varepsilon^2 \left(2a_1 v_0 f'(0) + v_1 f'(0) + \frac{v_0^2}{2} f''(0) \right) + \dots \right]; \end{aligned}$$

entonces, debido a la estructura de f , al coleccionar los coeficientes de las potencias de ε y al definir el operador de linealización $\mathcal{L}\phi :=$

$\phi'' + \pi^2/4\phi$, el problema anterior se puede expresar de manera equivalente a como se obtuvieron los problemas (6). En este caso, a partir de los primeros dos términos, se obtiene que:

$$(PE1) \begin{cases} \mathcal{L}v_0 = 0, & 0 < x < 1, \\ v_{0x}(0) = v_{0x}(1) = 0 \end{cases}$$

$$(PE2) \begin{cases} \mathcal{L}v_1 = -\frac{\pi^2}{4}(2a_1v_0 - v_0^2), & 0 < x < 1, \\ v_{1x}(0) = v_{1x}(1) = 0 \end{cases}$$

La solución al problema (PE1) está dada por $v_0(x) = A \cos(\pi x/2)$. Ahora, utilizando de nueva cuenta la identidad de Lagrange, tenemos que el operador \mathcal{L} es efectivamente autoadjunto y, debido a que $\mathcal{L}v_0 = 0$, entonces encontramos la ecuación

$$A^2 \int_0^1 \cos^3\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = 2a_1A \int_0^1 \cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx,$$

lo cual implica que $a_1 = 4/(3\pi)$. Por lo tanto,

$$\left. \begin{aligned} a &\sim \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{4}{3\pi} \varepsilon A + \dots\right), \\ v &\sim \varepsilon A \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \dots \end{aligned} \right\} \Rightarrow a \sim \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{4}{3\pi} v(0) + \dots\right), \quad (8)$$

cuando $v(0) \ll 1$. Se requiere que $\varepsilon A > 0$ como consecuencia de $v \geq 0$. Entonces, si $\varepsilon A \ll 1$, existe una rama que contiene soluciones no triviales que emerge del punto $a = \pi/2$ con una pendiente de $2/3$.

Queremos ahora construir las soluciones de equilibrio para amplitudes grandes. Al multiplicar por v_x la ecuación en el problema (PE), obtenemos que

$$\frac{1}{2}v_x^2 + \frac{a^2}{2}F(v) = C, \quad \text{donde } F(v) = 2 \int_0^v f(\xi) d\xi, \quad (9)$$

donde C es una constante. Ahora, si etiquetamos $v^0 = v(0)$ y buscamos que v sea decreciente y acotada, es decir $v_x < 0$ y $v(x) \leq v^0$. A partir de (9), obtenemos

$$v_x = -a \sqrt{F(v) - F(v^0)} \Rightarrow ax = \int_v^{v^0} \frac{d\xi}{\sqrt{F(v) - F(v^0)}}.$$

Debido a que $v(1) = 0$ y la integral en (9), encontramos que

$$a = \int_0^{v^0} \frac{d\xi}{\sqrt{F(v) - F(v^0)}}, \quad \text{donde } F(v) = v^2 - \frac{2}{3}v^3. \quad (10)$$

Debido a las aproximaciones asintóticas en (8), buscamos ahora se cumpla que $a \rightarrow \pi/2$ conforme $v^0 \rightarrow 0$. Esto es posible solamente si (10)

es singular cuando $v^0 \rightarrow 0$. Primero, $F(v^0) \sim F''(0)v^0/2 + \dots$ y $F''(0) = 2$; como consecuencia, vemos que

$$a \sim \int_0^{v^0} \frac{d\xi}{\sqrt{v^0/2 - \xi^2}} = \arcsin\left(\frac{\xi}{v^0}\right) \Big|_0^{v^0} = \frac{\pi}{2}.$$

Es decir, $a \rightarrow \pi/2$ cuando $v^0 \rightarrow 0$. En el punto $a_* = \pi/2$ ocurre una bifurcación transcítica, lo cual quiere decir que cuando $a = a_*$, la solución de equilibrio trivial y una no trivial coinciden. La estabilidad de las ramas de soluciones que ahí convergen sufren un cambio de estabilidad respecto al tiempo. Antes de verificar que efectivamente el cambio de estabilidad ocurre en a_* , notemos que

1. Si $a < \pi/2$, entonces $H < H_c = \pi v/(2\sqrt{v})$ y $v(t) \equiv 0$ es la única solución de equilibrio; esto implica que la población de peces se extingue.
2. Si $H > H_c$, entonces existen dos soluciones, una indicando la extinción y otra que indica que la densidad de peces es distinta de cero.

Una vez encontradas las soluciones de equilibrio, ahora nos enfocaremos en determinar la estabilidad de las soluciones de equilibrio para cada valor del parámetro a .

Estabilidad de soluciones

Regresemos al problema (PP) con las condiciones a la frontera $u_x(t,0) = u(t,1) = 0$. Examinaremos la estabilidad de la solución de equilibrio trivial. Sea $w = v \ll 1$ y linealizamos la ecuación en (PP) alrededor del cero para obtener

$$(PL1) \begin{cases} v_t = Dv_{xx} + f'(0)v, & 0 < x < 1, \\ v_x(t,0) = v_x(t,1) = 0. \end{cases}$$

Ahora, sustituimos $v = e^{\lambda t} \varphi(x)$ en (PL1) y obtenemos

$$(PL2) \begin{cases} \varphi_{xx} + \frac{1}{D}(f'(0) - \lambda)\varphi = 0, & 0 < x < 1, \\ \varphi_x(0) = \varphi_x(1) = 0. \end{cases}$$

Por medio del *método de separación de variables*, el problema (PL2) tiene una familia de soluciones

$$\varphi_j(x) = \cos(\kappa_j x), \quad \lambda_j = 1 - \kappa_j^2 D, \quad \kappa_j = \frac{(2j-1)\pi}{2}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto, dado que (PL1) es un problema lineal, la solución está dada por

$$v(t,x) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j \exp(\lambda_j t) \cos(\kappa_j x).$$

Concluimos que $v(t, x) \rightarrow 0$ para cualquier condición inicial, si y sólo si $\lambda_j < 0$ para $j \in \mathbb{N}$. Notemos que $\lambda_1 > \lambda_j$ para todo $j = 2, 3, \dots$; esto quiere decir que una condición necesaria y suficiente para la estabilidad lineal es que $\lambda_1 < 0$; esto es, cuando $1 - \pi^2/4D < 0$. Es decir, en términos de los parámetros originales, la única solución de equilibrio estable es la solución trivial cuando $H < H_c$. Esto indica que esta solución pierde estabilidad si $H > H_c$, lo cual sugiere que la rama de soluciones no triviales que emerge del valor $H = H_c$ posiblemente esté conformada por soluciones estables. Verificar esta última afirmación equivalente a analizar a un problema de valores a la frontera no autónomo de la forma

$$(PNA) \begin{cases} \varphi_{xx} + a^2 f'(u_*(x))\varphi = \lambda\varphi, & 0 < x < 1, \\ \varphi_x(t, 0) = \varphi_x(t, 1) = 0, \end{cases}$$

donde $u_*(x)$ es una solución de equilibrio de la rama no trivial. En general, estos problemas son difíciles de abordar analíticamente. Sin embargo, con el fin de construir numéricamente la rama no trivial el uso de herramientas numéricas es indispensable.

El problema (P3) tiene soluciones del tipo onda viajera; esto quiere decir que las soluciones son tales que $u(T, X) = \tilde{u}(X - cT)$. Aquí no profundizaremos en esta dirección. El análisis que muestra la existencia de este tipo de soluciones puede consultarse en [7]. En la Figura 2.1 se muestran un frente de onda a distintos tiempos, esta solución tiene un perfil que conecta los estados de equilibrio dados por el término logístico y viaja en la dirección positiva a una rapidez $c > 0$. ¿Qué ocurriría en el caso donde $c < 0$?

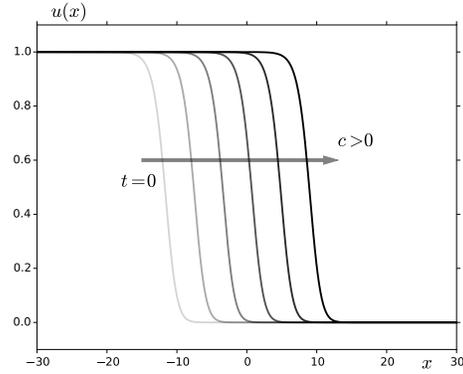


Fig. 2: Solución del tipo onda viajera para el problema (P3), donde $\gamma = 0,5$, $v^2 = 0,1$ y $u_m = 1$. El intervalo es simétrico con respecto al origen y de longitud $2H$ con $H = 30$.

3. Comentarios finales

En estas notas se ha dado un breve recorrido en los elementos más básicos del análisis asintótico. De esta manera, se construyó aproximadamente el diagrama de bifurcación para un sistema de valor a la frontera no lineal. Concluimos que, cuando se tiene un sistema de este tipo, existe una colección numerable e infinita de valores propios, donde los términos no lineales producen que las ramas de soluciones de equilibrio no triviales se doblan. De igual modo, al analizar el problema (P3), encontramos que existe una bifurcación primaria *transcrítica* para el caso de crecimiento logístico para la población de peces. Esta bifurcación mostró la existencia de una longitud H_c que garantiza que la solución de equilibrio trivial sufre un cambio de estabilidad. En este valor crítico, emerge una rama de soluciones de equilibrio distintas de cero. Más aún, hemos establecido argumentos heurísticos que confirman que estas soluciones son estables. La Figura 2.1 es una muestra numérica de soluciones estables no triviales. Para profundizar en el análisis numérico de bifurcación de soluciones de este tipo, véase [8].

Referencias

- [1] R. Courant y J. Fritz, *Introducción al cálculo y al análisis matemático*, Limusa, Noriega Editores, 1999.
- [2] Y. Kuznetsov, *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Springer-Verlag New York Inc., 2nd edition, 2000.
- [3] M.H. Holmes, *Introduction to Perturbation Methods*, Springer-Verlag New York, Inc., 2013.
- [4] J. Kervokian y J.D. Cole, *Perturbation in Applied Mathematics*, Springer-Verlag New York, Inc., 1981.
- [5] W. Paulsen, *Asymptotic Analysis and Perturbation Theory*, CRC Press, 2014.
- [6] A. Okubo and S. A. Levin, *Diffusion and ecological problems: modern perspectives*, Interdisciplinary applied mathematics, Springer-Verlag New York Inc., 2nd ed. edition, 2009.
- [7] J.D. Murray, *Mathematical Biology II: spatial models and biomedical applications*, Springer-Verlag New York Inc., New York, 3rd. edition, 2002.
- [8] D. Avitabile, *Numerical computation of coherent structures in spatially-extended systems*, Second International Conference on Mathematical Neuroscience, Antibes Juan-les-Pins, 2016.

Vectores Quasi-analíticos y Operadores Autoadjuntos

M. C. Fredy Díaz García
Posgrado Conjunto en Ciencias
Matemáticas UNAM-UMSNH

RESUMEN. Iniciaremos con algunas nociones básicas sobre operadores no acotados sobre espacios de Hilbert H y veremos una de las muchas aplicaciones del teorema espectral la cual usaremos para demostrar el teorema de Nelson y Nussbaum que nos dan condiciones suficientes para saber si un operador simétrico T es o no autoadjunto en términos de la densidad de cierta clase de vectores del dominio $D(T)$ de T .

1. Operadores no acotados sobre espacios de Hilbert

Empezaremos con algunas nociones básicas sobre operadores lineales no acotados que se utilizarán en el desarrollo de las notas. De ahora en adelante H denotará un espacio de Hilbert con producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y asumimos que todos nuestros operadores $T : D(T) \subset H \rightarrow H$ son densamente definidos, es decir, $D(T)$ es denso en H .

Teorema 1.1. Sean H un espacio de Hilbert y $T : D(T) \subset H \rightarrow H$ un operador lineal densamente definido, entonces existe un operador lineal $T^* : D(T^*) \subset H \rightarrow H$ llamado el adjunto de T cuyo dominio está dado por $D(T^*) = \{y \in H : \exists u \in H \text{ tal que } \langle Tx, y \rangle = \langle x, u \rangle \ \forall x \in D(T)\}$. El vector u es único y por lo tanto podemos definir $T^*y = u$.

Definición 1.1. Sea H en espacio de Hilbert. Sea $T : D(T) \subset H \rightarrow H$ un operador lineal.

1. Decimos que el operador T es cerrado si y sólo si satisface lo siguiente: si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en $D(T)$ tal que $x_n \rightarrow x$ en H y $Tx_n \rightarrow y$, entonces $x \in D(T)$ y $y = Tx$.
2. Decimos que el operador T es cerrable si y sólo si cumple lo siguiente: si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en $D(T)$ tal que $x_n \rightarrow 0$ y $Tx_n = y$ en H , entonces $y = 0$.

Decimos que T es simétrico si $T \subset T^*$ y autoadjunto si $T = T^*$. Puede demostrarse que el operador T^* es siempre cerrado, por lo tanto si T es simétrico es cerrable. Un operador T es esencialmente autoadjunto si \bar{T} es autoadjunto.

De ahora en adelante supongamos que todos nuestros operadores T son densamente definidos y simétricos.

Ejemplo 1.

1. $T = -i \frac{d}{dx} : C_c^\infty(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ es densamente definido simétrico y cerrable,
2. $T = M_x : D(T) \subset L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$, $D(T) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : xf \in L^2(\mathbb{R})\}$ es densamente definido cerrado simétrico.

Puede demostrarse que $\dim N(T^* - zI)$ es constante sobre el semiplano superior $\text{Im } z > 0$ y constante sobre el semiplano inferior $\text{Im } z < 0$, ver por ejemplo en [2]. Entonces podemos dar la siguiente definición.

Definición 1.2. Si T es un operador simétrico densamente definido, sus índices de deficiencia son los números cardinales

$$d_+(T) = \dim N(T^* - \lambda I) = \dim N(T^* - iI) \quad \text{Im } \lambda > 0,$$

$$d_-(T) = \dim N(T^* - \lambda I) = \dim N(T^* + iI) \quad \text{Im } \lambda < 0.$$

Teorema 1.2 (Formula de von Neumann). Sea T un operador simétrico densamente definido. Entonces

$$D(T^*) = D(\bar{T}) \dot{+} N(T^* - \lambda I) \dot{+} N(T^* - \bar{\lambda} I), \quad (1)$$

para $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, y

$$\dim D(T^*)/D(\bar{T}) = d_+(T) + d_-(T). \quad (2)$$

Demostración. Ver en [2]. □

2. Teorema espectral para operadores autadjuntos

Sea $B(\mathbb{R})$ la σ -álgebra de Borel de \mathbb{R} y H un espacio de Hilbert.

Definición 2.1 (Medida espectral). *Una medida espectral sobre $B(\mathbb{R})$ es un mapeo E de $B(\mathbb{R})$ al conjunto de proyecciones ortogonales de H tal que*

1. $E(\mathbb{R}) = I$,
2. E es numerablemente aditiva, es decir, $E(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n) = \sum_{n=1}^{\infty} E(M_n)$ para toda sucesión (M_n) de conjuntos disjuntos por pares en $B(\mathbb{R})$.

Las sumas infinitas son siempre en el sentido de convergencia en operador fuerte, es decir,

$$E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\right)x = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k E(M_n)x \quad \text{para } x \in H.$$

Es fácil demostrar que si E es una medida espectral sobre la σ -álgebra $B(\mathbb{R})$ en H , entonces para cada vector $x \in H$ esta nos da una medida E_x sobre $B(\mathbb{R})$ por $E_x(M) := \langle E(M)x, x \rangle = \|E(M)x\|^2$.

Teorema 2.1 (Teorema espectral). *Sea A un operador autoadjunto sobre un espacio de Hilbert H . Entonces existe una única medida espectral $E = E_A$ sobre la σ -álgebra de Borel $B(\mathbb{R})$ tal que*

$$A = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE_A(\lambda). \quad (3)$$

Además $\text{supp } E_A = \sigma(A)$.

Demostración. Ver en [2]. □

Ahora procederemos a definir el cálculo funcional del operador autoadjunto A . Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ una función Borel E_A -a.e. finita, denotemos este conjunto de funciones por S . Definimos

$$f(A) := \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) dE_A(\lambda) \quad (4)$$

con dominio denso

$$D(f(A)) := \left\{ x \in H : \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2 d\langle E_A(\lambda)x, x \rangle < \infty \right\}. \quad (5)$$

Teorema 2.2 (Propiedades del cálculo funcional). *Sean $f, g \in S$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $x, y \in D(f(A))$, entonces*

1. $\langle f(A)x, y \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) d\langle E_A(\lambda)x, y \rangle$.
2. $\|f(A)x\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2 d\langle E_A(\lambda)x, x \rangle$.

3. $f(A)$ es acotado si y sólo si $f \in L^\infty(\mathbb{R}, E_A)$, en este caso, $\|f(A)\| = \|f\|_\infty$.
4. $f(A)^* = \overline{f(A)}$.
5. $(\alpha f + \beta g)(A) = \alpha f(A) + \beta g(A)$.
6. $f g(A) = \overline{f(A)g(A)}$.
7. $p(A) = \sum_n \alpha_n A^n$ para cualquier polinomio $p(t) = \sum_n \alpha_n t^n \in \mathbb{C}[t]$.
8. $\chi_M(A) = E_A(M)$.
9. Si $f(t) \neq 0$ E_A -a.e. sobre \mathbb{R} , entonces $f(A)^{-1} = (1/f)(A)$.

3. Grupos uni-paramétricos unitarios fuertemente continuos sobre un espacio de Hilbert

Definición 3.1. *Un grupo unitario uni-paramétrico fuertemente continuo es una familia $\{U(t) : t \in \mathbb{R}\}$ de mapeos unitarios sobre un espacio de Hilbert H tal que*

1. $U(t)U(h) = U(t+h)$ para todo $t, h \in \mathbb{R}$,
2. $\lim_{h \rightarrow t} U(t+h)x = U(t)x$ para todo $x \in H$.

Ejemplo 2. 1. $H = L^2(\mathbb{R})$, $(U(t)f)(x) = f(x+t)$.

2. Sea A un operador autoadjunto sobre un espacio de Hilbert H con medida espectral E , por el cálculo funcional podemos definir

$$e^{itA} = \int_{\mathbb{R}} e^{it\lambda} dE(\lambda), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

Entonces el siguiente teorema afirma que $U = \{U(t) := e^{itA}\}$ es un grupo unitario.

Teorema 3.1. *Sea A un operador autoadjunto sobre un espacio de Hilbert H . Entonces $U := \{U(t) = e^{itA}\}$ es un grupo unitario uni-paramétrico fuertemente continuo. El operador A está únicamente determinado por U , es decir,*

$$D(A) = \left\{ x \in H : \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} U(t)x := \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1}(U(h) - I)x \text{ existe} \right\},$$

$$iAx = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} U(t)x, \quad x \in D(A).$$

Además, para $x \in D(A)$ y $t \in \mathbb{R}$, tenemos $U(t)x \in D(A)$ y

$$\frac{d}{dt} U(t)x = iAU(t)x = iU(t)Ax. \quad (7)$$

Demostración. Puede demostrarse usando el cálculo funcional de A o puede verse en [4]. \square

Observación 1. Supongamos que $x \in D(A^n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $f(t) = U(t)x = e^{itA}x$ es infinitamente diferenciable.

4. Ecuación de onda abstracto sobre un espacio de Hilbert

Sea A un operador autoadjunto sobre un espacio de Hilbert H . Supongamos que $A \geq 0$ y $N(A) = \{0\}$. Sea $u_0 \in D(A)$ y $u_1 \in H$, entonces podemos considerar el siguiente *problema de Cauchy* para la *ecuación de onda* abstracta

$$u''(t) = -Au(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1,$$

donde $u \in C^2(\mathbb{R}, H)$ y $u(t) \in D(A)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Teorema 4.1. *Supongamos que $u_0 \in D(A)$ y $u_1 \in D(A^{1/2})$. Entonces*

$$u(t) := (\cos A^{1/2}t)u_0 + (A^{-1/2}\sin A^{1/2}t)u_1, \quad t \in \mathbb{R},$$

es la *única solución* para la *ecuación de onda abstracta*. Además

$$u'(t) = -A^{1/2}(\sin A^{1/2}t)u_0 + (\cos A^{1/2}t)u_1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Demostración. Puede demostrarse usando el cálculo funcional para el operador A o ver en [4]. \square

Observación 2. Notemos que si $u_1 = 0$ y $u_0 \in D(A^n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces u es infinitamente diferenciable.

Clases quasi-analíticas de funciones

Sea $(m_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ una sucesión positiva, $J \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto. Denotamos por $C\{m_n\}$ el conjunto de las funciones $f \in C^\infty(J)$ para las cuales existe una constante $K_f > 0$ tal que

$$|f^{(n)}(t)| \leq K_f^n m_n \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}_0, t \in J. \quad (8)$$

Un subespacio lineal C de $C^\infty(J)$ es llamado *quasi-analítico* si se cumple lo siguiente: si $f \in C$ es una función y existe un $t_0 \in J$ tal que $f^{(n)}(t_0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$, entonces $f(t) \equiv 0$ en J .

Teorema 4.2 (Denjoy-Carleman). $C\{m_n\}$ es *quasi-analítica* si y sólo si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\inf_{k \geq n} m_k^{1/k} \right)^{-1} = \infty.$$

Demostración. Ver en [3]. \square

Para las demostraciones que veremos más adelante sólo necesitamos tener el siguiente:

Corolario 4.1. *Sea $(m_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ una sucesión positiva tal que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} m_n^{-1/n} = \infty. \quad (9)$$

Supongamos que $f \in C^\infty(J)$ y existe una constante $K_f > 0$ tal que (8) se cumple. Si existe un $t_0 \in J$ tal que $f^{(n)}(t_0) = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}_0$, entonces $f(t) \equiv 0$ sobre J .

Ejemplo 3. $C\{n!\}$ es una clase quasi-analítica sobre \mathbb{R} . Además cualquier $f \in C\{n!\}$ es la restricción a \mathbb{R} de una función holomorfa F sobre $\{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < c\}$ para algún $c > 0$ (ver en [3]).

Sea T un operador lineal sobre un espacio de Hilbert H . Un vector $x \in H$ es en C^∞ -vector de T si

$$x \in D^\infty(T) := \bigcap_{n=1}^{\infty} D(T^n).$$

Definición 4.1. *Sea $x \in D^\infty(T)$. Decimos que $x \in D^b(T)$ y x es acotado para T si y sólo si existe una constante $B_x > 0$ tal que*

$$\|T^n x\| \leq B_x^n \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

$x \in D^a(T)$ y x es analítico para T si y sólo si existe una constante $C_x > 0$ tal que

$$\|T^n x\| \leq C_x^n n! \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}_0,$$

$x \in D^{qa}(T)$ y x es quasi-analítico para T si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|T^n x\|^{-1/n} = \infty,$$

$x \in D^s(T)$ y x es un vector Stieltjes para T si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|T^n x\|^{-1/2n} = \infty.$$

Observación 3. Notemos que $D^b(T)$ y $D^a(T)$ son subespacios lineales de $D^\infty(T)$ y tenemos

$$D^b(T) \subset D^a(T) \subset D^{qa}(T) \subset D^s(T).$$

Ejemplo 4.

1. Eigenvectores de T son siempre vectores acotados
2. Sea A un operador autoadjunto sobre un espacio de Hilbert H , $\alpha > 0$ y $u, v \in H$, entonces $x := e^{-\alpha|A|}$ y $y := e^{-\alpha A^2}$ son vectores analíticos para A .

Lema 4.1. Sea (r_n) una sucesión de números positivos y sea $m_n = \alpha r_n + \beta$ para $n \in \mathbb{N}$, donde $\alpha > 0$ y $\beta > 0$. Si $\sum_n r_n^{-1/n} = \infty$, entonces $\sum_n m_n^{-1/n} = \infty$

Demostración. Sea $M := \{n \in \mathbb{N} : \alpha r_n \leq \beta\}$. Para $n \in M$ tenemos $m_n \leq 2\beta$ y $m_n^{-1/n} \geq (2\beta)^{-1/n} \geq (1 + 2\beta)^{-1}$, por lo tanto $\sum_n m_n^{-1/n} = \infty$ si M es infinito. Si M es finito, entonces existe k tal que $m_n \leq 2\alpha r_n$ para $n \geq k$ y por lo tanto $\sum_{n \geq k} m_n^{-1/n} \geq \sum_{n \geq k} (2\alpha)^{-1/n} (r_n)^{-1/n} \geq (1 + 2\alpha)^{-1} \sum_{n \geq k} r_n^{-1/n} = \infty$. \square

Lema 4.2. Si T es un operador simétrico, entonces $D^s(T) \subset D^s(T + zI)$ para $z \in \mathbb{C}$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $Tx \neq 0$ y $\|x\| = 1$. Usando que $\|T^k x\|^{1/k} \leq \|T^n x\|^{1/n}$ para $k \leq n$, tenemos

$$\begin{aligned} \|(T + zI)^n x\| &\leq \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} |z|^{n-k} \|T^k x\|^{k/n} \\ &= (\|T^n x\|^{1/n} + |z|)^n \\ &\leq \|T^n x\| (1 + |z| \|T^n x\|^{-1/n})^n \\ &\leq \|T^n x\| (1 + |z| \|Tx\|^{-1})^n. \end{aligned}$$

\square

Lema 4.3. Si T es operador autoadjunto, entonces $D^b(T)$ es denso en H .

Demostración. Notemos que si $a > 0$ y $x \in E([-a, a])H$, entonces $x \in D^b(T)$. \square

Teorema 4.3 (A.E. Nussbaum). Sea T un operador simétrico densamente definido sobre un espacio de Hilbert H tal que el subespacio lineal generado por $D^{qa}(T)$ es denso. Entonces T es esencialmente autoadjunto.

Demostración. Demostremos que $N(T^* - iI) = \{0\}$. Por contradicción supongamos que $y \in N(T^* - iI)$ es no nulo y sea $x \in D^{qa}(T)$, $x \neq 0$. Sea A una extensión autoadjunto de T sobre un espacio de Hilbert posiblemente más grande $G \supseteq H$. Definimos f sobre \mathbb{R} por $f(t) = \langle e^{itA} x, y \rangle - e^t \langle x, y \rangle$. Por teorema 3.1 se tiene que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ y

$$f^{(n)}(t) = \langle e^{itA} (iA)^n x, y \rangle - e^t \langle x, y \rangle \quad (10)$$

para $t \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$. De donde se sigue que $f^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Sea $a > 0$ y $J = (-a, a)$. Consideremos $\alpha = \|y\|$, $\beta = e^a \|x\| \|y\|$ y $m_n = \alpha \|T^n x\| + \beta$ para $n \in \mathbb{N}_0$. Ya que $x \in D^{qa}(T)$, tenemos $\sum_n \|T^n x\|^{-1/n} = \infty$ y entonces $\sum_n m_n^{-1/n} = \infty$ por lema 4.1. De (10) obtenemos

$$|f^n(t)| \leq \|A^n x\| \|y\| + e^a \|x\| \|y\| \leq \alpha \|T^n x\| + \beta = m_n$$

para $t \in J$, $n \in \mathbb{N}_0$, por lo tanto f satisface (8) con $K_f = 1$. Como $f^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$, entonces por el teorema de Denjoy-Carleman (teorema 4.2) tenemos $f(t) \equiv 0$ sobre $(-a, a)$ y por lo

tanto sobre todo \mathbb{R} pues a es arbitrario. Por lo tanto tenemos

$$\langle e^{itA} x, y \rangle = e^t \langle x, y \rangle \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R},$$

lo cual a su vez implica que $\langle x, y \rangle = 0$. Entonces tenemos probado que $D^{qa}(T) \perp y$. Ya el generado lineal de $D^{qa}(T)$ es denso en H , obtenemos $y = 0$, lo cual es una contradicción. Por un razonamiento similar se tiene que $N(T + iI) = \{0\}$. Por lo tanto T es esencialmente autoadjunto por fórmula de von Neumann (1). \square

Teorema 4.4. Sea T un operador lineal simétrico semiacotado por abajo sobre H . Si el generado lineal de $D^s(T)$ es denso en H , entonces T es esencialmente autoadjunto.

Demostración. Por lema 4.2 podemos suponer que $T \geq I$, entonces $0 \in \pi(T)$ y por lo tanto es suficiente probar que $N(T^*) = \{0\}$. Procedemos por contradicción supongamos que y es un vector unitario en $N(T^*)$. Sea $x \in D^s(T)$, $x \neq 0$. Por teorema de la extensión de Friedrichs, existe una extensión autoadjunta A de T tal que $A \geq I$. Por teorema 4.1, $u(t) := (\cos A^{1/2} t)x$ resuelve el problema de Cauchy $u(0) = x$, $u'(0) = 0$ para la ecuación de onda abstracta $u''(t) = -Au(t)$ y $u'(t) = -(A^{-1/2} \sin A^{1/2} t)x$ para $t \in \mathbb{R}$. Definimos una función sobre \mathbb{R} por $f(t) := \langle u(t)x, y \rangle - \langle x, y \rangle$. Ya que $x \in D^\infty(T) \subset D^\infty(A)$, por el cálculo funcional para el operador autoadjunto A se tiene que

$$u^{(2k)}(t) = (-A)^k u(t) \quad \text{y} \quad u^{(2k-1)}(t) = (-A)^{k-1} u'(t)$$

para $k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $u \in C^\infty(\mathbb{R}, H)$ y entonces $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Ya que $\|y\| = 1$ y $A \geq I$, tenemos

$$|f^{(2k-1)}(t)| \leq \|T^k x\|, \quad |f^{(2k)}(t)| \leq \|T^k x\| \quad \text{para } k \in \mathbb{N}.$$

Además $|f(t)| \leq \|x\|$ sobre \mathbb{R} . Ahora si consideramos $m_0 = 2\|x\|$, $m_{2k-1} = \|T^k x\|$ y $m_{2k} = \|T^k x\|$, entonces $|f^{(n)}(t)| \leq m_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $t \in \mathbb{R}$. Es claro que

$$\sum_n m_n^{-1/n} \geq \sum_n \|T^n x\|^{-1/2n} = \infty.$$

Ya que $u'(0) = 0$, $u(0) = x$ y $T^* y = 0$, obtenemos

$$\begin{aligned} f^{(2k-1)}(0) &= \langle (-A)^k u'(0), y \rangle \\ &= 0, \\ f^{(2k)}(0) &= \langle (-A)^k u(0), y \rangle \\ &= \langle (-T)^k x, y \rangle \\ &= \langle -(-T)^{k-1} x, T^* y \rangle \\ &= 0, \\ f(0) &= \langle u(0), y \rangle - \langle x, y \rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

para $k \in \mathbb{N}$, es decir, tenemos mostrado que $f^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Por lo tanto por el teorema de Denjoy-Carleman 4.2 concluimos que $f(t) \equiv 0$ sobre \mathbb{R} . Ya que $\cos A^{1/2}t$ es acotado para $t \in \mathbb{R}$ tenemos $\langle x, y \rangle = \langle u(t)x, y \rangle = \langle (\cos A^{1/2}t)x, y \rangle = \langle x, (\cos A^{1/2}t)y \rangle$. Por lo tanto $\langle x, y - (\cos A^{1/2}t)y \rangle = 0$ para todo $x \in D^s(T)$. Ya que el generado lineal de $D^s(T)$ es denso en H se sigue que $y - (\cos A^{1/2}t)y = 0$, lo que a su vez implica que $y = 0$, lo cual es una contradicción. \square

5. Aplicación a operadores Jacobi

Sea $\{e_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ una base un ortonormal para el espacio de Hilbert H . Sean (a_n) una sucesión de números complejos y (b_n) una sucesión de números reales, definimos T con dominio $D(T) = \text{gen}\{e_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ por

$$Te_n = a_{n-1}e_{n-1} + b_n e_n + \bar{a}_n e_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (11)$$

donde $e_{-1} = 0$. Es fácil ver que T es simétrico.

Afirmación: Supongamos que existen constantes positivas α y β tal que $|a_k| \leq \alpha k + \beta$ y $|b_k| \leq \alpha n + \beta$ para $k \leq n$, $k, n \in \mathbb{N}$. Entonces el operador T es esencialmente autoadjunto.

Ejemplo 5. Los operadores aniquilación A y creador A^+ cuya acción sobre la base ortonormal $\{e_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ de $H = l^2(\mathbb{N}_0)$ es dada por

$$Ae_n = \sqrt{n}e_{n-1} \text{ y } A^+e_n = \sqrt{n+1}e_{n+1} \quad n \in \mathbb{N},$$

donde $e_{-1} = 0$. Ya que $A^* = A^+$, entonces los operadores

$$P_0 = \frac{1}{\sqrt{2}i}(A - A^+) \text{ y } Q_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(A + A^+)$$

son simétricos sobre $l^2(\mathbb{N}_0)$ y sus restricciones a $D_0 = \text{gen}\{e_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ son esencialmente autoadjuntos. Además existe $U : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow l^2(\mathbb{N}_0)$ unitario tal que $U(-i\frac{d}{dx})U^*z = P_0z$ y $UM_xU^*z = Q_0z$ para $z \in D_0$.

Referencias

- [1] N.I. Akhiezer, I.M. Glazman, *Theory of Linear Operators in Hilbert Spaces*, Ungar, New York, 1961.
- [2] M.A. Naimark, *Linear Differential Operators*, Ungar, New York, 1968.
- [3] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, 2nd ed. McGraw-Hill Inc., New York, 1974.
- [4] E. Zeidler, *Applied Functional Analysis: Applications to Mathematical Physics*, Applied Mathematical Sciences 108. Springer-Verlag, New York, 1995.

Singularidades Cónicas en Superficies Planas

Dr. Juan Ahtziri González Lemus
Posdoctorado de UMSNH

RESUMEN. Comenzaremos con las definiciones de superficie plana y de singularidad cónica en una superficie plana. Veremos que una superficie cerrada, orientable y de género $g > 1$ admite métrica plana con una singularidad cónica de ángulo $(4g-2)\pi$. Después estudiaremos con detalle los espacios de métricas planas sobre la esfera con 3 singularidades cónicas y con 4 singularidades cónicas de ángulos iguales a π . Terminamos mencionando algunas propiedades topológicas del espacio global de métricas planas sobre la esfera con 4 singularidades cónicas.

El objetivo de estas notas es dar una breve introducción al minicurso que se impartirá en el Centro en Ciencias Matemáticas en UNAM campus Morelia. Debido a ello este texto se centra sólo en las ideas y ejemplos y no está escrito de manera rigurosa. La mayoría de los resultados mencionados aquí no serán demostrados, los lectores interesados pueden consultar las referencias para profundizar más sobre el tema.

1. Superficies topológicas

Definición 1.1. Una superficie S es un espacio topológico Hausdorff, 2^{do} numerable (tiene base numerable para su topología) y tal que para todo $p \in S$ existe una pareja (U, ϕ) tal que $U \subset S$ es abierto, $p \in U$ y $\phi: U \rightarrow V$ es un homeomorfismo con un abierto $V \subset \mathbb{R}^2$. A las parejas que satisfacen esta condición les llamaremos cartas. Si dos cartas (U_1, ϕ_1) y (U_2, ϕ_2) satisfacen $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, entonces al homeomorfismo $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}: \phi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \phi_2(U_1 \cap U_2)$ le llamamos cambio de coordenadas.

Ejemplo 1. Ejemplos de superficies.

1. El plano euclideo \mathbb{R}^2 . Claramente \mathbb{R}^2 es Hausdorff y 2^{do} numerable. Para la tercera condición basta tomar la carta $(\mathbb{R}^2, Id_{\mathbb{R}^2})$ ($Id_{\mathbb{R}^2}$ denota la identidad en \mathbb{R}^2) para todo $p \in \mathbb{R}^2$.
2. La esfera $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Nuevamente es claro que S^2 es Hausdorff y 2^{do} numerable. En este caso no es posible dar una sola pareja (U, ϕ) que cumpla con la condición 3, ya que por compacidad S^2

no es homeomorfo a ningún abierto en \mathbb{R}^2 . Dos cartas sobre S^2 son las siguientes:

$$(U_x^+, \phi_x^+) = \begin{cases} U_x^+ = \{(x, y, z) \in S^2 \mid x > 0\}, \\ \phi_x^+(x, y, z) = (y, z). \end{cases}$$

$$(U_x^-, \phi_x^-) = \begin{cases} U_x^- = \{(x, y, z) \in S^2 \mid x < 0\}, \\ \phi_x^-(x, y, z) = (y, z). \end{cases}$$

Análogamente se construyen las cartas (U_y^+, ϕ_y^+) , (U_y^-, ϕ_y^-) , (U_z^+, ϕ_z^+) y (U_z^-, ϕ_z^-) y con estas 6 cartas cubrimos a todo punto en S^2 .

En estas notas sólo estudiaremos superficies conexas y compactas (cerradas). El siguiente resultado se conoce como el Teorema de Clasificación de Superficies Compactas y se puede consultar en [1, Cap.1].

Teorema 1.1. Si S es una superficie conexa y compacta, entonces S es homeomorfa a la esfera, a una suma conexa de toros o a una suma conexa de planos proyectivos.

2. Superficies planas

Definición 2.1. Una estructura plana sobre una superficie orientable S es un conjunto de cartas $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ tal que $\cup_{i \in I} U_i$ es cubierta de S y para todas $i, j \in I$, el cambio de coordenadas $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ es una isometría de \mathbb{R}^2 . A una superficie con una estructura plana le llamamos superficie plana.

Sobre una superficie plana S podemos medir longitudes de curvas de la siguiente manera: Si $\alpha: [0, 1] \rightarrow S$ es una curva diferenciable tal que $\alpha([0, 1]) \subset U_i$ con U_i en una carta (U_i, ϕ_i) de

la estructura plana, entonces $\phi_i \circ \alpha([0, 1])$ es una curva en \mathbb{R}^2 , de manera que podemos medir su longitud por medio de la conocida fórmula

$$L(\phi_i \circ \alpha) = \int_0^1 \|(\phi_i \circ \alpha)'(t)\| dt.$$

Si sucede que $\alpha([0, 1]) \subset U_j$ con U_j en la carta (U_j, ϕ_j) de la estructura plana distinta de (U_i, ϕ_i) , entonces $L(\phi_i \circ \alpha) = L(\phi_j \circ \alpha)$ son iguales ya que el cambio de coordenadas $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ es una isometría. Si $\alpha([0, 1])$ no está contenida en una carta (U_i, ϕ_i) , entonces podemos medir su longitud por pedazos contenidos en cartas, después, al sumar las longitudes de dichos pedazos obtendremos la longitud de α . De manera que para toda $\alpha: [0, 1] \rightarrow S$ diferenciable está bien definida su longitud $L(\alpha)$.

Una vez que podemos medir longitudes de curvas en S , definimos una distancia d_S en la superficie de la siguiente manera: Si $p, q \in S$, entonces

$$d_S(p, q) = \inf \{L(\alpha) \mid \alpha: [0, 1] \rightarrow S, \alpha(0) = p, \alpha(1) = q\}.$$

De manera que en una superficie plana podemos medir distancias justo como lo hacemos en el plano euclideo. Además, es claro que en superficies planas también podemos medir ángulos ya que éstos también son preservados por isometrías de \mathbb{R}^2 .

Procedemos a mencionar un resultado que muestra que sólo existen 2 superficies planas. En la demostración de dicho resultado utilizaremos que toda superficie plana se puede triangular con geodésicas (curvas que minimizan longitud) [2, Part4].

Teorema 2.1. *Si S es una superficie plana conexa y compacta, entonces S es homeomorfa al toro o a la botella de Klein.*

Demostración. Supongamos que tenemos una triangulación con geodésicas sobre S . La característica de Euler de S se define como $\chi(S) = v - a + t$, donde v es el número de vértices, a es el número de aristas y t es el número de triángulos en la triangulación. Por un lado $a = \frac{3t}{2}$ ya que cada triángulo tiene 3 aristas y cada arista pertenece a 2 triángulos. Por otro lado $v = \frac{t}{2}$ ya que los ángulos totales deben sumar $2\pi v = \pi t$. Concluimos que

$$\chi(S) = v - a + t = \frac{t}{2} - \frac{3t}{2} + t = 0$$

y por lo tanto S es el toro o la botella de Klein. \square

3. Singularidades cónicas

Aquí sólo mencionaremos la definición de una singularidad con ángulo cónico menor que 2π . Para una definición general se puede consultar [2, Pág.207].

Definición 3.1. *El cono de ángulo $\theta \in [0, 2\pi]$ es la superficie topológica C_θ que se obtiene al cocientar $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \arg(z) \leq \theta\}$ por la acción $z \mapsto e^{i\theta}z$. A la clase $0 \in C_\theta$ le llamamos el ápice de C_θ .*

Se puede probar que si los ángulos θ y β son distintos, entonces C_θ y C_β no son isométricos. Notar que $C_{2\pi}$ es el plano euclideo.

Definición 3.2. *Supongamos que S es una superficie y $p_1, p_2, \dots, p_l \in S$. Si $S \setminus \{p_1, p_2, \dots, p_l\}$ es superficie plana y para cada i , existe $\theta_i > 0$ tal que las vecindades pequeñas de p_i son isométricas a vecindades del ápice en C_{θ_i} , entonces decimos que los puntos p_1, p_2, \dots, p_l son singularidades cónicas de S y a los θ_i les llamamos ángulos cónicos.*

Ejemplo 2. Ejemplos de superficies planas con singularidades cónicas.

1. *El cono C_θ .* Es claro de la definición.
2. *El tetraedro platónico T .* Llamemos $v_0, v_1, v_2, v_3 \in T$ a los vértices. Es claro que $T \setminus \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ es superficie plana (sobre las aristas también hay cartas planas) y que las vecindades de los v_i son isométricas a vecindades del ápice en C_π .
3. *El doble de un triángulo equilátero.* Este espacio se obtiene pegando dos triángulos equiláteros por sus fronteras correspondientes. En este caso hay 3 singularidades de ángulos cónicos el doble de los ángulos interiores del triángulo.

Teorema 3.1. *Toda superficie conexa y compacta S admite una estructura plana con singularidades cónicas.*

Demostración. Dividiremos la demostración en los siguientes 3 casos.

1. $S \cong \mathbb{S}^2$. En los ejemplos 2 y 3 se muestran dos estructuras distintas para este caso.
2. S homeomorfa a una suma conexa de g toros. En este caso S se puede obtener pegando las aristas de un $4g$ -ágono regular B utilizando traslaciones del plano. Cada arista de B se identifica con exactamente otra arista, de manera que los puntos de las aristas sí admiten una carta plana. La única singularidad en este caso proviene de los vértices de B , ya que todos

ellos se identifican en uno solo y por lo tanto, obtenemos una singularidad de ángulo cónico $(4g - 2)\pi$.

3. *S* homeomorfa a una suma conexa de g planos proyectivos. En este caso *S* se obtiene pegando las aristas de un $2g$ -ágono regular utilizando traslaciones. Nuevamente la única singularidad es la que proviene de los vértices del polígono, en este caso el ángulo cónico es de $2(g - 1)\pi$. \square

Si *S* es una superficie plana con singularidades cónicas en $\{p_1, p_2, \dots, p_l\}$ de ángulos cónicos $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_l$, entonces se satisface la siguiente relación conocida como el Teorema de Gauss-Bonnet poliédrico:

$$\sum_{i=1}^l \theta_i = 2\pi(l - \chi(S)) \quad (1)$$

Una demostración de este hecho se puede consultar en [2, Pág.107].

4. Estructuras planas con singularidades cónicas sobre \mathbb{S}^2

De la relación (1) se sigue que el mínimo número de singularidades cónicas que puede haber en la esfera es 3. En esta última sección estudiaremos el espacio que parametriza las distintas formas que hay de otorgarle a \mathbb{S}^2 una métrica plana con 3 singularidades cónicas (de cualesquiera ángulos) y con 4 singularidades cónicas con ángulos cónicos iguales a π . En ambos casos utilizaremos el siguiente resultado que se puede consultar en [3].

Teorema 4.1. *Supongamos que T es una métrica plana en la esfera con singularidades en p_0, p_1, \dots, p_l de ángulos cónicos menores que 2π . Si para toda i , $\gamma_i \subset T$ denota la geodésica mínima que une a p_0 con p_i , entonces $T \setminus \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_l\}$ es isométrico al interior de un $2l$ -ágono simple en \mathbb{C} .*

Aquí sólo estudiaremos la forma de las métricas planas sobre \mathbb{S}^2 y no el tamaño, de manera que podemos pensar que todas son de área 1.

4.1. Tres singularidades cónicas

Supongamos que T es una métrica plana en \mathbb{S}^2 con singularidades en p_0, p_1 y p_2 de ángulos cónicos θ_0, θ_1 y θ_2 . Si $\gamma_1, \gamma_2 \subset T$ son las geodésicas mínimas que unen p_0 con p_1 y p_2 y Q es el cuadrilátero que es isométrico a $T \setminus \{\gamma_1, \gamma_2\}$ (ver

Teorema 4), entonces Q tiene ángulos interiores $\theta_1, \theta_0/2, \theta_2$ y $\theta_0/2$. Además Q está dividido en dos triángulos congruentes por la diagonal que une los vértices de ángulos θ_1 y θ_2 . Para recuperar a Q basta identificar las aristas de Q mediante la reflexión en la recta determinada por dicha diagonal, de manera que Q se ve como el doble de un triángulo (empanada).

Es sabido que dados 3 números $\theta_0, \theta_1, \theta_2$ tales que $\theta_0 + \theta_1 + \theta_2 = 2\pi$ existe un único triángulo módulo semejanza. De aquí se sigue el siguiente resultado:

Teorema 4.2. *El espacio de métricas planas sobre \mathbb{S}^2 con 3 singularidades cónicas se corresponde con $\Theta(3) = \{(\theta_0, \theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^3 \mid \theta_0 \geq \theta_1 \geq \theta_2 > 0, \theta_0 + \theta_1 + \theta_2 = 2\pi\}$.*

4.2. Cuatro singularidades de ángulos cónicos iguales a π

Durante esta sección llamaremos disenoide a una métrica plana en \mathbb{S}^2 con cuatro singularidades cónicas y denotaremos con $\overline{pq} \subset \mathbb{C}$ al segmento que une a p con q . Comenzamos introduciendo el espacio de triángulos módulo semejanza orientada el cual utilizaremos para modelar a los disenoideos.

Si a cada punto $Z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$ le asociamos el conjunto $\{\overline{z_1 z_2} \cup \overline{z_2 z_3} \cup \overline{z_3 z_1}\} \subset \mathbb{C}$, entonces podemos pensar a \mathbb{C}^3 como el espacio de triángulos contenidos en \mathbb{C} . Decimos que los triángulos $Z = (z_1, z_2, z_3)$ y $W = (w_1, w_2, w_3)$ son equivalentes (escribimos $Z \sim W$) si existen $a, b \in \mathbb{C}$ con $a \neq 0$, tales que para toda i , $w_i = az_i + b$. Es claro que \sim define una relación de equivalencia \mathbb{C}^3 . Para calcular el cociente \mathbb{C}^3 / \sim , basta notar que dos triángulos Z, W en el subespacio $V = \{(0, z_2, z_3)\}$ son equivalentes si y sólo si $W = aZ$ con $a \neq 0$. De manera que $\mathbb{C}^3 / \sim \cong \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V = \mathbb{C}P^1 \cong \mathbb{S}^2$, aquí tenemos que olvidar el triángulo en el que todos los puntos coinciden (el $0 \in V$).

Supongamos que T es un disenoide con singularidades en p_0, p_1, p_2 y p_3 . Las geodésicas mínimas en T satisfacen:

1. Pueden existir a lo más dos geodésicas mínimas γ_i y γ'_i entre p_0 y p_i .
2. Si T es tal que entre p_0 y p_i existen dos geodésicas mínimas, entonces en T se cumple que para $j \neq i$, existe una única γ_j entre p_0 y p_j .

En este caso el hexágono que es isométrico a $T \setminus \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ (ver Teorema 4) tiene 3 ángulos interiores no adyacentes iguales a π , además la suma de los otros 3 también debe ser π . De manera que dicho hexágono se ve como un triángulo con los puntos medios de sus aristas marcados

(éstos provienen de las singularidades p_1, p_2, p_3). Podemos recuperar a T identificando las aristas de dicho triángulo con un doblado en su punto medio. Los triángulos que son isométricos a $T \setminus \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ son agudos o rectángulos. Resulta que los triángulos rectángulos corresponden a disfenoides sobre los que había 2 geodésicas mínimas, dichos disfenoides se ven como el doble de dos rectángulos. Con estas observacio-

nes llegamos al siguiente resultado:

Teorema 4.3. *El espacio de disfenoides se ve como el doble del triángulo hiperbólico ideal con ángulos $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{3}$.*

Una demostración rigurosa de este resultado se puede consultar en [4].

Referencias

- [1] W. Massey, *Algebraic Topology: An Introduction*, Graduate Texts in Mathematics No.56, Springer, 1977.
- [2] R. Evan, *Mostly Surfaces*, Student Mathematical Library Vol.60, AMS, 2011.
- [3] A. Boris & J. O'Rourke, *Nonoverlap of the Star Unfolding*, Discrete Comput. Geom., vol. 8, no. 3, pp. 219-250, 1992.
- [4] A. González & J. L. López-López, *Shapes of Tetrahedra with Prescribed Cone Angles*. Conform. Geom. Dyn. AMS, vol. 15, pp. 50-63, 2011.

Un Teorema de Trascendencia en Números

M. C. José Hernández Santiago

Posgrado Conjunto en Ciencias
Matemáticas UNAM-UMSNH

RESUMEN. En estas notas se demuestra, siguiendo a Serge Lang, una versión débil del siguiente resultado:

TEOREMA (de las seis exponenciales). Si $\{\beta_1, \beta_2\}$ y $\{z_1, z_2, z_3\}$ son subconjuntos de \mathbb{C} que son linealmente independientes sobre \mathbb{Q} , entonces al menos uno de los números

$$e^{\beta_1 z_1}, e^{\beta_1 z_2}, e^{\beta_1 z_3}, e^{\beta_2 z_1}, e^{\beta_2 z_2}, e^{\beta_2 z_3},$$

es trascendente.

1. Preliminares

Lema 1.1 (C. L. Siegel, 1949). Sea

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ \cdots \\ a_{r1}x_1 + \cdots + a_{rn}x_n = 0, \end{cases} \quad (1)$$

un sistema de r ecuaciones lineales en n incógnitas donde cada uno de los coeficientes a_{ij} es un número entero. Supóngase que $A \geq 1$ es tal que $|a_{ij}| \leq A$ para cada $1 \leq i \leq r$ y cada $1 \leq j \leq n$. Si $n > r$, entonces el sistema admite una solución no trivial $\mathbf{z} := (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{Z}^n$ que satisface lo sig.:

$$\|\mathbf{z}\|_\infty := \max_{1 \leq j \leq n} |z_j| \leq 2(nA)^{\frac{r}{n-r}}.$$

Demostración. La matriz $C := (a_{ij})_{1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq n}$ determina una transformación lineal de \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^r . Como cada una de las entradas de C es un número entero, se cumple que C manda \mathbb{Z}^n en \mathbb{Z}^r . Ahora bien, para cada $H \in \mathbb{N}$, denotemos con $\mathbb{Z}^n(H)$ al subconjunto de \mathbb{Z}^n conformado por aquellos $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$ tales que $\|\mathbf{x}\|_\infty \leq H$. En vista de que para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n(H)$ y $1 \leq \ell \leq r$ se verifica que

$$|a_{\ell 1}x_1 + \cdots + a_{\ell n}x_n| \leq nAH,$$

tenemos que la imagen de $\mathbb{Z}^n(H)$ bajo C es un subconjunto de $\mathbb{Z}^r(nAH)$. Luego, puesto que $|\mathbb{Z}^n(H)| = (2H+1)^n$ y $|\mathbb{Z}^r(nAH)| = (2[nAH]+1)^r$, se tiene que si

$$(2nAH+1)^r < (2H+1)^n, \quad (2)$$

entonces $C|_{\mathbb{Z}^n(H)}$ no es inyectiva. Esto permite garantizar la existencia de $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^n(H)$ (distintos) tales que $C(\mathbf{x}) = C(\mathbf{y})$; de esta igualdad y la

linealidad de C se sigue que $\mathbf{z} := \mathbf{x} - \mathbf{y}$ es una solución no trivial de (1) cuya norma infinito es

$$\|\mathbf{z}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_\infty + \|\mathbf{y}\|_\infty \leq 2H. \quad (3)$$

Para concluir la demostración, basta notar que, eligiendo $2H$ como el único número par tal que

$$(nA)^{\frac{r}{n-r}} - 1 \leq 2H < (nA)^{\frac{r}{n-r}} + 1,$$

se satisface la desigualdad en (2), tal como lo constatan los cálculos siguientes:

$$\begin{aligned} (2nAH+1)^r &< (nA)^r(2H+1)^r; \\ &\leq (2H+1)^{n-r}(2H+1)^r; \\ &= (2H+1)^n. \end{aligned}$$

□

Lema 1.2. Si r_1, \dots, r_k son números complejos distintos, entonces las funciones $f_i: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definidas por $f_i(t) = e^{r_i t}$ (para cada $t \in \mathbb{C}$) son linealmente independientes sobre \mathbb{C} .

Demostración. Es un ejercicio sencillo de álgebra lineal. □

Definición 1.1. Decimos que las funciones $f, g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ son **algebraicamente independientes** (sobre \mathbb{C}) si para cualquier $P \in \mathbb{C}[x, y] \setminus \{0\}$ resulta que $P(f, g)$ no es la función cero.

Proposición 1.1. Si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ son linealmente independientes sobre \mathbb{Q} , entonces las funciones $f_1(t) = e^{\alpha t}$ y $f_2(t) = e^{\beta t}$ son algebraicamente independientes.

Demostración. Supongamos que $P(x, y) = \sum_{i,j} a_{i,j} x^i y^j \in \mathbb{C}[x, y]$ es tal que $P(e^{\alpha t}, e^{\beta t}) = 0$ para todo $t \in \mathbb{C}$. Se sigue de esto que

$$0 = P(e^{\alpha t}, e^{\beta t}) = \sum_{i,j} a_{i,j} e^{(\alpha i + \beta j)t}.$$

Como α y β son linealmente independientes sobre \mathbb{Q} , los números $r_{ij} := \alpha i + \beta j \in \mathbb{C}$ son todos distintos. Aplicando el lema anterior, obtenemos que cada uno de los a_{ij} es igual 0, de lo cual se concluye que $P(x, y)$ es el elemento cero de $\mathbb{C}[x, y]$. \square

Proposición 1.2 (Principio del módulo máximo). *Sean $D \subseteq \mathbb{C}$ una región y $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa. Si $|f|$ tiene un máximo local en algún $z_0 \in D$, i.e., si $|f(z_0)| = \|f\|_U := \sup_{\zeta \in U} |f(\zeta)|$ en algún disco U centrado en z_0 y contenido en D , entonces f es constante.*

Demostración. Supongamos que f no es constante y que $|f(z_0)| > 0$. Puesto que, para cada $z \in U$ se cumple que $|f(z)| \leq |f(z_0)|$, se sigue que $f(U) \subseteq \overline{B_{|f(z_0)|}(0)}$. De esto y del hecho de que $f(z_0) \in f(U) \cap \partial(\overline{B_{|f(z_0)|}(0)})$ se concluye que $f(U)$ no es un abierto de \mathbb{C} , lo cual entra en contradicción con lo que establece el teorema de la aplicación abierta. \square

Corolario 1.1 (Desigualdad de Jensen). *Sea f una función holomorfa en $\{z \in \mathbb{C}: |z| \leq R\}$. Si $f(0) \neq 0$ y los ceros de f en $B_R(0)$ son z_1, z_2, \dots, z_N , entonces[†]*

$$|f(0)| \leq \|f\|_R (|z_1 \cdots z_N| / R^N).$$

Demostración. Resulta fácil convencerse de que

$$\frac{R^2 - z\bar{z}_n}{R(z - z_n)}$$

es un número complejo de módulo 1 cuando $|z| = R$. Por tanto,

$$g(z) = f(z) \prod_{n=1}^N \frac{R^2 - z\bar{z}_n}{R(z - z_n)}$$

es una función holomorfa en $\{z \in \mathbb{C}: |z| \leq R\}$ y $|g(z)| = |f(z)|$ si $|z| = R$. Aplicando el principio del módulo máximo a la función g se obtiene que

$$|g(z)| \leq \|f\|_R,$$

de lo cual se concluye que

$$|f(0)|R^N = |g(0)| |z_1 \cdots z_N| \leq \|f\|_R |z_1 \cdots z_N|.$$

\square

[†]Con $\|f\|_R$ denotamos en lo sucesivo al valor máximo de $|f|$ en la frontera del círculo de radio R centrado en el origen.

Corolario 1.2. *Sea f como en el corolario anterior. Para $r > 0$, denótese con $\nu(r) = \nu(f, r)$ al número de ceros de f , contados con multiplicidad, en $\{z \in \mathbb{C}: |z| < r\}$. Se tiene entonces que*

$$\int_0^R \frac{\nu(x)}{x} dx \leq \log \|f\|_R - \log |f(0)|.$$

Demostración. Primeramente demostraremos que

$$\sum_{n=1}^N \int_{|z_n|}^R \frac{1}{x} dx = \int_0^R \frac{\nu(x)}{x} dx. \quad (4)$$

Para $k \in \{1, \dots, N\}$, defínase $\chi_k: [0, R] \rightarrow \{0, 1\}$ como

$$\chi_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > |z_k| \\ 0 & \text{si } x \leq |z_k|. \end{cases}$$

Luego, en vista de que $\sum_{n=1}^N \chi_n(x) = \nu(x)$, se desprende que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \int_{|z_n|}^R \frac{1}{x} dx &= \sum_{n=1}^N \int_0^R \frac{\chi_n(x)}{x} dx; \\ &= \int_0^R \left(\sum_{n=1}^N \chi_n(x) \right) \frac{1}{x} dx; \\ &= \int_0^R \frac{\nu(x)}{x} dx. \end{aligned}$$

De (4) y la desigualdad de Jensen se concluye que

$$\begin{aligned} \int_0^R \frac{\nu(x)}{x} dx &= \sum_{n=1}^N (\log R - \log |z_n|); \\ &= \log \left(\frac{R^N}{|z_1 \cdots z_N|} \right) \leq \log \|f\|_R - \log |f(0)|. \end{aligned}$$

\square

El corolario 1.2 permitirá establecer una conexión entre el número de ceros de una función en un disco y la *tasa de crecimiento* de la función. Antes de enunciarla es preciso recordar que si f es función entera y ρ, A, B son constantes positivas tales que

$$|f(z)| \leq A e^{B|z|^\rho}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$, entonces se dice que f tiene **orden de crecimiento** $\leq \rho$. Al ínfimo de todos los $\rho > 0$ que satisfacen lo anterior se le denomina el **orden** de la función f .

Corolario 1.3. *Sea f una función entera distinta de la función idénticamente 0 que tiene orden de crecimiento $\leq \rho$. Existe $C > 0$ tal que $\nu(r) \leq Cr^\rho$ para cada r suficientemente grande.*

Demostración. Puede suponerse que $f(0) \neq 0$ pues, en caso contrario, $f(z) = z^\ell g(z)$ para algún $\ell \in \mathbb{N}$ y una función entera g que no se anula en $z = 0$, que también tiene orden de crecimiento $\leq \rho$ y tal que $v(f, r) = v(g, r) + \ell$ para todo $r > 0$.

Fijemos $r > 0$. Al aplicar el corolario 1.2 con $R = 2r$ se obtiene que

$$\begin{aligned} \log \|f\|_{2r} - \log |f(0)| &\geq \int_r^{2r} \frac{v(x)}{x} dx; \\ &\geq v(r) \int_r^{2r} \frac{1}{x} dx; \\ &= v(r) \log 2. \end{aligned}$$

Por otro lado, de la condición sobre el crecimiento de f se tiene que

$$\log \|f\|_{2r} \leq \log A e^{B(2r)^\rho} = \log A + (2^\rho B)r^\rho.$$

Así las cosas,

$$v(r) \leq \frac{\log A + (2^\rho B)r^\rho - \log |f(0)|}{\log 2}$$

y la demostración termina. \square

2. Demostración

Etapla 1. Sean $\beta_1, \beta_2, z_1, z_2, z_3$ como en la formulación del teorema. Sean $f, g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ las funciones definidas por las asignaciones $t \xrightarrow{f} e^{\beta_1 t}$ y $t \xrightarrow{g} e^{\beta_2 t}$. Probaremos, por *reductio*, que al menos uno de los seis números siguientes

$$\begin{aligned} f(z_1) &= e^{\beta_1 z_1}, f(z_2) = e^{\beta_1 z_2}, f(z_3) = e^{\beta_1 z_3}, \\ g(z_1) &= e^{\beta_2 z_1}, g(z_2) = e^{\beta_2 z_2}, g(z_3) = e^{\beta_2 z_3}, \end{aligned}$$

no pertenece a \mathbb{Z} . A fines de obtener un absurdo, supongamos lo opuesto. Sean n un cuadrado perfecto *suficientemente grande* y $r := (4n)^{\frac{3}{2}}$. Apelando al lema de Siegel podemos garantizar la existencia de $x_{ij} \in \mathbb{Z}$, no todos cero, tales que la función *auxiliar*

$$F := \sum_{1 \leq i, j \leq r} x_{ij} f^i g^j \quad (5)$$

se anula en cada uno de los elementos del conjunto

$$\mathcal{K}_n := \{\mathbf{k} \cdot \mathbf{z} : 1 \leq k_1, k_2, k_3 \leq n\}.$$

Nótese que el lema de Siegel se está aplicando aquí a un sistema de n^3 ecuaciones lineales en

[†]Vienen a continuación dos asertos importantes. En los recuadros respectivos bosquejamos las demostraciones de cada uno de ellos.

$r^2 = (4n)^3$ incógnitas; luego, puesto que para los coeficientes se tiene la estimación

$$\begin{aligned} |f^i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{z}) g^j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{z})| &\leq e^{i\beta_1(\mathbf{k} \cdot \mathbf{z}) + j\beta_2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{z})} \\ &\leq e^{r(|\beta_1| + |\beta_2|) \|\mathbf{k}\| \|\mathbf{z}\|} \\ &\leq e^{(|\beta_1| + |\beta_2|) \|\mathbf{z}\| r n \sqrt{3}} \\ &\leq C_1^{n^{\frac{5}{2}}} \end{aligned} \quad (6)$$

para alguna constante $C_1 \geq 1$, el lema de Siegel indica que los x_{ij} cumplen que

$$|x_{ij}| \leq 2(r^2 C_1^{n^{\frac{5}{2}}})^{\frac{n^3}{(4n)^3 - n^3}} = 2((4n)^3 C_1^{n^{\frac{5}{2}}})^{\frac{1}{63}} \leq (2)(4^{\frac{1}{21}}) C_2^{n^{\frac{5}{2}}} \quad (7)$$

para alguna constante $C_2 \geq 1$.

Etapla 2. Lo que se hará a continuación, a grandes rasgos, es utilizar información sobre el *comportamiento* de la función F en \mathcal{K}_n para exhibir un $\omega \in \mathcal{K} := \{\mathbf{k} \cdot \mathbf{z} : k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}\}$ de tal modo que $|F(\omega)|$ sea *pequeño* y $F(\omega) \neq 0$: estos requerimientos sobre ω son clave pues de ellos y del hecho de que $F(\omega) \in \mathbb{Z}$ se obtendrá la contradicción con la cual culminará la demostración.

En primer lugar, observemos que de la independencia algebraica de las funciones f y g se desprende que la función F no es idénticamente cero; por otro lado, el supuesto de que $f(z_1), f(z_2), f(z_3), g(z_1), g(z_2), g(z_3)$ son números enteros implica que $F(\mathcal{K}) \subseteq \mathbb{Z}$. Más aún, se tiene que[†]:

A. Existe $\mathbf{k} \cdot \mathbf{z} \in \mathcal{K}$ tal que $F(\mathbf{k} \cdot \mathbf{z}) \neq 0$.

Dem. A fines de obtener una contradicción, supongamos que $F(\mathbf{k} \cdot \mathbf{z}) = 0$ para cada $\mathbf{k} \cdot \mathbf{z} \in \mathcal{K}$. Para $r > 0$ la desigualdad $\|\mathbf{k}\| \leq \frac{r}{\|\mathbf{z}\| + 1}$ implica que $|\mathbf{k} \cdot \mathbf{z}| \leq \|\mathbf{k}\| \|\mathbf{z}\| < r$; en consecuencia,

$$\left| \frac{r}{\sqrt{3}(\|\mathbf{z}\| + 1)} \right|^3 \leq v(r).$$

Por otro lado, al ser F es una función de orden de crecimiento ≤ 1 , el corolario 1.3 implica que $v(r) \leq Cr$ para algún $C > 0$ y todo número r mayor que una constante absoluta $c > 0$. Puesto que las estimaciones obtenidas para $v(r)$ dan lugar a una desigualdad que no tiene sentido cuando r es suficientemente grande, el resultado se sigue.

B. El conjunto $S := \{s \in \mathbb{N} : F(\mathbf{k} \cdot \mathbf{z}) = 0 \text{ para todo } \mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{N}^3 \text{ t. q. } 1 \leq k_1, k_2, k_3 \leq s\}$ tiene un elemento máximo.

Dem. En caso contrario existe una sucesión $s_1 < s_2 < s_3 < \dots$ de números naturales tales que

$$F(\mathbf{k} \cdot \mathbf{z}) = 0$$

para cada $\ell \in \mathbb{N}$ y cada $\mathbf{k} \cdot \mathbf{z} \in \mathcal{K}_{s_\ell}$. De esto se colige que $F(\mathbf{k} \cdot \mathbf{z}) = 0$ para todo $\mathbf{k} \cdot \mathbf{z} \in \mathcal{K}$ (lo cual es absurdo en vista de lo establecido en **A**): en efecto, sea $\mathbf{k} \cdot \mathbf{z} \in \mathcal{K}$; si $m = \max\{k_1, k_2, k_3\}$ y $\ell \in \mathbb{N}$ es tal que $m < s_\ell$, entonces $\mathbf{k} \cdot \mathbf{z} \in \mathcal{K}_{s_\ell}$ y, en consecuencia, $F(\mathbf{k} \cdot \mathbf{z}) = 0$.

Luego, si s es el elemento máximo de S entonces $s \geq n$; además, si

$$\omega := \mathbf{k} \cdot \mathbf{z} \in \mathcal{K}_{s+1}$$

se elige de tal modo que $k_\nu = s + 1$ para algún $\nu \in \{1, 2, 3\}$, se tiene que $F(\omega) \neq 0$.

Etapa 3. Estimaremos ahora el módulo de $F(\omega)$ utilizando la siguiente identidad

$$F(\omega) = \lim_{t \rightarrow \omega} \left(\frac{F(t)}{\prod_{\mathbf{k} \cdot \mathbf{z} \in \mathcal{K}_s} (t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{z})} \right) \prod_{\mathbf{k} \cdot \mathbf{z} \in \mathcal{K}_s} (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{z}). \quad (8)$$

El número de factores de cada uno de los productos que aparecen en la identidad es s^3 . La función que aparece dentro de los paréntesis admite una extensión holomorfa a todo el plano complejo: consiguientemente, para estimar $|F(\omega)|$ podemos aplicar el principio del

módulo máximo en el círculo de radio $R = s^{\frac{3}{2}}$ centrado en el origen. Si t es un número complejo de módulo R (y, digamos*, $n \geq 4(|z_1| + |z_2| + |z_3|)^2$), entonces

$$|t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{z}| \geq R - |\mathbf{k} \cdot \mathbf{z}| = s^{\frac{3}{2}} - s(|z_1| + |z_2| + |z_3|) \geq \frac{s^{\frac{3}{2}}}{2} = \frac{R}{2}$$

y por tanto

$$\frac{|\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{z}|}{|t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{z}|} \leq \frac{2(|z_1| + |z_2| + |z_3|)s}{R} \leq \frac{C_3}{s^{\frac{1}{2}}}$$

para alguna constante $C_3 > 1$. Así pues, de (8) y la estimación**

$$\begin{aligned} \|F\|_R &\leq r^2(2)(4^{\frac{1}{21}})(C_2^{\frac{5}{2}})(C_4^{rR}); \\ &\leq (2)(4^{\frac{1}{21}})(4n)^3(C_2^{\frac{5}{2}})(C_4^{(4n)^{\frac{3}{2}} \cdot s^{\frac{3}{2}}}); \\ &\leq (2)(4^{3+\frac{1}{21}})(C_5^3); \\ &\leq C_6^3, \end{aligned}$$

se llega a que

$$\begin{aligned} \log |F(\omega)| &\leq \log \|F\|_R + \log \left(\frac{C_3}{s^{\frac{1}{2}}} \right)^{s^3}; \\ &= (\log(C_3 C_6))s^3 - \frac{1}{2}s^3 \log s. \end{aligned}$$

Puesto que la desigualdad en la línea anterior es absurda para s arbitrariamente grande, la demostración termina.

Referencias

- [1] S. Lang, *Transcendental numbers and diophantine approximations*, Bull. Amer. Math. Soc., vol. 77, number 5, pp. 635–677, 1971.
- [2] R. Murty & P. Rath, *Transcendental numbers*, Springer-Verlag, 2014.
- [3] C. L. Siegel, *Transcendental numbers*, Annals of Mathematics Studies (number 16), Princeton University Press, Princeton, NJ, USA, 1949.

*Aquí es donde cobra sentido el calificativo *suficientemente grande* con el que se adjetivó a n al inicio de esta sección.

**La constante C_2 proviene de (7) y C_4, C_5, C_6 son constantes mayores que 1.

El Grupo de Difeomorfismos del Espacio Afín

\mathbb{R}^n o \mathbb{C}^n

Dr. Jesús Muciño Raymundo
Profesor-Investigador del Centro en Ciencias
Matemáticas, UNAM-Morelia

RESUMEN. Los difeomorfismos o cambios de coordenadas aparecen en muchas situaciones. Por ejemplo para el resultado de Abel-Galois sobre la imposibilidad de resolver una ecuación general algebraica por radicales, o al enunciar el teorema de solución de ecuaciones diferenciales ordinarias. Ello ilustra una dicotomía: a veces los difeomorfismos son un lenguaje formal que nos permite enunciar resultados, otras veces hallarlos explícitamente resulta de máximo interés. Todos los difeomorfismos de un objeto forman un grupo. Se consideran los grupos de difeomorfismos de los objetos mas sencillos; los espacio afines reales o complejos, en cualquier dimensión.

1. Isomorfismos

Entre otras cosas, las matemáticas construyen modelos de las ciencias naturales y sociales, e incluso (tautológicamente) modelos de objetos emanados de ellas mismas. El ejemplo Neanderthal son los números naturales \mathbb{N} .

Dos objetos matemáticos son esencialmente el mismo cuando son iguales salvo isomorfismo.

Para fijar ideas: las distintas construcciones de los números naturales \mathbb{N} en notación, arábica, decimal, en chino, en maya, en binario etc., son iguales salvo isomorfismo.

A priori, la existencia de un isomorfismo entre dos objetos puede ser no trivial. Por ejemplo; al describir todas las parejas $p/q \in \mathbb{Q}$ que determinan un mismo número racional, vislumbramos el lugar privilegiado de los números primos en las matemáticas.

Dado un objeto matemático la pregunta ¿de cuántas maneras podemos escribirlo? De manera atingente, ello da origen a la noción de *automorfismo* de un objeto fijo.

Evidentemente todos los automorfismos de un objeto forman un *grupo* bajo la composición. El inverso es cierto naturalmente; todo grupo aparece como el grupo de automorfismos de un objeto. Ver V. I. Arnold [1].

Tres conceptos:

isomorfismo, automorfismo, grupo.

Nosotros miramos al cálculo elemental, considerando $r \in \{1, \dots, \infty\}$ fijo y dos abiertos U, V de \mathbb{R}^m .

Definición. Un *cambio de coordenadas* o *difeomorfismo* entre los abiertos U y V , de clase C^r , es una aplicación

$$\phi : U \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow V \subseteq \mathbb{R}^m$$

tal que

- i) ϕ es biyección,
- ii) ϕ es de clase C^r ,
- iii) ϕ^{-1} es también de clase C^r .

Para $U \neq V$, un difeomorfismo ϕ es un isomorfismo diferenciable.

Si $U = V$ entonces ϕ expresa la noción de automorfismo diferenciable.

2. Los cambios de coordenadas son útiles.

Ejemplo. *Clasificación de curvas planas.*

El grupo de difeomorfismos (o cambios de coordenadas) lineales es

$$GL(m, \mathbb{R}) = \{L : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m \mid \text{lineal e invertible} \}.$$

Adicionalmente el grupo de las transformaciones afines es el producto semidirecto del grupo general lineal y el grupo de translaciones, esto es

$$GL(m, \mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}^m = \{\phi : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m \mid \bar{x} \mapsto L(\bar{x}) + \bar{b} \}.$$

Una cónica en \mathbb{R}^2 es

$$\{(x, y) \mid a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4x + a_5y + a_6 = 0,$$

$$(a_1, a_2, a_3) \neq \bar{0}\} \subset \mathbb{R}^2.$$

La clasificación de cónicas salvo transformaciones afines es $\frac{\text{cónicas en } \mathbb{R}^2}{GL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^m}$ que consiste de:

un círculo	$x^2 + y^2 = 1$
una hipérbola	$x^2 - y^2 = 1$
una parábola	$y - x^2 = 0$
dos rectas que se cruzan	$xy = 0$
dos rectas paralelas	$x^2 - 1 = 0$
una recta doble	$x^2 = 0$
un punto	$x^2 + y^2 = 0$
el vacío	$x^2 + y^2 = a_6 < 0.$

Un problema muy interesante, estudiado desde I. Newton, es el caso de cúbicas.

¿Cuántas clases $\frac{\text{cúbicas en } \mathbb{R}^2}{GL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^m}$ hay?

Ejemplo. Resolución de ecuaciones algebraicas. Dado un grado $n \geq 1$, la aplicación de Viète \mathcal{V}_n es

$$\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^* \times \frac{\mathbb{C}^n}{S(n)} \xrightarrow{\mathcal{V}_n} \mathbb{C}^{n+1} - \{c_n = 0\}$$

$$\xleftarrow{\mathcal{V}_n^{-1}}$$

$$(c_n, z_1, \dots, z_n) \longmapsto (c_n, [z_1, \dots, z_n]) \longmapsto (c_n, c_{n-1}, \dots, c_0)$$

$$= (c_n, -c_n(z_1 + \dots + z_n), \dots, (-1)^n c_0(z_1 \cdots z_n))$$

$$= c_n(z - z_1) \cdots (z - z_n) = c_n z^n + \dots + (-1)^n c_0(z_1 \cdots z_n).$$

Donde $S(n)$ es el grupo de permutaciones. Partiendo del coeficiente líder y las raíces con orden (c_n, z_1, \dots, z_n) obtenemos:

el polinomio con raíces sin orden, $c(z - z_1) \cdots (z - z_n)$, mismo que bajo \mathcal{V}_n va en los coeficientes de $c_n z^n + \dots + c_1 z + c_0$.

Teorema.

1. La aplicación

$$\mathcal{V}_n : U \subset \mathbb{C} \times \frac{\mathbb{C}^n}{S(n)} \longrightarrow V \subset \mathbb{C}^{n+1}$$

es un difeomorfismo (holomorfo) para cada bola abierta U suficientemente pequeña, con centro en raíces sin repetición (z_1, \dots, z_n) .

2. \mathcal{V}_n^{-1} no existe como función en todo $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{c_n \neq 0\}$.

El teorema nos dice que \mathcal{V}_n es difeomorfismo en ciertos dominios y que hay puntos singulares (donde la diferencial $D\mathcal{V}_n$ es de rango menor o igual a n), que provienen de las raíces repetidas. La geometría de \mathcal{V}_n es intrincada [10].

Recordemos el siguiente resultado clásico, un diccionario.

Ejemplo. Resolución de ecuaciones diferenciales.

Teorema. E. Picard. Sobre \mathbb{R}^m existe una correspondencia biyectiva entre:

i) Campos vectoriales de clase C^1

$$V : \mathbb{R}^m \longrightarrow T\mathbb{R}^m$$

$$(x_1, \dots, x_m) \longmapsto V_1(x_1, \dots, x_m) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + V_m(x_1, \dots, x_m) \frac{\partial}{\partial x_m}.$$

ii) Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de clase C^1

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = V_1(x_1, \dots, x_m) \\ \vdots \\ \frac{dx_m}{dt} = V_m(x_1, \dots, x_m). \end{cases}$$

iii) Flujos locales de clase C^1

$$\Phi : \Omega \subseteq (\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^m) \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$(t, (x_1, \dots, x_m)) \longmapsto \Phi(t, (x_1, \dots, x_m)),$$

donde por definición $\Phi(t, \dots) = Id$ en \mathbb{R}^m y $\Phi(t_1, \dots) \circ \Phi(t_2, \dots) = \Phi(t_1 + t_2, \dots)$ cuando ambas composiciones están bien definidas.

La correspondencia (i) – (ii) es simple notación. Mientras que (ii) \Rightarrow (iii) sigue de

$$\Phi(t, (x_1, \dots, x_m)) = \begin{cases} \text{posición } (x_{1t}, \dots, x_{mt}) \text{ después} \\ \text{de tiempo } t \text{ de la trayectoria} \\ \text{solución de (ii) que a tiempo} \\ t = 0 \text{ estaba en } (x_1, \dots, x_m). \end{cases}$$

Que descansa en la existencia y unicidad de soluciones como sigue.

Teorema. E. Picard. Si el campo vectorial V no se anula en un punto (x_1, \dots, x_m) , entonces existe un difeomorfismo ϕ de clase C^1 en una vecindad U del punto, tal que transforma el campo vectorial V en un nuevo campo vectorial

$$\phi_* V = 1 \frac{\partial}{\partial x_1} + 0 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + 0 \frac{\partial}{\partial x_m} \text{ sobre } \phi(U).$$

La hipótesis es simple; V de clase C^1 en \mathbb{R}^m y no nulo en el punto. La conclusión es muy fuerte; la existencia y unicidad de las soluciones.

Es bien conocido que para campos vectoriales polinomiales V en \mathbb{R}^2 de grado 1, la solución es elemental y explícita, presentándose casi una docena de comportamientos cualitativos. Mientras que en \mathbb{R}^2 , para V de grado 2 no hay esperanza de hallar soluciones explícitas en lo general y se esperan alrededor de 2500 comportamientos cualitativos.

Observación. ¿Por qué los cambios de coordenadas son útiles?

Consideremos un cambio de coordenadas

$$\phi : U \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^m$$

de clase C^r , sucede que:

- i) ϕ envía puntos p de U en puntos $\phi(p)$ de V .
- ii) ϕ envía trayectorias $\gamma \subset U$ en trayectorias $\phi \circ \gamma \subset V$.
- iii) ϕ envía vectores tangentes $\frac{d\gamma}{dt}$ de U en vectores tangentes $\frac{d(\phi \circ \gamma)}{dt}$ de V .
- iv) ϕ envía ecuaciones diferenciales de U en ecuaciones diferenciales en V .
- v) ϕ envía funciones $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ en funciones $f \circ \phi^{-1} : V \longrightarrow \mathbb{R}$.
- vi) ϕ envía soluciones de una ecuación diferencial de U en soluciones de la ecuación diferencial respectiva en V .

⋮

Donde los puntos suspensivos nos sugieren que esta idea puede aplicarse a todo tipo de objetos, ver Fig. 1. Dicho de manera tautológica, un cambio de coordenadas ϕ : lleva un objeto matemático O sobre U en otro objeto ϕ_*O sobre V , de manera fiel. Ver la introducción de [13]. Como ilustración en el análisis recordemos el:

Lema. Para un difeomorfismo

$$\phi = (u, v) : U \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow V \subset \mathbb{C}$$

de clase C^2 son equivalentes los siguientes hechos.

- i) ϕ lleva soluciones de la ecuación de Laplace $\Delta f = 0$ sobre U , en soluciones de la ecuación de Laplace sobre V .
- ii) ϕ es holomorfa.

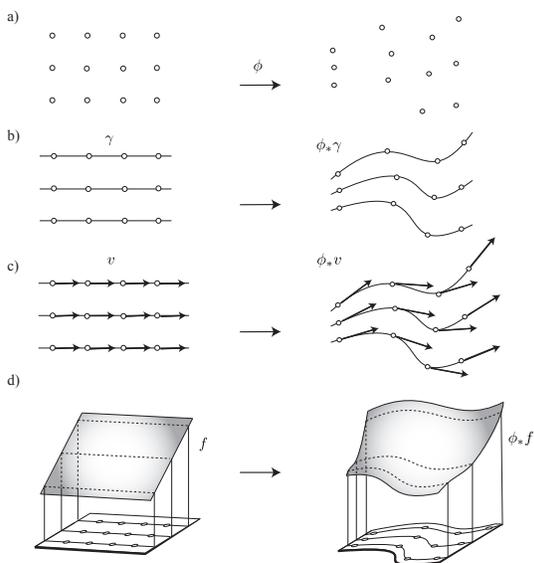


Fig 1. Un difeomorfismo local ϕ transforma; a) puntos en puntos, b) trayectorias en trayectorias, c) vectores tangentes en vectores tangentes, d) funciones en funciones.

3. La conjetura Jacobiana.

Consideremos \mathbb{K} el campo real \mathbb{R} o complejo \mathbb{C} y

$$\phi = (\phi_1, \dots, \phi_m) : \mathbb{K}_{z_1, \dots, z_m}^m \longrightarrow \mathbb{K}_{w_1, \dots, w_m}^m$$

una aplicación polinomial. Es posible definir su matriz Jacobiana DF y supondremos de ahora en adelante que $\det(D\phi) \neq 0$ en todo punto de \mathbb{K}^m .

Claramente, si $\phi : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es un difeomorfismo polinomial, entonces necesariamente $\det(D\phi)$ no se anula para todo punto de \mathbb{R}^m .

La conjetura Jacobiana. Si $\det(D\phi) \neq 0$ entonces la aplicación polinomial inversa

$$\phi^{-1} : \mathbb{K}_{w_1, \dots, w_m}^m \longrightarrow \mathbb{K}_{z_1, \dots, z_m}^m$$

existe.

Esta conjetura fue propuesta por O. H. Keller en 1939, [11]. La conjetura Jacobiana es falsa para aplicaciones polinomiales en \mathbb{R}^m , cuando permitimos que $\det(DF) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ sea un polinomio no nulo y no constante.

Contra-ejemplo de S. Pinchuk (1994). La aplicación polinomial $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \phi = (\phi_1(x, y), \phi_2(x, y)) = & \\ & (x^6y^4 - 4x^5y^3 + 3x^4y^3 + 6x^4y^2 - 7x^3y^2 - 4x^3y \\ & + 3x^2y^2 + 5x^2y + x^2 - 3xy - x + y, 2xy - 57x^2y^2 \\ & + 45x^5y^4 - 100x^4y^3 + 106x^3y^3 + 50x^3y^2 + \frac{39}{2}x^4y^4 \\ & + 50xy^2 - \frac{167}{4} - 16x^5y^5 + 25x^7y^6 + 10x^6y^5 \\ & - 5x^3y^4 - 45x^9y^8 - 60x^8y^7 + 60x^7y^7 - 54x^6y^6 \\ & + 30x^5y^6 - 75x^{11}y^{10} + 150x^{10}y^9 - 150x^9y^9 \\ & + \frac{525}{4}x^8y^8 - 75x^7y^8) \end{aligned}$$

cumple que $\det(D\phi) \neq 0$ en todo punto de \mathbb{R}^2 y sin embargo ϕ no es invertible. Como consecuencia del contra-ejemplo:

los difeomorfismos polinomiales de \mathbb{C}^m forman un subgrupo propio de los difeomorfismos polinomiales de \mathbb{R}^m .

4. ¿Por qué la conjetura Jacobiana es difícil?

Teorema. N. H. Abel – E. Galois. Para todo abierto D del espacio de polinomios

$$\{P(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_1 z + c_0 : C_z \longrightarrow C_w\} \subset C^{n+1},$$

si $P(z) \in \mathcal{D}$ entonces el despeje $z = P^{-1}(w)$ es imposible por radicales.

Esto es, para dimensión $m \geq 2$, la conjetura Jacobiana en \mathbb{K}^m es difícil ya que, ella afirma que dado el sistema algebraico

$$\begin{cases} \phi_1(z_1, \dots, z_m) = w_1 \\ \vdots \\ \phi_m(z_1, \dots, z_m) = w_m \end{cases}$$

bajo la condición $\det(D\phi) \neq 0$, existe el despeje polinomial

$$\begin{cases} \phi_1^{-1}(w_1, \dots, w_m) = z_1 \\ \vdots \\ \phi_m^{-1}(w_1, \dots, w_m) = z_m. \end{cases}$$

Ejemplo afirmativo. Un movimiento de cartas en la m -ésima dirección es

$$\phi : (z_1, \dots, z_m) \mapsto (z_1, \dots, z_{m-1}, h(z_1, \dots, z_{m-1}))$$

donde por definición h es polinomial, ver Fig. 2. Para tal ϕ el sistema de ecuaciones algebraicas

$$\begin{cases} z_1 = w_1 \\ \vdots \\ z_{m-1} = w_{m-1} \\ z_m + h(z_1, \dots, z_{m-1}) = w_m \end{cases}$$

puede despejarse, obteniéndose ϕ^{-1} polinomial.

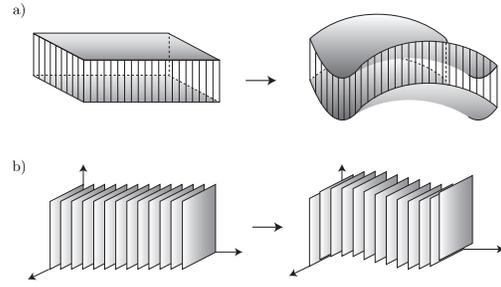


Fig 2. a) Un movimiento de cartas $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. b) Una composición $\phi_j \circ \phi_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de movimientos de cartas en distintas direcciones.

Observación. Todos los movimientos de cartas polinomiales $\{\phi\}$ en la j -ésima dirección forman un grupo bajo la composición.

ii) Todos los movimientos de cartas polinomiales $\{\phi\}$ en todas las direcciones $j \in 1, \dots, m$ forman un grupo bajo la composición.

Esto es la conjetura pregunta si:
¿todo automorfismo polinomial es composición finita de movimientos de cartas?

Es posible mostrar que la Conjetura Jacobiana puede enunciarse usando al menos las siguientes teorías sobre \mathbb{R}^n y \mathbb{C}^m :

- Las ecuaciones diferenciales ordinarias.
 - El álgebra conmutativa.
 - La topología de cubiertas y fibraciones.
 - Las singularidades de curvas algebraicas.
 - La geometría diferencial de métricas planas.
- Etc.

Referencias

- [1] V. I. Arnold, *On teaching mathematics*. <http://pauli.uni-muenster.de/~munsteg/arnold.html>
- [2] H. Bass, G. Meisters, *Polynomial flows in the plane*, Advances in Mathematics, Vol. 55, 2 (1985), 173–208.
- [3] H. Bass, et. al. ed., *Polynomial Automorphisms and Related Topics*, Publising House of Sci. and Tech. Hanoi Vietnam, 2007.
- [4] M. Brunella, *Complete polynomial vector fields on the complex plane*, Topology, Vol. 43, 2 (2004), 433–445.
- [5] A. Bustinduy, L. Giraldo, J. Muciño–Raymundo, *Jacobian mates for non singular polynomial maps in \mathbb{C}^n with one–dimensional fibers*, J. of Singularities. Vol. 9 (2014), 27–42.
- [6] A. Bustinduy, L. Giraldo, J. Muciño–Raymundo, *Vector fields from locally invertible polynomial maps in \mathbb{C}^n* , Colloquium Math. Vol. 140, No. 2 (2015), 205–220.
- [7] A. van den Essen, ed., *Automorphisms of Affine Spaces*, Kluwer, 1995.
- [8] A. van den Essen, *Polynomial Automorphisms and the Jacobian Conjecture*, Birkhäuser Verlag, Germany, 2000.
- [9] F. Forsternic, *Stein Manifolds and Holomorphic Mappings*, Springer, Dordrecht, 2011.
- [10] G. Katz, *How tangents solve algebraic equations, or a remarkable geometry of discriminant varieties*, Expo. Math., Vol. 21, No. 3, (2003), 219–261.
- [11] O.–H. Keller, *Ganze Cremona–Transformationen*, Monatsch. Math. Phys. 47 (1939), 299–306.
- [12] L. Lempert, E. Andersen, *On the group of holomorphic automorphisms of \mathbb{C}^n* , Inventiones mathematicae Vol. 110, 2 (1992), 371–388.
- [13] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer Verlag, New York, 1978.
- [14] J. Muciño–Raymundo, *Algunos problemas de geometría en \mathbb{R}^n y \mathbb{C}^n para el siglo XXI*, Miscelánea Matemática, Vol. 30 (2000), 41–58.
- [15] J.–P. Rosay, W. Rudin, *Holomorphic maps from \mathbb{C}^n to \mathbb{C}^n* , Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 310 (1988), 47–86.
- [16] S. Smale, *Mathematical problems for the next century*, The Mathematical Intelligencer, Vol. 20, 2 (1998), 7–15.

El Uso del Axioma de Martin en Pruebas de Independencia

M. C. Sonia Navarro Flores
Posgrado Conjunto en Ciencias
Matemáticas UNAM-UMSNH

RESUMEN. El objetivo de estas notas es usar el Axioma de Martin para mostrar la independencia de la proposición que dice que la propiedad topológica de ser *ccc* es productiva. Para lograr el objetivo vamos a revisar varios resultados de topología y teoría de conjuntos primero.

En estas notas ω denotará la colección de los números naturales $\{0, 1, 2, \dots\}$ y como ω es un número ordinal y un número cardinal también representa su tamaño. ω_1 representa el primer ordinal no numerable. Si X es un conjunto, $\mathcal{P}(X)$ es la colección de todos los subconjuntos de X . \aleph denota el tamaño de \mathbb{N} .

1. La condición de la cadena numerable y la línea de Suslin

Definición 1.1. Un espacio topológico tiene la condición de la cadena numerable (o es *ccc*) si cualquier colección de subconjuntos abiertos, no vacíos y ajenos por pares es a lo más numerable.

Lema 1.1. Cada espacio topológico separable tiene la *ccc*.

Además en espacios métricos las propiedades de ser *ccc* y separable son equivalentes.

Definición 1.2. Si $(X, <)$ es un conjunto totalmente ordenado, la topología del orden sobre X es la topología que tiene como base a los intervalos de la forma (x, y) , (x, ∞) , (y, ∞) con $x, y \in X$.

Se sabe que cualquier conjunto totalmente ordenado sin extremos que es separable y conexo con la topología del orden es isomorfo a \mathbb{R} con su orden usual. En 1920 M. Suslin conjeturó que si se pide que el espacio sea *ccc* en lugar de separable se sigue teniendo que el espacio es isomorfo a los reales.

Definición 1.3. Sea $(X, <)$ un conjunto totalmente ordenado sin extremos. Decimos que $(X, <)$ es una línea de Suslin si es un espacio *ccc* con la

topología del orden pero no es separable con la misma.

Observamos que de existir una línea de Suslin entonces la conjetura de Suslin sería falsa. En topología resulta natural preguntarse cuándo una propiedad se preserva bajo operaciones de espacios, por ejemplo, bajo el producto topológico. Por lo tanto es natural preguntarse si el producto topológico de espacios *ccc* es *ccc*. El resultado más cercano a lo que queremos saber que se tiene en topología general es el siguiente.

Teorema 1.1. Sea $\{X_i : i \in I\}$ colección de espacios con la *ccc*. Si el producto de cualquier colección finita de tales espacios es *ccc* entonces entonces el producto topológico $\prod_{i \in \omega} X_i$ es *ccc*.

Lema 1.2. Si $(X, <)$ es un conjunto totalmente ordenado que tiene la *ccc* pero no es separable con la topología del orden entonces $X \times X$ no es *ccc* con la topología producto.

Demostración. Para cada $\alpha < \omega_1$ elegiremos $a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha \in X$ que cumplan lo siguiente:

1. $a_\alpha < b_\alpha < c_\alpha$;
2. $(a_\alpha, b_\alpha) \neq \emptyset$ y $(b_\alpha, c_\alpha) \neq \emptyset$;
3. $\xi < \alpha$ implica que $b_\xi \notin (a_\alpha, b_\alpha)$.

Suponiendo que se pueden construir tales sucesiones, los conjuntos $(a_\alpha, b_\alpha) \times (b_\alpha, c_\alpha)$ son una cantidad no numerable de conjuntos abiertos no vacíos y ajenos por pares. Ahora vamos a construir las sucesiones. La elección de los $a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha$ se hará por recursión sobre $\alpha < \omega_1$. Sea I el conjunto de los puntos aislados de X , es decir, de los puntos $x \in X$ tales que $\{x\}$ es un conjunto abierto. Note que como X es *ccc*,

$|X| \leq \omega$. Primero elija $a_0, b_0, c_0 \in X$ de forma que $a_0 < b_0 < c_0$. Ahora tome $\beta < \omega_1$ y suponga que ya hemos elegido $\{a_\alpha\}_{\alpha < \beta}$, $\{b_\alpha\}_{\alpha < \beta}$ y $\{c_\alpha\}_{\alpha < \beta}$. Sea $D = I \cup \bigcup \{a_\alpha\}_{\alpha < \omega} \cup \bigcup \{b_\alpha\}_{\alpha < \omega} \cup \bigcup \{c_\alpha\}_{\alpha < \omega}$, como D es numerable X no es separable se cumple que $X \setminus cl(D) \neq \emptyset$. Como $X \setminus cl(D)$ es un abierto no vacío existe un intervalo $(a_\alpha, c_\alpha) \subseteq X \setminus cl(D)$ no vacío y sin puntos aislados, por lo tanto podemos elegir $b_\alpha \in (a_\alpha, c_\alpha)$ de forma que $(a_\alpha, b_\alpha) \neq \emptyset$ y $(b_\alpha, c_\alpha) \neq \emptyset$.

Por lo tanto si existiera una línea de Suslin tendríamos que la propiedad de ser *ccc* no es productiva. En el libro Set Theory de Kenneth Kunen se prueba que la existencia de una línea de Suslin es consistente con ZFC, por lo tanto existe un modelo donde hay una línea de Suslin y por lo tanto existe un modelo donde la propiedad de ser *ccc* no es productiva. \square

2. Teoría de conjuntos

Ahora presentaremos el lenguaje de la teoría de conjuntos. Los conjuntos serán términos indefinidos y la relación de pertenencia será una relación binaria indefinida que satisface los siguientes axiomas:

1. Axioma de existencia: $\exists x(x = x)$.
2. Axioma del par: $\forall x, y \exists z \forall w (w \in z \Leftrightarrow w = x \vee w = y)$.
3. Axioma de unión: $\forall x \exists z \forall w (w \in z \Leftrightarrow \exists y (y \in x \wedge w \in y))$.
4. Axioma de potencia: $\forall x \exists z \forall w (w \in z \Leftrightarrow \forall v (v \in w \Rightarrow v \in x))$.
5. Axioma de infinito: $\exists x (x \neq \emptyset \wedge \forall y (y \in x \Rightarrow y \cup \{y\} \in x))$.
6. Axioma de extensionalidad: $\forall x, y (x = y \Leftrightarrow \forall w (w \in x \Leftrightarrow w \in y))$.
7. Axioma de comprensión: Dada una fórmula φ con una variable libre $\forall x \exists z \forall w (w \in z \Leftrightarrow w \in x \wedge \varphi(w))$.
8. Axioma de reemplazo: Dada una fórmula φ con dos variables libres tal que $\varphi(x, y) = \varphi(x, z)$ implica $y = z$, $\forall x \exists z \forall w (w \in z \Leftrightarrow \exists v \in x \varphi(v, w))$.
9. Axioma de elección: $\forall x (\forall y (y \in x \Rightarrow y \neq \emptyset) \Rightarrow \prod_{y \in x} y \neq \emptyset)$.
10. Axioma de regularidad: $\forall x (x \neq \emptyset \Rightarrow \exists y (y \in x \wedge \forall w (w \in x \Rightarrow w \notin y)))$.

La teoría de conjuntos es la teoría que consta de las deducciones que se pueden hacer partiendo de los axiomas anteriores. La forma de

probar que una proposición p es independiente de una teoría es encontrando dos modelos de dicha teoría tales que uno satisface la proposición p y el otro su negación.

3. El Axioma de Martin y la Hipótesis del continuo

Primero vamos a hablar de la hipótesis del continuo. Cantor probó que para cualquier conjunto X , $|X| < |\mathcal{P}(X)|$. En particular, si $X = \omega$ tenemos que $|\omega| < |\mathcal{P}(\omega)| = |\mathbb{R}|$, es decir, $\omega < \mathfrak{c}$. En 1878 Cantor conjeturó que $\mathfrak{c} = \omega_1$, es decir, que no existe $Y \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\omega_1 < |Y| < \mathfrak{c}$. Años más tarde gracias al trabajo de Cohen se supo que la hipótesis del continuo no se puede probar a partir de los axiomas de la teoría de conjuntos y su negación tampoco.

De ahora en adelante diremos que $(\mathbb{P}, <)$ es un orden parcial para denotar que: $(\mathbb{P}, <)$ es un orden parcial y existe un elemento $1 \in \mathbb{P}$ tal que para todo $p \in \mathbb{P}$, $p \leq 1$.

Definición 3.1. Sean $(\mathbb{P}, <)$ un orden parcial y $p, q \in \mathbb{P}$

1. Diremos que p y q son compatibles si existe $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leq p$ y $r \leq q$.
2. Diremos que p y q son incompatibles si no son compatibles.
3. $C \subseteq \mathbb{P}$ es una cadena si cualesquiera dos de sus elementos son compatibles.
4. $A \subseteq \mathbb{P}$ es una anticadena si cualesquiera dos de sus elementos son incompatibles.
5. Diremos que \mathbb{P} tiene la *ccc* si cualquier anticadena es de tamaño a lo más numerable.
6. $D \subseteq \mathbb{P}$ es un conjunto denso en \mathbb{P} si para cada $p \in \mathbb{P}$ existe $q \in D$ tal que $q \leq p$.

Definición 3.2. Sea \mathbb{P} un orden parcial, $G \subseteq \mathbb{P}$ es un filtro si

1. $1 \in G$,
2. para cada $p, q \in G$ existe $r \in G$ tal que $r \leq p$ y $r \leq q$ y
3. para cada $p \in \mathbb{P}$ y $q \in G$ tales que $q \leq p$ se tiene que $p \in G$.

Ahora enunciaremos el Axioma de Martin, el cual es consistente con que el continuo sea arbitrariamente grande.

Definición 3.3. El Axioma de Martin es la proposición que dice que si \mathbb{P} es un orden parcial *ccc* y \mathcal{D} es una familia de menos que \mathfrak{c} conjuntos densos en \mathbb{P} entonces existe un filtro $G \subseteq \mathbb{P}$ tal que G interseca a cada elemento de \mathcal{D} .

En general, si \mathbb{P} es un orden parcial y κ un cardinal, $MA_{\mathbb{P}}(\kappa)$ es la proposición que dice que si \mathcal{D} es una familia de conjuntos densos en \mathbb{P} de tamaño a lo más κ entonces existe un filtro G sobre \mathbb{P} tal que $G \cap D \neq \emptyset$ para cada $D \in \mathcal{D}$. $MA(\kappa)$ dice que $MA_{\mathbb{P}}(\kappa)$ ocurre para cada orden \mathbb{P} que es *ccc*. Note que el Axioma de Martin (MA) es la proposición que dice que para cada $\kappa < \mathfrak{c}$, $MA(\kappa)$ ocurre.

Lema 3.1. Sea \mathbb{P} un orden parcial y \mathcal{D} una familia numerable de conjuntos densos en \mathbb{P} . Si fijamos $p \in \mathbb{P}$ existe un filtro G sobre \mathbb{P} tal que $p \in G$ y G interseca a cada denso en \mathcal{D} .

El siguiente lema nos dice que el Axioma de Martin implica el Teorema de la categoría de Baire.

Lema 3.2. Sea X un espacio compacto, hausdorff y con la *ccc*. Suponga que el Axioma de Martin se cumple y para cada $\alpha < \omega$ sea $H_\alpha \subseteq X$ cerrado nunca denso. Entonces $\bigcup_{\alpha < \omega} H_\alpha \neq X$.

Demostración. Sea \mathcal{O}_X la colección de todos los conjuntos abiertos no vacíos de X ordenado con la contención y note que es un orden parcial donde $1 = X$. Además como X es *ccc*, el orden parcial \mathcal{O}_X es *ccc*. Observe que si G es un filtro sobre \mathcal{O}_X entonces $p, q \in G$ implica $p \cap q \in G$. Para cada $\alpha < \omega$ sea $D_\alpha = \{q \in \mathcal{O}_X : cl(q) \cap H_\alpha = \emptyset\}$. Cada D_α es denso pues si tomamos $p \in \mathbb{P}$, como los H_α son conjuntos nunca densos y los espacios hausdorff compactos son regulares, podemos encontrar q abierto no vacío tal que $cl(q) \subseteq p \setminus H_\alpha$. Por el Axioma de Martin, existe un filtro G sobre \mathcal{O}_X tal que G interseca a cada D_α . Sea $F_G = \bigcup \{cl(p) : p \in G\}$, por la compacidad de X , $F_G \neq \emptyset$ y note que por definición evita a todos los H_α . \square

Ahora probaremos que el Axioma de Martin implica que la propiedad de ser *ccc* en espacios topológicos es productiva.

Definición 3.4. Si $(\mathbb{P}, \leq, 1)$ es un orden parcial y $s \in \mathbb{P}$, $s \downarrow$ es el orden parcial (\mathbb{S}, \leq, s) donde $\mathbb{S} = \{p \in \mathbb{P} : p \leq s\}$, \leq es el orden de \mathbb{P} restringido a \mathbb{S} .

Observamos que si $D \subseteq \mathbb{P}$ es denso abajo de s entonces $D \cap s \downarrow$ es denso en $s \downarrow$.

Lema 3.3. Si \mathbb{P} es un orden parcial *ccc* y $s \in \mathbb{P}$ entonces $s \downarrow$ es *ccc*. Si $G \subseteq s \downarrow$ es un filtro en el orden parcial $s \downarrow$ entonces $G^* = \{p \in \mathbb{P} : \exists q \in G \ q \leq p\}$, entonces G^* es un filtro sobre \mathbb{P} y $G^* \cap s \downarrow = G$.

Lema 3.4. $MA(\omega_1)$ implica que si \mathbb{P} es un orden parcial *ccc* entonces cada vez que tomamos una colección de ω_1 elementos de \mathbb{P} , $p_\alpha \in \mathbb{P}$ con $\alpha < \omega_1$, existe $B \in [\omega_1]^{\omega_1}$ tal que para cualesquiera $\alpha, \beta \in B$, p_α y p_β son compatibles.

Demostración. Sea $\{p_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subseteq \mathbb{P}$. Encontraremos un filtro que contenga ω_1 de los p_α lo cual es suficiente para probar que son compatibles. Para cada $\alpha < \omega_1$, sea $D_\alpha = \{q \in \mathbb{P} : \exists \beta \geq \alpha (q \leq p_\beta)\}$. Suponga que existe $s \in \mathbb{P}$ tal que todos los D_α son densos abajo de s . Como $s \downarrow$ es un orden parcial *ccc*, $MA(\omega_1)$ implica que existe un filtro G sobre $s \downarrow$ que interseca a todos los $D_\alpha \cap s \downarrow$, y por el Lema anterior existe un filtro G^* sobre \mathbb{P} que interseca a todos los D_α . Como los filtros son cerrados bajo superconjuntos y cada $\alpha < \omega_1$, $G^* \cap D_\alpha \neq \emptyset$, para cada $\alpha < \omega_1$ existe $\beta \geq \alpha$ tal que $p_\beta \in G^*$. Entonces el conjunto $\{\beta : p_\beta \in G^*\}$ es de tamaño ω_1 .

Ahora suponga que no existe tal s . Entonces para cada $\xi < \omega_1$ existe $\alpha_\xi > \xi$ tal que D_{α_ξ} no es denso abajo de p_{α_ξ} , entonces existe $r_\xi \leq p_{\alpha_\xi}$ tal que no es cierto que $\exists q \leq r_\xi (q \in D_{\alpha_\xi})$, lo que significa que no es cierto que $\exists q \leq r_\xi \exists \beta \geq \alpha_\xi (q \leq p_\beta)$ entonces $\forall \beta \geq \alpha_\xi$ (r_ξ es incompatible con p_β), y como $r_\beta \leq p_\beta$, $\forall \beta \geq \alpha_\xi$ (r_ξ es incompatible con r_β). Ahora, por recursión sobre $\nu < \omega_1$ elegimos $\xi_\nu < \omega_1$ tal que $\mu < \nu$ implica $\xi_\nu > \alpha_{\xi_\mu}$, entonces $\mu < \nu$ implica que r_{ξ_ν} es incompatible con r_{ξ_μ} lo cual no puede ser pues X es *ccc*. \square

Lema 3.5. Asuma $MA(\omega_1)$ y sean \mathbb{P}, \mathbb{Q} órdenes parciales *ccc*. Entonces $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ es *ccc*.

Demostración. Veamos por contradicción. Sea $\{(p_\alpha, q_\alpha) : \alpha < \omega_1\}$ una anticadena en $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$. Entonces si $\alpha \neq \beta$, (p_α, q_α) es incompatible con (p_β, q_β) y por tanto p_α es incompatible con p_β o q_α es incompatible con q_β .

Fije $B \in [\omega_1]^{\omega_1}$ tal que para cada $\alpha, \beta \in B$ q_α y q_β son compatibles entonces $\{p_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ es una anticadena en \mathbb{P} de tamaño ω_1 lo cual no puede ocurrir pues \mathbb{P} es *ccc*. \square

Aplicando inducción y el lema anterior se prueba el siguiente teorema.

Teorema 3.1. Asuma $MA(\omega_1)$ y sea $\{\mathbb{P}_i : i \in I\}$ una colección de órdenes parciales *ccc*. Entonces $\prod_{i \in I} \mathbb{P}_i$ es *ccc*.

Para cualquier espacio topológico X *ccc*, el orden parcial de sus abiertos \mathcal{O}_X es *ccc*. Entonces si partimos de un modelo donde $\omega_1 < \mathfrak{c}$, el Axioma de Martin implica que la propiedad de ser *ccc* es productiva.

Referencias

- [1] K. Kunen, *Set Theory*, College publications, 2011.
- [2] C. Ivorra Castillo, *Teoría de Conjuntos*, <https://www.uv.es/ivorra/Libros/Conjuntos2.pdf>.

Sobre el Espacio Moduli de Haces Vectoriales

Dr. Hugo Torres López
Posdoctorado de UMSNH

RESUMEN. El objetivo de estas notas es introducir al lector el concepto de un espacio moduli a través del ejemplo de haces vectoriales sobre una superficie de Riemann compacta de género g . Nosotros explicamos los conceptos de familias parametrizadas por una variedad, espacios moduli fino y grueso. Por último, estudiamos los problemas para tener un moduli fino en el ejemplo de haces vectoriales.

1. Preliminares

Uno de los problemas principales en geometría algebraica es la clasificación de objetos, ya sean polinomios, variedades, haces vectoriales, etc. Tenemos una clase de objetos matemáticos y una noción de cuando dos objetos son equivalentes, entonces queremos que el conjunto de clases de equivalencia tenga estructura de variedad.

En 1857, Riemann introdujo el concepto de **espacio moduli** cuando demostró sobre funciones abelianas que las clases de isomorfismos de superficies de Riemann de género g dependen de $3g - 3$ parámetros.

En geometría algebraica se han clasificado objetos como son: curvas algebraicas, superficies algebraicas, variedades abelianas, haces vectoriales, entre otros. Una primera clasificación necesitamos fijar invariantes para no tener un espacio separado, sin embargo esto no resuelve el problema de clasificación.

La propuesta de Grothendieck fue categórica, y relaciona la geometría que refleja las “familias” parametrizadas por un variedad S con los morfismos de S a una variedad M . En estas notas trabajamos sobre la categoría algebraica por lo tanto damos un repaso sobre los conceptos de variedades algebraicas y morfismos algebraicos.

El propósito de esta sección es dar una introducción a las variedades algebraicas. Definimos los objetos principales de estudio en los espacios afines o proyectivos. También introducimos los conceptos de morfismos algebraicos y de haces vectoriales algebraicos. Consideramos $\mathbb{K} = \bar{\mathbb{K}}$ un campo algebraicamente cerrado. El n -espacio afín sobre \mathbb{K} , denotado por \mathbb{A}_k^n

o simplemente \mathbb{A}^n , es el conjunto definido por

$$\mathbb{A}_k^n := \{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) | \lambda_i \in \mathbb{K}\}.$$

La diferencia entre \mathbb{A}^n y \mathbb{K}^n es que en \mathbb{A}^n olvidamos la estructura de espacio vectorial de \mathbb{K}^n , de manera que ningún punto desempeña un papel destacado.

Definimos el n -espacio proyectivo sobre \mathbb{K} , denotado por \mathbb{P}_k^n o simplemente \mathbb{P}^n , como el conjunto de clases de equivalencias de $(n+1)$ -adas (x_0, x_1, \dots, x_n) no todas cero, bajo la relación de equivalencia dada por: (x_0, \dots, x_n) es equivalente a (y_0, \dots, y_n) si existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tal que

$$(x_0, \dots, x_n) = (\lambda y_0, \dots, \lambda y_n).$$

Otra manera de decir esto es que \mathbb{P}^n como un conjunto es el cociente del espacio afín \mathbb{A}^n bajo la relación de equivalencia la cual identifica los puntos que se encuentran en la misma línea que pasa por el origen.

Definición 1.1. Un conjunto $X \subset \mathbb{A}_k^n$ (o $X \subset \mathbb{P}^n$) es una variedad afín (o proyectiva) si existe un conjunto de polinomios $\{f_\alpha\} \in \mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ ($f_\alpha \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ homogéneos) tal que

$$X = Z(\{f_\alpha\}) := \{x \in \mathbb{A}^n(\mathbb{P}^n) | f_\alpha(x) = 0\}.$$

- Por el Teorema fundamental de álgebra, las variedades afines en \mathbb{A}^1 son los conjuntos finitos. De la misma manera las variedades proyectivas en \mathbb{P}^1 .
- Los ejes coordenados en el plano es una variedad afín ya que son los ceros del polinomio $f(x, y) = xy$.
- Consideramos un polinomio (homogéneo) en $\mathbb{K}[x, y]$ ($\mathbb{K}[x, y, z]$) de grado d . La variedad afín (proyectiva) determinada por los

ceros de f es conocida como *una curva plana afín (proyectiva) de grado d* .

Los conjuntos cerrados en la *topología de Zariski* para el espacio afín \mathbb{A}^n (ó espacio proyectivo \mathbb{P}^n) están dados por variedades afines (variedades proyectivas). Notemos que \mathbb{A}^n tiene menos cerrados con la topología de Zariski que con la topología usual. Una *variedad* sobre \mathbb{K} es un abierto de una variedad afín o proyectiva. Consideremos X una variedad afín (proyectiva). Una función $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ es *regular en un punto* $p \in X$, si existe un abierto $U \subset X$ y polinomios $g, h \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ ($g, h \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ homogéneos del mismo grado) tal que h no se anula en U y $f = g/h$ en U . Decimos que f regular en X , si es regular en cada punto p de X .

Definición 1.2. Consideremos X, Y variedades algebraicas. Una función $f : X \rightarrow Y$ es un morfismo algebraico si satisface las siguientes propiedades:

1. f es una función continua,
2. para todo $V \subset Y$ abierto, induce el morfismo

$$\begin{aligned} \phi : A(V) &\rightarrow A(f^{-1}(V)) \\ g &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

de \mathbb{K} -álgebras.

Claramente la composición de dos morfismos es un morfismo, entonces tenemos una categoría, donde los objetos están dados por variedades algebraicas y los morfismos son morfismos algebraicos. En particular, tenemos la noción de isomorfismo de variedades algebraicas: un *isomorfismo* $\phi : X \rightarrow Y$ de dos variedades algebraicas es un morfismo la cual admite un morfismo $\psi : Y \rightarrow X$ con $\phi \circ \psi = id_Y$ y $\psi \circ \phi = id_X$. Los morfismos son funciones bicontinuas y biyectivas, pero funciones bicontinuas y biyectivas no necesariamente son morfismos.

Definición 1.3. Un haz vectorial de rango n sobre X es una pareja (E, π) , donde E es una variedad algebraica y $\pi : E \rightarrow X$ es un morfismo algebraico que cumple con las siguientes propiedades:

- para todo punto $x \in X$, la fibra $E_x := \pi^{-1}(x)$ es un espacio vectorial complejo de dimensión n .
- Existe una cubierta abierta $\{U_\alpha\}$ de X y una colección de isomorfismos $\{h_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{K}^n\}$ tal que para todo $x \in X$ $h_{\alpha|_x} : E_x \rightarrow \{x\} \times \mathbb{K}^n$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Los isomorfismos $\pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{K}^n$ son llamados *las cartas locales o trivializaciones* del haz vectorial E . Si $\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{K}^n$ y $\phi_\beta : \pi^{-1}(U_\beta) \rightarrow U_\beta \times \mathbb{K}^n$ son dos cartas sobre U_α y U_β respectivamente entonces el cambio de cartas definido sobre la intersección $U_\alpha \cap U_\beta$ está definido por

$$\begin{aligned} \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : U_\alpha \cap U_\beta \times \mathbb{K}^n &\rightarrow U_\alpha \cap U_\beta \times \mathbb{K}^n \\ (x, v) &\rightarrow (x, g_{\alpha,\beta}(x)v), \end{aligned}$$

donde $g_{\alpha,\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(n, \mathbb{K})$ es un morfismo de variedades algebraicas. Los morfismos $g_{\alpha,\beta}$ son llamados *funciones de transición* y satisfacen las siguientes condiciones de cociclo:

- $g_{\alpha,\alpha} = id$.
- Sobre las intersecciones $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ nosotros tenemos $g_{\alpha,\gamma} = g_{\alpha,\beta}g_{\beta,\gamma}$.

Si existe una cubierta $\{U_\alpha\}$ de X y morfismos $g_{\alpha,\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(n, \mathbb{K})$ satisfaciendo las condiciones de cociclo, entonces es posible construir un haz vectorial E sobre X (ver [2], Capítulo 1). Los haces vectoriales de rango uno son llamados haces lineales. A continuación damos dos ejemplos de haces vectoriales

1. Dada una variedad algebraica X , consideramos el haz vectorial $(X \times \mathbb{K}^n, \pi_1)$, donde $\pi_1 : X \times \mathbb{K}^n \rightarrow X$ es la proyección al primer factor.
2. Consideramos la variedad de incidencia

$$O(-1) := \{(z, l) | z \in l\} \subset \mathbb{K}^2 \times \mathbb{P}^1.$$

La proyección al segundo factor $\pi_2 : O(-1) \rightarrow \mathbb{P}^1$ define un haz lineal sobre \mathbb{P}^1 .

Cada construcción canónica en álgebra lineal sobre espacios vectoriales da una versión geométrica para haces vectoriales algebraicos. Esto quiere decir, dados dos haces vectoriales E y F sobre X podemos construir los siguientes haces vectoriales: el haz dual E^* , la suma directa $E \oplus F$, El producto tensorial $E \otimes F$, el producto simétrico $\text{Sym}^n(E)$, el producto exterior $\wedge^n E$, entre otros.

Definición 1.4. Un homomorfismo entre dos haces vectoriales (E, π_E) y (F, π_F) es un morfismo $h : E \rightarrow F$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{h} & F \\ & \searrow \pi_E & \downarrow \pi_F \\ & & X \end{array}$$

y para cada $x \in X$, $h_x : E_x \rightarrow F_x$ es una transformación lineal.

Un homomorfismo $h : E \rightarrow F$ es un *isomorfismo* si existe un homomorfismo $g : F \rightarrow E$ tal que $g \circ h = id_E$ y $h \circ g = id_F$. Consideramos un haz vectorial E sobre S y $f : S_1 \rightarrow S$ un morfismo, “el pullback” está definido como

$$f^*(E) := \{(s_1, e) \in S_1 \times E \mid f(s_1) = \pi(e)\}$$

es un haz vectorial sobre S_1 .

2. Problema Moduli

Los ingredientes básicos en problemas de clasificación son: una colección A de objetos y una relación de equivalencia \sim entre los objetos, el principal objetivo es darle estructura de variedad (algebraica, compleja) al conjunto de clases de equivalencia. Nos gustaría que la estructura en A/\sim refleje la estructura de los objetos de A ; esto quiere decir que si los objetos son diferenciables (algebraicos) entonces el cociente A/\sim sea diferenciable (algebraico).

Una familia F parametrizada por S consiste de una colección de objetos $F_s \in A$, uno por cada punto $s \in S$, el cual están “pegados” de alguna manera que respeta la estructura de S

Para estudiar la topología de M , estudiamos las curvas continuas $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ en M . El concepto de familia juega un papel similar en la construcción de espacios moduli. En algún sentido, es la manera de “deformar” los objetos de A . Esto quiere decir que si queremos ir de un objeto $a \in A$ a otro objeto $b \in A$, debería de existir una familia parametrizada por una variedad conexa S y puntos $s_0, s_1 \in S$ tal que los objetos parametrizados por s_0 y s_1 son a y b respectivamente.

El concepto de familia debe de cumplir con las siguientes propiedades:

1. Si $S = \{\text{pto}\}$ es un punto, entonces la familia parametrizada por S es un punto de A .
2. *Relación de equivalencia entre familias:* Tenemos una relación de equivalencia \sim_f entre familias F, G parametrizadas por una variedad S la cual respeta la relación entre los objetos. Esto quiere decir, si F y G son familias parametrizadas por S y $F \sim_f G$, entonces para cada $s \in S$ el objeto F_s es equivalente al objeto G_s .
3. *Familia inducida:* Consideramos un morfismo $\phi : S_1 \rightarrow S$ y una familia parametrizada por S , existe una familia parametrizada por S_1 . La familia $\phi^*(F)$ es llamada la familia inducida y cumple con las siguientes propiedades

- $(\phi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \phi^*$.
- $id^*(F) = F$.
- Si $F \sim_f G$, entonces $\phi^*(F) \sim_f \phi^*(G)$,

donde $\psi : S_2 \rightarrow S_1$ es un morfismo.

La cuarteta (A, \sim, F, \sim_f) es conocida como *problema moduli*. Las propiedades de familia define el siguiente functor contravariante

$$\mathcal{F} : \{\text{variedades}\} \rightarrow \{\text{conjuntos}\}, \quad (1)$$

donde a una variedad S se le asocia el conjunto $\mathcal{F}(S)$ de clases de equivalencia de familias parametrizadas por S , y dado un morfismo $\phi : S_1 \rightarrow S$ se le asocia el morfismo

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\phi) : \mathcal{F}(S) &\rightarrow \mathcal{F}(S_1) \\ F &\mapsto \phi^*(F). \end{aligned}$$

Ejemplo 1. Consideremos el conjunto A de espacios vectoriales de dimensión n sobre \mathbb{K} . Decimos que V y W en A son equivalentes si existe una transformación lineal invertible $f : V \rightarrow W$. Una familia parametrizada por S es un conjunto de espacios vectoriales F_s , uno por cada $s \in S$, por lo tanto definimos una familia F parametrizada por S , como un haz vectorial (F, π) de rango n sobre la variedad S (ver sección 4). La relación de equivalencia entre familias es isomorfismos de haces vectoriales, y la familia inducida es el “pullback”. Dado que dos espacios vectoriales sobre \mathbb{K} de la misma dimensión son isomorfos, tenemos que A/\sim es un punto $\{0\}$.

Ejemplo 2. Los objetos en A son parejas (V, T) , donde V es un espacio vectorial de dimensión n sobre \mathbb{K} y $T : V \rightarrow V$ es un endomorfismo. Dos objetos $(V, T : V \rightarrow V)$, $(V', T' : V' \rightarrow V')$ son equivalentes si existe un isomorfismo $h : V \rightarrow V'$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{T} & V \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ V' & \xrightarrow{T'} & V' \end{array} .$$

La clasificación de parejas (V, T) es equivalente a la clasificación de matrices de $n \times n$ mediante la forma canónica de Jordan. Una familia parametrizada por S es una pareja (E, T) , donde E es un haz vectorial de rango n sobre S y $T : E \rightarrow E$ es un endomorfismo de haces vectoriales. Dos familias $(E, T : E \rightarrow E) \sim (E', T' : E' \rightarrow E')$ parametrizadas por S son equivalentes si existe un isomorfismo $h : E \rightarrow E'$ de haces vectoriales tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{T} & E \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ E' & \xrightarrow{T'} & E' \end{array} .$$

3. Lema de Yoneda

Supongamos que tenemos dos objetos B y C en una categoría \mathcal{C} y queremos probar que son isomorfos. El Lema de Yoneda nos dice que basta demostrar que sus respectivos funtores de puntos $h_B = \text{Hom}(-, B)$ y $h_C = \text{Hom}(-, C)$ son isomorfos. Una manera de expresar esto es que para conocer un objeto M en una categoría salvo isomorfismos basta conocer $\text{Hom}(S, M)$ para todo objeto S en la categoría \mathcal{C} . A continuación explicamos el Lema de Yoneda. Consideremos una categoría \mathcal{C} y un elemento X en \mathcal{C} , el *functor de puntos de X* está definido como

$$\begin{aligned} h_X : \mathcal{C} &\rightarrow \{\text{conjuntos}\} \\ S &\mapsto \text{Hom}(S, X) \end{aligned}$$

Sean $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ dos funtores covariantes. Una *transformación natural* $\eta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ le asocia a cada objeto $X \in \mathcal{C}$ un morfismo $\eta_X : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{G}(X)$, y para cada morfismo $f : X \rightarrow Y$ en \mathcal{C} el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(X) & \xrightarrow{\mathcal{F}(f)} & \mathcal{F}(Y) \\ \eta_X \downarrow & & \downarrow \eta_Y \\ \mathcal{G}(X) & \xrightarrow{\mathcal{G}(f)} & \mathcal{G}(Y) \end{array} .$$

Consideramos un funtor $\mathcal{G} : \mathcal{C} \rightarrow \{\text{conjuntos}\}$ y un elemento $X \in \mathcal{C}$. Sea $\tau : h_X \rightarrow \mathcal{G}$ una transformación natural, entonces para el objeto X se le asocia el morfismo $\tau_X : h_X(X) = \text{Hom}(X, X) \rightarrow \mathcal{G}(X)$, en $\text{Hom}(X, X)$ existe el morfismo canónico identidad id_X , por lo tanto definimos

$$\begin{aligned} \text{Transf. Nat.}(h_X, \mathcal{G}) &\xrightarrow{\phi} \mathcal{G}(X) \\ \tau &\mapsto \tau_X(id). \end{aligned}$$

Lema 3.1. (Yoneda) ϕ es biyectiva.

En particular, si \mathcal{G} es el funtor identidad entonces entender la geometría de X es equivalente a entender el funtor de puntos h_X . Por lo tanto para estudiar la geometría de una variedad X es estudiar los morfismos de S a X para toda variedad S .

4. Propuesta de Grothendieck

En esta sección explicamos la propuesta de Grothendieck para resolver el problema moduli. Dado un problema moduli, nos gustaría imponer sobre el conjunto A/\sim una estructura de variedad la cual refleje la estructura de familias

de objetos de A . Supongamos que existe una variedad M con la propiedad que $M = A/\sim$. Dada una familia F parametrizada por S , la familia F define una función V_F de la siguiente manera

$$\begin{aligned} V_F : S &\rightarrow M \\ s &\mapsto [F_s], \end{aligned}$$

donde $[F_s]$ es la clase del objeto en M parametrizado por el punto $s \in S$. Las familias estudian la geometría de la variedad M , y por otro lado el Lema de Yoneda estudiar la geometría de la variedad M es equivalente a estudiar los morfismos de S a M para toda variedad S . Entonces nos gustaría que esta geometría sea la misma. Esto quiere decir, para toda variedad S

$$\begin{aligned} \Phi(S) : \mathcal{F}(S) &\rightarrow \text{Hom}(S, M) = h_M(S) \\ F &\mapsto V_F, \end{aligned}$$

es un isomorfismo.

Definición 4.1. Un espacio moduli fino para el problema moduli (A, \sim, F, \sim_f) es una pareja (M, Φ) , donde M es una variedad y Φ es una transformación natural representando el funtor

$$\mathcal{F} : \{\text{variedades}\} \rightarrow \{\text{conjuntos}\}.$$

Esto quiere decir, para cada variedad S existe una biyección entre clases de familias parametrizadas por S y morfismos de S a M .

Si M es un espacio moduli fino tenemos las siguientes propiedades:

1. Supongamos que $S = \{\text{pto}\}$ es un punto. Los morfismos de $\{\text{pto}\}$ a M es precisamente M . Por otro lado, una familia parametrizada por un punto es un objeto de A , y $\mathcal{F}(\text{pto})$ son las clases de equivalencias de familias parametrizadas por un punto. Por lo tanto tenemos que $\mathcal{F}(\text{pto}) = A/\sim$. Si \mathcal{F} es representable por (M, Φ) , entonces los puntos de M son precisamente las clases de equivalencia de familias de objetos de A , esto es

$$A/\sim = \mathcal{F}(\text{pto}) = \text{Hom}(\text{pto}, M) = M.$$

2. Si $S = M$, tenemos que en $\text{Hom}(M, M)$ existe el morfismo canónico $id_M : M \rightarrow M$ identidad en M . Dado que tenemos el isomorfismo

$$\Phi(M) : \mathcal{F}(M) \rightarrow \text{Hom}(M, M),$$

entonces al morfismo id_M le corresponde una clase de familia U parametrizada por M . Consideremos una familia F parametrizada por S y el morfismo $V_F : S \rightarrow M$

inducido por F . Sea $F' = V_F^*(U)$ y supongamos que $V_F(s) = m$, entonces

$$\begin{aligned} V_{F'}(s) &= V_{V_F^*(U)(s)}; \\ &= [V_F^*(U)_s]; \\ &= [U_{V_F(s)}]; \\ &= [U_m]; \\ &= m. \end{aligned}$$

Así, las familias F y F' corresponden al mismo morfismo.

Lema 4.1. *Supongamos que existen una variedad M y una familia U parametrizada por M tal que para cada familia F parametrizada por S existe un único morfismo $\phi : S \rightarrow M$ con $F \sim \phi^*(U)$. Entonces (M, Φ) es un espacio moduli fino.*

Demostración. Tenemos que demostrar que

$$\Phi(S) : \mathcal{F}(S) \rightarrow \text{Hom}(S, M)$$

es un isomorfismo entre clases de equivalencia de familias parametrizadas por una variedad S y morfismos de S a M . Sea $\phi : S \rightarrow M$ un morfismo, y consideramos la familia inducida, $F = \phi^*(U)$, por U la cual está parametrizada por S . Supongamos que $\phi(s) = m$, entonces

$$V_F(s) = [F_s] = [\phi^*(U)_s] = [U_{\phi(s)}] = [U_m] = m = \phi(s).$$

Esto demuestra que $\Phi(S)$ es sobreyectiva. Consideremos dos familias F y F' parametrizadas por S tal que los morfismos correspondientes V_F y $V_{F'}$ son iguales, entonces

$$F \sim_f V_F^*(U) = V_{F'}^*(U) \sim_f F'.$$

Por lo tanto $F \sim_f F'$. En consecuencia tenemos que $\Phi(S)$ es un isomorfismo. \square

La siguiente definición se encuentra en la literatura la cual es equivalente a la primera definición por el Lema 4.1.

Definición 4.2. Un espacio moduli fino para el problema moduli (A, \sim, F, \sim_f) es una pareja (M, U) , donde M es una variedad y U es una familia parametrizada por M tal que para cada familia F parametrizada por la variedad S existe un único morfismo $\phi : S \rightarrow M$ tal que $F \sim_f \phi^*(U)$.

La familia U de la definición 4.2 es conocida como la familia universal para el problema moduli (A, \sim, F, \sim_f) .

Ejemplo 3. El ejemplo 1 no es un espacio moduli fino; consideramos la esfera de Riemann $S = \mathbb{P}^1$ y el haz tautológico sobre \mathbb{P}^1 definido como

$$\mathcal{O}(-1) := \{(l, z) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{K}^2 \mid z \in l\}.$$

El haz $\mathcal{O}(-1)$ no es isomorfo al haz $S \times \mathbb{K}^2 \rightarrow S$, pero definen el mismo morfismo. Por lo tanto no existe una biyección entre clases de familias parametrizadas por \mathbb{P}^1 y morfismos de \mathbb{P}^1 a M (i.e. $\Phi(\mathbb{P}^1)$ no es biyectiva). En consecuencia, no es un espacio moduli fino.

Ejemplo 4. El ejemplo 2 no es un espacio moduli fino; supongamos que es un moduli fino M . Consideramos el haz trivial $\mathbb{K}^n \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ de rango n sobre $S := \mathbb{P}^1$. Sean $F = (\mathbb{K}^n \times \mathbb{P}^1, id)$ y $\tilde{F} = (\mathbb{K}^n \otimes \mathcal{O}(1), id \otimes id)$ familias parametrizadas por \mathbb{P}^1 . Los morfismos $V_F, V_{\tilde{F}} : \mathbb{P}^1 \rightarrow M$ están dados por

$$V_F(t) = V_{\tilde{F}}(t) = (\mathbb{K}^2, id) \text{ para todo } t \in \mathbb{P}^1.$$

Los haces vectoriales $(\mathbb{K}^n \times \mathbb{P}^1)$ y $\mathbb{K}^n \otimes \mathcal{O}(1)$ tienen grado 0 y n respectivamente. Por lo tanto, no pueden ser isomorfos. En consecuencia, no existe una biyección entre familias parametrizadas por \mathbb{P}^1 y morfismos de \mathbb{P}^1 a M .

En general es difícil obtener los espacios moduli finos. En algunos casos tenemos que A/\sim tiene la estructura de variedad, pero no existe una familia universal, por lo que no tenemos un espacio moduli fino. A continuación introducimos un concepto llamado espacio moduli grueso tal que no depende de la relación de equivalencia entre las familias.

Definición 4.3. Un espacio moduli grueso para un problema moduli (A, \sim, F, \sim_f) es una variedad M junto con una transformación natural

$$\Phi : \mathcal{F} \rightarrow \text{Hom}(-, M)$$

tal que

1. $\Phi(pto)$ es biyectivo.
2. Para cada variedad N y cada transformación natural

$$\psi : \mathcal{F} \rightarrow \text{Hom}(-, N),$$

existe una única transformación natural

$$\Omega : \text{Hom}(-, M) \rightarrow \text{Hom}(-, N),$$

tal que

$$\psi = \Omega \circ \Phi$$

Si el problema moduli es grueso entonces satisface las siguientes propiedades:

- Existe una variedad M y un isomorfismo $\alpha : A/\sim \rightarrow M$.
- Para cada familia F parametrizada por S , induce un morfismo $V_F : S \rightarrow M$.

- Existen dos familias no equivalentes induciendo el mismo morfismo.
- No necesariamente existe una familia universal que parametriza los objetos de M .

A continuación explicamos dos conceptos para la no existencia de un espacio moduli los cuales son el fenómeno del salto y la existencia de automorfismos de los objetos.

Automorfismos: Si los objetos de A tienen automorfismos es difícil construir el espacio moduli fino ya que si tomamos un objeto $c \in A$ con un automorfismo $\phi : C \rightarrow C$, es posible construir una familia no trivial parametrizada por una variedad S tal que el objeto F_s parametrizado por s es isomorfo a c para cada punto $s \in S$. Por lo tanto F induce el morfismo constante $V_F : S \rightarrow M$, pero F no es trivial. Entonces $\Phi(S)$ no es un isomorfismo. Sin embargo, si los objetos tienen automorfismos es posible tener un moduli grueso.

Fenómeno del salto: Una razón para que no exista el espacio moduli es llamado el *fenómeno del salto*. Este fenómeno consiste en la existencia de familias parametrizadas por S una variedad irreducible de dimensión mayor a cero y un punto $s_0 \in S$ tal que

1. $F_s \sim F_{s'}$ para todo $s, s' \in S - \{s_0\}$;
2. $F_{s_0} \not\sim F_s$ para $s \neq s_0$.

Supongamos que existe M un espacio moduli grueso. La familia F parametrizada por S induce el morfismo $V_F : S \rightarrow M$, como S es conexo por lo tanto la imagen $V_F(S) = \{F_{s_0}, F_s\}$ es conexo, lo cual es imposible. En consecuencia no existe moduli grueso.

Ejemplo 5. El ejemplo 2 no es un espacio moduli grueso; consideramos $F = \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ el haz trivial de rango 2 sobre \mathbb{K} . Fijamos $\lambda \in \mathbb{K}$ y definimos el endomorfismo de haces

$$T : \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K} \\ ((x, y), z) \mapsto ((\lambda x + zy, \lambda y), z).$$

donde $z \in \mathbb{K}$. La familia $(\mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}, T)$ está parametrizada por \mathbb{K} , y para cada $z \in \mathbb{K}$ la forma canónica de Jordan para el endomorfismo T_z está dada por

$$\begin{pmatrix} \lambda & z \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Es bien conocido que si $z \neq 0$, las matrices T_z y T_0 no son equivalentes. Más aún, para todo $z_0, z_1 \in \mathbb{K}^*$ tenemos que $(\mathbb{K}^2, T_{z_0}) \sim (\mathbb{K}^2, T_{z_1})$. Este problema moduli tiene el fenómeno del salto, entonces no es un moduli grueso.

5. Problema moduli de Haces vectoriales

En esta sección consideramos el problema moduli de haces vectoriales sobre X una curva suave proyectiva de género g . Primero definimos la relación de equivalencia entre los objetos, el concepto de familia de los objetos parametrizados por una variedad S y la familia inducida. Por último, explicamos los principales problemas en la construcción del espacio moduli de haces vectoriales.

Decimos que dos haces vectoriales E y F sobre X son equivalentes si existe un isomorfismo $h : E \rightarrow F$ de haces vectoriales. Notemos que un invariante que debemos fijar es el rango del haz vectorial.

Familias: Dada una variedad S , necesitamos obtener un haz vectorial E_s por cada punto $s \in S$. Por lo tanto podemos definir una familia de haces vectoriales sobre X parametrizados por una variedad S es un haz vectorial E sobre $X \times S$. Consideremos un punto $s \in S$ y la inclusión $i : X \times \{s\} \rightarrow X \times S$, si E es un haz vectorial sobre $X \times S$ entonces el "pullback" $i^*(E)$ define un haz vectorial E_s sobre X .

Relación de equivalencia entre familias: Dos familias E y F parametrizadas por S son equivalentes si existe un isomorfismo $h : E \rightarrow F$ de haces vectoriales sobre $X \times S$.

Familia inducida: Consideremos una familia E parametrizada por S y $\phi : S_1 \rightarrow S$ un morfismo. La familia inducida está dada por $F = (id \times \phi)^*(E)$. La familia F es un haz vectorial sobre $X \times S$.

El problema moduli de haces vectoriales no es un espacio moduli fino: consideremos una variedad S y un haz vectorial E sobre $X \times S$. Denotamos por $\pi : X \times S \rightarrow S$ la proyección al segundo factor. Sea L un haz lineal no trivial sobre S , entonces existe una cubierta $\{U_\alpha\}$ de S tal que $L|_{U_\alpha}$ es trivial. Por lo tanto $\pi^*(L|_{U_\alpha})$ es trivial sobre $X \times U_\alpha$. En consecuencia

$$E \otimes \pi^*(L)|_{X \times U_\alpha} = E|_{X \times U_\alpha} \otimes \pi^*(L)|_{X \times U_\alpha} = E|_{X \times U_\alpha}.$$

Si el problema moduli de haces vectoriales es un espacio moduli fino, entonces existe una variedad M y morfismos $\alpha, \beta : S \rightarrow M$ correspondientes a las familias E y $E' = E \otimes \pi^*(L)$ respectivamente. Dado que $E|_{X \times U_\alpha}$ y $E'|_{X \times U_\alpha}$ son isomorfos, nosotros tenemos $\alpha|_{U_\alpha} = \beta|_{U_\alpha}$ y en consecuencia $\alpha = \beta$. Pero es posible que E y E' no son isomorfas y los morfismos α y β deberían de ser distintos.

En este caso, con esta definición de equivalencia para familia, tenemos que dos familias no equivalentes le corresponden el mismo morfismo. Por lo tanto $\Phi(S)$ no sería una biyección y no existe una familia universal U . En consecuencia, no tenemos un espacio moduli fino. Sin embargo, podemos cambiar la relación de equivalencia entre familias. Decimos que dos familias E y F parametrizadas por una variedad S son equivalentes si existe un haz lineal L sobre S tal que E es isomorfo a $F \otimes \pi^*(L)$ como haces vectoriales sobre $X \times S$.

El problema moduli de haces vectoriales de rango mayor a 1 no es un espacio moduli grueso: Mumford demostró que el conjunto A de haces vectoriales de rango $n \geq 2$ no está acotado, esto quiere decir, que no existe una variedad S y un haz sobre $X \times S$ tal que $A \subset \{E|_{X \times \{s\}} | s \in S\}$. Si el conjunto A no está acotado, entonces no

podemos tener un espacio moduli grueso.

En 1962, Mumford en su plática del Congreso Internacional de Matemáticas introduce el concepto de haz vectorial estable sobre una curva suave proyectiva de género g y demostró que los haces estables de rango y grado fijos sobre una curva suave proyectiva irreducible de género g son parametrizados por un espacio moduli grueso casi-proyectivo. Esta definición ha sido extendida a variedades de dimensión superior, y uno demuestra la existencia de un espacio moduli grueso existe para haces vectoriales estables bajo ciertos invariantes fijos. Al público interesado en conocer la definición y la construcción del espacio moduli grueso de haces vectoriales estables les recomiendo (ver[1], Capítulo 5).

Referencias

- [1] Newstead, P. E., *Introduction to moduli problems and orbit spaces*, Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics, 51. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay; by the Narosa Publishing House, New Delhi, 1978.
- [2] J. L. Potier, *Lectures on vector bundles*, Vol. 54, Cambridge University Press, 1997.

Introducción a la Teoría de Campos de Norma

Dr. Elmar Wagner

Profesor-Investigador de UMSNH

RESUMEN. El objetivo de estas notas es dar una introducción a la teoría matemática de campos de norma que son utilizados (después de la cuantización) para describir tres interacciones fundamentales: la electromagnética, la débil y la fuerte.

1. Preliminares

Recordamos que una variedad topológica es un espacio topológico de Hausdorff (segundo numerable) que localmente es parecido al \mathbb{R}^n para un $n \in \mathbb{N}$. Para precisar que significa *parece localmente al \mathbb{R}^n* , usaremos un atlas observando que conjuntos homeomorfos son topológicamente indistinguibles.

Definición 1.1. Una carta (U, φ) para una variedad M de dimensión n está dada por un abierto $U \subset M$ y un homeomorfismo $\varphi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$, donde $V = \varphi(U)$ es un abierto del \mathbb{R}^n . Una colección de cartas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ tal que $M = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ se llama un atlas. Las funciones

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

$$\varphi_\alpha(p) := x_\alpha(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p)) \in \mathbb{R}^n. \quad (1)$$

se llaman coordenadas locales.

Un ejemplo estándar es el superficie de la tierra (aproximadamente una 2-esfera) con un atlas completo, es decir, cualquier punto del superficie está representado en una carta con una imagen en una hoja de papel (subconjunto del \mathbb{R}^2). Otro ejemplo fundamental – porque es el caso ejemplar – es un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ con el atlas $\{(U, \text{id})\}$. Por otro lado, las variedades pueden ser bastante abstractos como por ejemplo los espacios proyectivos $\mathbb{C}P^n := \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$, donde $x \sim y \Leftrightarrow x = \lambda y$ para un $\lambda \in \mathbb{C}$. Observan que un punto en la variedad $\mathbb{C}P^n$ es en realidad una clase de equivalencia dado por una línea compleja en \mathbb{C}^{n+1} .

Nuestro objetivo es aplicar el cálculo diferencial e integral del \mathbb{R}^n a variedades (abstractas). Para esto usaremos las coordenadas locales como en (1). Por ejemplo, para estudiar el cambio de una función $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ en $p \in M$, podemos considerar la función $f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ en $x_\alpha(p) \in \mathbb{R}^n$ (siempre que $p \in U_\alpha$) ya que $f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ es una función definida en \mathbb{R}^n . Es importante destacar el siguiente principio fundamental: **¡Toda definición y todo cálculo que se hace en coordenadas locales no debe depender de la carta que eligimos!** Por ejemplo, para que la diferenciabilidad de $f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ garantice la diferenciabilidad de $f \circ \varphi_\beta^{-1}$ en todo punto de $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$, basta que $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ es diferenciable ya que $f \circ \varphi_\beta^{-1} = (f \circ \varphi_\alpha^{-1}) \circ (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})$.

Definición 1.2. Una estructura diferenciable para una variedad M está dada por un atlas diferenciable, es decir, un atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ tal que si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$,

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ son de clase } C^\infty. \quad (2)$$

Dos atlas definen la misma estructura diferenciable si la unión es un atlas diferenciable. Sea N otra variedad con atlas diferenciable $\{(V_\gamma, \phi_\gamma)\}_{\gamma \in J}$, y $U \subset M$ abierto. Decimos que una función continua $f : U \subset M \rightarrow N$ es diferenciable, si las funciones (si $U_\alpha \cap f^{-1}(V_\gamma) \neq \emptyset$),

$$\phi_\gamma \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap f^{-1}(V_\gamma)) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ son de clase } C^\infty. \quad (3)$$

Una variedad con una estructura diferenciable llamamos *variedad diferenciable*. Es fácil ver que, si M y F son variedades diferenciables, entonces $M \times F$ es una variedad diferenciable. Los ejemplos más importantes de funciones diferenciables son las coordenadas locales en (1).

Para poder hablar del “cambio de una función en dirección X ” o de un “movimiento en dirección X ”, definiremos el espacio tangente $T_p M$ que es el espacio lineal de todas las direcciones en $p \in M$. Si $M \subset \mathbb{R}^m$ y $c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ es diferenciable, entonces $c'(0)$ define un vector *tangente* a M en $p = c(0)$, por lo tanto $c'(0) \in T_p M$, y el espacio tangente en p es el conjunto de todas estas direcciones. Desafortunadamente, si M no es un subconjunto de un espacio lineal, la expresión $\frac{1}{t}(c(t) - c(0))$ no tiene sentido y por lo tanto **no se puede calcular el límite** $c'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(c(t) - c(0))$. Para resolver este problema, usaremos simplemente la curva misma para definir una dirección en M , observando que diferentes curvas pueden definir la misma dirección. Nuestra definición del espacio tangente es la siguiente:

$$T_p M := \{[c] : c : (-\epsilon_c, \epsilon_c) \rightarrow M \text{ diferenciable, } c(0) = p\},$$

donde

$$c_1 \sim c_2 \Leftrightarrow c_1(0) = c_2(0) \text{ y } (\varphi_\alpha \circ c_1)'(0) = (\varphi_\alpha \circ c_2)'(0) \text{ para un } \alpha \in I.$$

Por (3), la definición no depende de la carta $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$. La aplicación $\Theta_\alpha : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Theta_\alpha([c]) = (\varphi_\alpha \circ c)'(0)$ es biyectiva, por lo tanto podemos dotar a $T_p M$ una estructura de un espacio vectorial por $\mu_1[c_1] + \mu_2[c_2] :=$

$\Theta_\alpha^{-1}(\mu_1(\varphi_\alpha \circ c_1)'(0) + \mu_2(\varphi_\alpha \circ c_2)'(0))$, $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$. Dada la base canónica $\{e_1 := (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n := (0, \dots, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^n$, definimos la base canónica $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\} \subset T_p M$ por $\frac{\partial}{\partial x^j} := \Theta_\alpha^{-1}(e_j)$. Si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ y si cambiamos los coordenadas locales x_α por $y_\beta(x_\alpha) := \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x_\alpha)$, obtenemos por la regla de cadena

$$\frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial y^k(x_\alpha)}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^k} \quad (4)$$

Las funciones

$$t_{\beta\alpha} := D(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}) : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \text{GL}(n),$$

$$t_{\beta\alpha}(x_\alpha) := \left(\frac{\partial y^k(x_\alpha)}{\partial x^j} \right)_{k,j=1}^n \quad (5)$$

se llama funciones de transición y juegan un papel importante en la construcción del llamado haz tangente TM .

Observamos que $T_p M \cap T_q M = \emptyset$ si $p \neq q$, y definimos $TM := \cup_{p \in M} T_p M$. La topología de TM será dada por un atlas diferenciable (la topología más pequeña tal que todas las funciones de coordenadas locales son continuas). Para encontrar un atlas diferenciable $\{(V_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$, definimos

$$V_\alpha := \bigcup_{p \in U_\alpha} T_p M, \text{ y} \quad (6)$$

$$\psi_\alpha \left(\sum_{j=1}^n X^j(p) \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = (\varphi_\alpha(p), (X^1(p), \dots, X^n(p))) \in \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n.$$

Usando (2), (4) y (5), se verifica fácilmente que $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$ son de clase C^∞ para todo $\alpha, \beta \in I$.

2. Grupos de Lie

En la física, una simetría es una transformación invertible que no cambia las magnitudes físicas del sistema, por ejemplo una rotación o una traslación del espacio \mathbb{R}^n no cambia la distancia entre dos puntos. Como la composición de dos simetrías y el inverso también son simetrías, las simetrías forman un grupo. En situaciones favorables, las simetrías dependen de ciertos parámetros continuos que permiten una descripción como variedad diferenciable. El concepto matemático correspondiente es el de un grupo de Lie. Un grupo de Lie es una variedad diferenciable G con una estructura de un grupo tal que la multiplicación $G \times G \ni (h, g) \mapsto hg \in G$ y mapeo del inverso $G \ni g \mapsto g^{-1} \in G$ son diferenciables. Ejemplos de grupos de Lie son $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ y $\text{GL}(n, \mathbb{C})$ ya que $\det : \text{Mat}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ es continua y por lo tanto $\text{GL}(n, \mathbb{K}) = \det^{-1}(\mathbb{K} \setminus \{0\}) \subset \text{Mat}_n(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^{n^2}$ es un conjunto abierto. Además, la multiplicación de matrices es una función polinómica y el inverso $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$ es una función racional, por lo tanto son diferenciables. Los subgrupos

$$\text{SO}(n) := \{A \in \text{GL}(n, \mathbb{R}) : AA^t = \text{id} = A^t A, \det(A) = 1\},$$

$$\text{U}(n) := \{U \in \text{GL}(n, \mathbb{C}) : UU^* = \text{id} = U^* U\}, \text{ y}$$

$$\text{SU}(n) := \{U \in \text{U}(n) : \det(U) = 1\}$$

también son grupos de Lie. El grupo $\text{U}(1) \times \text{SU}(2) \times \text{SU}(3)$ se conoce en el modelo estándar como el grupo de simetrías *internas* de las partículas elementales, mientras las simetrías del espacio-tiempo (transformaciones de coordenadas, rotaciones, traslaciones, etc.) se consideran simetrías *externas*.

Sea $G \subset \text{Mat}_n(\mathbb{K})$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, un grupo de Lie. Consideramos el espacio tangente $\mathfrak{g} := T_{\text{id}} G$ como un subespacio \mathbb{R} -lineal de $\text{Mat}_n(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^{n^2}$ por la biyección $T_{\text{id}} G \ni [c] \mapsto c'(0) \in \text{Mat}_n(\mathbb{K})$. El espacio lineal $\mathfrak{g} \subset \text{Mat}_n(\mathbb{K})$ se vuelve un *álgebra de Lie* con el corchete de Lie $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ dado por el commutator de matrices $[A, B] := AB - BA$, es decir, $[\cdot, \cdot]$ es una aplicación bilineal y antisimétrica que cumple con la identidad de Jacobi $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$.

3. Haces fibrados

Recordemos que, si M y F son variedades diferenciables, entonces $M \times F$ es una variedad diferenciable. El objetivo de esta sección es generalizar el producto $M \times F$ a construcciones menos triviales tal que la nueva variedad solo localmente parezca a un producto cartesiano.

Definición 3.1. Decimos que una variedad diferenciable E es un haz fibrado con fibra F y base M , si existe una función diferenciable sobreyectiva $\pi : E \rightarrow M$ tal que para cualquier $p \in M$ existe un entorno $U \subset M$ de p y un difeomorfismo $\Psi_U : \pi^{-1}(U) \xrightarrow{\cong} U \times F$ tal que $\Psi_U(\pi^{-1}(p)) = \{p\} \times F \cong F$.

Si F y $\pi^{-1}(p)$ tienen la estructura de un espacio vectorial de dimensión finita sobre \mathbb{R} o \mathbb{C} , y $\Psi_U : \pi^{-1}(p) \rightarrow \{p\} \times F \cong F$ es un isomorfismo lineal para cada $p \in M$, decimos que E es un haz vectorial.

Una sección local de un haz fibrado está dado por una función diferenciable $s : U \subset M \rightarrow E$ tal que $s(p) \in \pi^{-1}(p)$ para todo $p \in U$ o, equivalente, $\pi \circ s = \text{id}$. Si $U = M$, decimos que s es una sección global y denotamos el espacio de todas las secciones globales por $\Gamma(E)$.

Observamos que, si $F \cong \mathbb{K}^m$, entonces $\pi^{-1}(U) \cong U \times \mathbb{K}^m$, es decir, localmente podemos asumir que E está dado por un producto cartesiano $U \times \mathbb{R}^m$ o $U \times \mathbb{C}^m$. En este caso, cualquier sección local $s : U \rightarrow \pi^{-1}(U) \cong U \times \mathbb{K}^m$ se puede escribir como $s(p) = (p, v(p))$, donde $v : U \rightarrow \mathbb{K}^m$ es diferenciable. Si expresamos la misma sección s en diferentes cartas $U_\alpha \ni p \rightarrow (p, v_\alpha(p)) \in U_\alpha \times \mathbb{K}^m$ y $U_\beta \ni p \rightarrow (p, v_\beta(p)) \in U_\beta \times \mathbb{K}^m$, entonces los isomorfismos $\Psi_{U_\beta} \circ \Psi_{U_\alpha}^{-1}$ determinan funciones diferenciables $t_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{K})$ tal que $(p, v_\beta(p)) = (p, t_{\beta\alpha}(p)v_\alpha(p))$ para todo $p \in U_\alpha \cap U_\beta$. Estas llamadas *funciones de transición* satisfacen obviamente

$$(i) t_{\alpha\alpha} = \text{id}, \quad (ii) t_{\alpha\beta} t_{\beta\alpha} = \text{id}, \quad (iii) t_{\alpha\beta} t_{\beta\gamma} t_{\gamma\alpha} = \text{id}, \quad (7)$$

para todo $\alpha, \beta, \gamma \in I$.

Se puede demostrar que E es isomorfa (difeomorfa como variedades con isomorfismos lineales en cada fibra) a la siguiente construcción

$$E \cong \left(\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \times \mathbb{K}^m \right) / \sim,$$

$$(p_\alpha, v_\alpha) \sim (p_\beta, v_\beta) \Leftrightarrow p_\alpha = p_\beta =: p, \quad v_\beta = t_{\beta\alpha}(p)v_\alpha. \quad (8)$$

Un ejemplo de un haz vectorial es TM con $\pi : TM \rightarrow M$, $\pi(X(p)) = p$ para todo $X(p) \in T_pM$ y las funciones de transición (5). En este caso, $F \cong \mathbb{R}^n$, donde $n = \dim(M)$. Como todas las aplicaciones lineales $t_{\beta\alpha}(p)$ son invertibles por (7.ii), sabemos que $t_{\beta\alpha}(p) \in GL(n, \mathbb{K})$. Sin embargo, en casos favorables puede existir un subgrupo de Lie más pequeño $G \subseteq GL(n, \mathbb{K})$ tal que $t_{\beta\alpha}(p) \in G$ para todo $\alpha, \beta \in I$ y $p \in U_\alpha \cap U_\beta$. Por ejemplo, si dotamos (de manera diferenciable) a cada fibra $F \cong \mathbb{K}^m$ con un producto interno y elegimos secciones de bases ortonormales en las trivializaciones locales, podemos lograr que $t_{\beta\alpha}(p_\alpha) \in O(m)$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $t_{\beta\alpha}(p_\alpha) \in U(m)$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. El grupo $G \subset GL(n, \mathbb{K})$ se llama *grupo de estructura* para el haz E y cualquier metodo para encontrar un grupo más pequeño se llama *reducción del grupo de estructura*.

Si reemplazamos E en (8) por $P^G := \left(\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \times G \right) / \sim$, obtenemos un haz fibrado con fibra G y una acción de la derecha (libre y transitiva en cada fibra) $\triangleleft : P \times G \rightarrow P$ dada por $[(p_\alpha, g_\alpha)] \triangleleft g := [(p_\alpha, g_\alpha g)]$. El haz P^G es un ejemplo de un *haz principal* y reúne toda la información necesaria para la construcción de haces como en (8). Aunque el haz P^G proporciona un marco adecuado para la teoría de norma (y es preferido por los matemáticos), el desarrollo de la teoría de haces principales rebasaría el alcance de estas notas.

4. El grupo de norma

Existe cierta confusión con respecto al grupo de norma porque algunos físicos identifican inapropiadamente el grupo de estructura con el grupo de norma, y se puede fácilmente confundir el grupo de norma con el espacio de secciones de P^G .

Definición 4.1. Dado un haz fibrado con base M , grupo de estructura G y funciones de transición $t_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$, consideramos

$$\mathcal{G} := \left(\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \times G \right) / \sim,$$

$$(p_\alpha, g_\alpha) \sim (p_\beta, g_\beta) \Leftrightarrow p_\alpha = p_\beta, \quad g_\beta = t_{\beta\alpha}(p_\alpha) g_\alpha t_{\beta\alpha}^{-1}(p_\alpha).$$

El grupo de norma es el espacio de secciones globales

$$\Gamma(\mathcal{G}) := \{s : M \rightarrow \mathcal{G} : \text{diferenciable}, \pi \circ s = \text{id}\} \quad (9)$$

con la multiplicación punto a punto $(s_1 s_2)(p) := s_1(p) s_2(p)$ para todo $p \in M$.

Observamos que $\Gamma(\mathcal{G}) \neq \emptyset$ ya que la sección global constante $e(p) = \text{id} \in G$ es el elemento neutro en $\Gamma(\mathcal{G})$. Esta situación es muy diferente al P^G , donde secciones globales existen si y solo si $P^G \cong M \times G$. Además, si G es abeliano, entonces $\mathcal{G} \cong M \times G$ mediante la aplicación bien definida $\mathcal{G} \ni [(p_\alpha, g_\alpha)] \mapsto (p_\alpha, g_\alpha) \in M \times G$. La importancia de $\Gamma(\mathcal{G})$ reside en que, para todo haz fibrado isomorfa a una construcción como E en (8),

los elementos $s \in \Gamma(\mathcal{G})$ definen una acción sobre E por

$$s(p_\alpha)([p_\alpha, v_\alpha]) = [p_\alpha, h_\alpha v_\alpha], \quad (10)$$

donde $s|_{U_\alpha} = [(p_\alpha, h_\alpha)]$, $(p_\alpha, h_\alpha) \in U_\alpha \times G$.

La fórmula (10) sigue siendo válida si reemplazamos \mathbb{K}^m en (8) por una fibra F con una acción de la izquierda $G \times F \ni (t, v) \mapsto tv \in F$. Por ejemplo, $\Gamma(\mathcal{G})$ actúa sobre P^G por multiplicación por la izquierda.

5. Derivada covariante y transporte paralelo

Dado un haz vectorial E , una sección local $s : U \rightarrow \pi^{-1}(U) \cong U \times \mathbb{K}^m$ y un vector tangente $X = [c] \in T_pM$, $p \in U$, queremos calcular el “cambio de s en dirección de X ”, lo cual denotaremos por $\nabla_X s(p)$. Primero observamos que las derivadas parciales en coordenadas locales no sirven de mucho para este fin ya que una sección local $s(p) = [(\varphi_\alpha^{-1}(x), v_0)]$, $v_0 \in \mathbb{K}^m$, puede ser constante en coordenadas locales $x = \varphi_\alpha(p)$ pero no lo es en coordenadas locales $y = \varphi_\beta(p)$, por ejemplo si $t_{\beta\alpha}(p) = t_{\beta\alpha}(\varphi_\beta^{-1}(y))$ no es constante con respecto a la variable y , entonces $s(p) = [(\varphi_\beta^{-1}(y), v_\beta(y))]$, donde $v_\beta(y) = t_{\beta\alpha}(\varphi_\beta^{-1}(y))v_0$ no es necesariamente una función constante.

Otro intento sería definir la “derivada direccional” $\nabla_X s(p)$ por el límite de un cociente diferencial de la forma $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (s(c(t)) - s(c(0)))$, donde c está definido por $X = [c]$. Ahora el problema es que los vectores $s(c(t)) \in \pi^{-1}(c(t))$ y $s(c(0)) \in \pi^{-1}(c(0))$ pertenecen a **diferentes** espacios lineales: $\pi^{-1}(c(t)) \cap \pi^{-1}(c(0)) = \emptyset$ si $c(t) \neq c(0)$. Por lo tanto la diferencia en el cociente diferencial no está bien definido.

Para dar sentido al cociente diferencial, debemos transportar el vector $s(c(t)) \in \pi^{-1}(c(t))$ a la fibra $\pi^{-1}(c(0))$ **sin cambiar sus magnitudes físicas** o, en otras palabras, “lo más paralelo posible”. El problema al que nos enfrentamos ahora es: **¡El transporte paralelo a lo largo de una curva puede depender de la curva!** Para verlo, consideramos una 2-esfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Si un punto de masa se mueve sobre la S^2 con velocidad constante sin aceleración externa, su trayectoria es un círculo grande, y si transportamos un vector tangente a lo largo de un círculo grande lo más paralelo posible, entonces no se cambia la magnitud del vector ni el ángulo con el vector de velocidad. Como se ve en la figura 1, el resultado es diferente si transportamos el vector en C al A a lo largo de la curva \overline{CA} al que si lo transportamos primero a lo largo de \overline{CB} y después a lo largo de \overline{BA} . Para que el transporte paralelo sea bien definido, se tiene que definir para cualquier curva diferenciable (a pedazos).

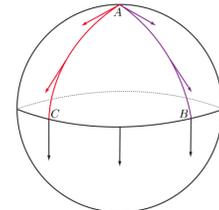


Figura 1.

Para resolver el problema de la definición de la derivada direccional, observamos primero que el transporte paralelo y la derivada covariante son notaciones equivalentes. Dado una derivada covariante $\nabla_X : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$, donde $X \in \Gamma(TM)$, se define el transporte paralelo de un vector $s_0 \in \pi^{-1}(c(t_0))$ a lo largo de una curva diferenciable c por la ecuación diferencial de primer orden $\nabla_{c'(t)}s(c(t)) = 0$ con condiciones iniciales $s(c(t_0)) = s_0$, donde $c'(t) = [c] \in T_{c(t)}M$. Por el teorema de existencia y unicidad, existe una única solución a lo largo de c .

Dado un transporte paralelo $\Pi_c : \pi^{-1}(c(t)) \rightarrow \pi^{-1}(c(t_0))$ para cualquier curva diferenciable c , podemos definir

$$\nabla_X s(p) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Pi_c(s(c(t))) - s(c(0))}{t}, \quad (11)$$

donde $X = [c] \in T_pM$. Mencionamos además que, sin condiciones adicionales, la derivada covariante no es única, y cada derivada covariante puede corresponder a otra situación física.

6. Campos de norma

En esta sección queremos estudiar un sistema físico concreto (antes de la cuantización). La variedad M corresponde a una región del espacio-tiempo, las partículas elementales son representados por una sección en un haz vectorial E con fibra \mathbb{C}^m , donde m se relaciona con los números cuánticos que caracterizan las partículas elementales (momento angular orbital, espín, hipercarga, etc.). Dado un producto interno en cada fibra, la función $M \ni p \rightarrow \|s(p)\|^2$ podemos interpretar como una densidad de probabilidad de encontrar las partículas en cierta región (asumiendo que la integral sobre M es 1).

Supongamos que existe una simetría, dado por un grupo de Lie $G \subset GL(m, \mathbb{C})$, que no cambia las magnitudes físicas. Como un cambio de coordenadas no debe cambiar las magnitudes físicas, consideramos G como el grupo de estructura, es decir $t_{\beta\alpha}(p) \in G$ en (8). Además recordemos que el grupo de norma $\Gamma(\mathcal{G})$ actúa sobre secciones de E como un grupo de simetría.

En teoría, un físico experimental puede determinar el transporte paralelo por llevar una partícula de prueba y un aparato de medición a lo largo de una curva sin actuar con fuerzas (mecánicas) externas sobre la partícula, por lo que suponemos que tenemos conocimiento completo sobre el transporte paralelo. En una carta local $\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \cong U_\alpha \times \mathbb{C}^m$, identificamos una base ortonormal con la base canónica $\{e_1(p), \dots, e_m(p)\} \subset \mathbb{C}^m$ (siempre es posible por una transformación unitaria). **¡Es importante notar que los vectores de la base canónica no son necesariamente paralelos!** Ahora podemos considerar el transporte paralelo de la base $\{e_1(p), \dots, e_m(p)\}$ a lo largo de una curva c con $c(0) = p$. Como las magnitudes físicas no cambian por el transporte paralelo, existe para cada t una matriz $g(t) := (g_k^j(t))_{j,k=1}^m \in G \subset GL(m, \mathbb{C})$

tal que $\Pi_c(e_k(c(t))) = \sum_{j=1}^m g_k^j(t) e_j(t)$. En particular, si consideramos los vectores $\frac{\partial}{\partial x^i} = [c_i] \in T_pM$ de la base canónica del espacio tangente, obtenemos $n = \dim(M)$ funciones $g_i(t) := (g_{i,k}^j(t))_{j,k=1}^m \in G$ tal que $\Pi_{c_i}(e_k(c_i(t))) = g_i(t)(e_j(p)) := \sum_{j=1}^m g_{i,k}^j(t) e_j(p)$ y $g_i(0) = \text{id}$. Aplicando (11), obtenemos

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} e_k(p) &:= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Pi_{c_i}(e_k(c_i(t))) - e_k(p)}{t}; \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(g_i(t) - \text{id})(e_k(p))}{t}; \\ &= g_i'(0)(e_k(p)). \end{aligned}$$

Dado que $g_i : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow G$ es diferenciable, notamos que $g_i'(0) \in T_{\text{id}}G = \mathfrak{g} \subset \text{Mat}_m(\mathbb{C})$, es decir, la derivada covariante $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}$ de la base canónica $\{e_1(p), \dots, e_m(p)\}$ está determinado por n matrices $g_i'(0)$ en el álgebra de Lie \mathfrak{g} del grupo de estructura G .

Notamos la siguiente regla de Leibniz: Dada una función diferenciable $s^k : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$, consideramos $c_i(t) = \varphi_\alpha^{-1}(x_1, \dots, x_i + t, \dots, x_n)$ tal que $[c_i] = \frac{\partial}{\partial x^i} \in T_pM$. Con un ligero abuso de notación, escribimos $s^k(x) := s^k(\varphi_\alpha^{-1}(x))$ así que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(s^k(c_i(t)) - s^k(c_i(0))) = \frac{\partial s^k}{\partial x^i}(x)$. Entonces, usando que el transporte paralelo Π_{c_i} es una aplicación lineal, calculamos

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\sum_{k=1}^m s^k(p) e_k(p) \right) &= \lim_{t \rightarrow 0} \sum_{k=1}^m \frac{\Pi_{c_i}(s^k(c_i(t)) e_k(c_i(t)) - s^k(p) e_k(p))}{t}; \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \sum_{k=1}^m \left(\frac{s^k(c_i(t)) - s^k(c_i(0))}{t} \Pi_{c_i}(e_k(c_i(t))) \right. \\ &\quad \left. + s^k(c_i(0)) \frac{\Pi_{c_i}(e_k(c_i(t))) - e_k(p)}{t} \right); \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{\partial s^k(x)}{\partial x^i} e_k(p) + \sum_{k,j=1}^m s^k(x) (g_{i,k}^j)'(0) e_j(p). \end{aligned}$$

Si redefinimos $A_i(p) := \frac{1}{i\kappa} g_i'(0) \in \text{Mat}_m(\mathbb{C})$, donde $\kappa \in \mathbb{R}$ denota una constante de acoplamiento (un escalamiento para obtener unidades conocidas), podemos escribir (12) brevemente

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} = \frac{\partial}{\partial x^i} + i\kappa A_i, \quad \text{donde } iA_i \in \mathfrak{g} \subset \text{Mat}_m(\mathbb{C}). \quad (12)$$

Además, la aplicación $X \mapsto \nabla_X$ es lineal, entonces la derivada covariante está únicamente determinado por (12).

Recordemos que el transporte paralelo y la derivada covariante son notaciones equivalentes. Observamos que, si $A_i(p) = 0$ para todo $i = 1, \dots, n$ y $p \in U_\alpha$, entonces la base canónica $\{e_1(p), \dots, e_m(p)\}$ es paralelo y el transporte paralelo está dado por asignar coeficientes constantes. **¡Entonces no depende del camino c !**

Por otro lado, si $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} = \frac{\partial}{\partial x^i}$ y si cambiamos las coordenadas por $y(x) := \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x)$ (equivalente: $x(y) = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(y)$), obtenemos las fórmulas de transforma-

ción

$$\begin{aligned}
\nabla_{\frac{\partial}{\partial y^j}} s_\beta(y) &= t_{\alpha\beta}^{-1}(y) \sum_{k=1}^n \frac{\partial x^k}{\partial y^j} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} (t_{\alpha\beta}(y) s_\beta(y)); \\
&= t_{\alpha\beta}^{-1}(y) \sum_{k=1}^n \frac{\partial x^k}{\partial y^j} \frac{\partial}{\partial x^k} (t_{\alpha\beta}(y) s_\beta(y)); \\
&= t_{\alpha\beta}^{-1}(y) \sum_{k=1}^n \frac{\partial x^k}{\partial y^j} \frac{\partial t_{\alpha\beta}(y)}{\partial x^k} s_\beta(y) + t_{\alpha\beta}^{-1}(y) t_{\alpha\beta}(y) \sum_{k=1}^n \frac{\partial x^k}{\partial y^j} \frac{\partial s_\beta(y)}{\partial x^k}; \\
&= t_{\alpha\beta}^{-1}(y) \frac{\partial t_{\alpha\beta}(y)}{\partial y^j} s_\beta(y) + \frac{\partial}{\partial y^j} s_\beta(y); \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial y^j} + t_{\beta\alpha}(y) \frac{\partial t_{\alpha\beta}(y)}{\partial y^j} \right) s_\beta(y), \tag{13}
\end{aligned}$$

entonces $A_j(y) = t_{\beta\alpha}(y) \frac{\partial t_{\alpha\beta}(y)}{\partial y^j}$ y posiblemente $A_j(y) \neq 0$ aunque el transporte paralelo sigue siendo independiente del camino sobre $U_\alpha \cap U_\beta$ porque no depende de las coordenadas locales.

La Ecuación (13) la podemos también interpretar de la siguiente manera: ¿Tal vez la aparición de las matrices $A_j(y) \neq 0$ está causada por una mala elección de coordenadas locales y siempre existen otras coordenadas locales $x = x(y)$ tal que $A_j(x) = 0$? La respuesta a esta pregunta se encuentra en el concepto matemático denominado *curvatura*. Dado una derivada covariante en coordenadas locales como en (12), se define la curvatura (salvo la constante $i\kappa$) en coordenadas locales $x = \varphi_\alpha(p)$ por

$$F_{ij}(x) := \frac{\partial A_j(x)}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i(x)}{\partial x^j} + i\kappa [A_i(x), A_j(x)] \in \text{Mat}_m(\mathbb{C}). \tag{14}$$

Resulta que, si $F_{ij}(x) = 0$ para todo $x \in \varphi_\alpha(U_\alpha)$ y todo $i, j = 1, \dots, n$, **entonces el transporte paralelo es independiente del camino** sobre U_α . Es una propiedad *intrínseca* de la derivada covariante, es decir, no depende de coordenadas locales. Puede ocurrir en cualquier variedad diferenciable aunque los casos más interesantes son los de haces vectoriales no triviales para los cuales la topología obliga que $F_{ij}(x) \neq 0$ en alguna región. Por ejemplo no existe una sección global (campo vectorial) del haz tangente de la 2-esfera que no se anula en ningún punto (teorema de la bola peluda), pero si $F_{ij} \equiv 0$, podríamos construir tal campo vectorial por transportar un vector no nulo a todas partes.

La pregunta más importante de estas notas es: ¿Cuál es la interpretación física de la curvatura? Matemáticamente sabemos que la curvatura es una obstrucción para que el transporte paralelo sea independiente del camino. Físicamente interpretamos el transporte paralelo como el transporte de un estado físico sin aplicar fuerzas *externas* a lo largo de una trayectoria. Sin embargo, si la curvatura es diferente a 0, existen curvas cerradas tal que el transporte paralelo causa un cambio de estado físico aunque las magnitudes observables no han cambiado. ¿A qué podemos atribuir este cambio? Aún no hemos definido que es una fuerza. Si definimos la *ausencia de fuerzas* por la ausencia de cambios de estados físicos,

es muy natural concluir que la presencia de curvatura es causado por una fuerza, o la curvatura está causando una fuerza, y como no se actuó sobre el sistema durante el transporte paralelo con una fuerza *externa*, consideramos la curvatura como una fuerza *interna*. El principio fundamental que postulamos es:

curvatura ~ fuerza

Es interesante notar que el postulado reúne las 4 fuerzas fundamentales en el mismo principio: la gravedad se manifiesta en la curvatura del espacio tiempo, y las fuerzas electromagnéticas, débiles y fuertes de las partículas elementales se explican por una cuantización de los campos de curvatura de (14) con el grupo de estructura (simetrías internas) $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$.

7. Ejemplo: Electromagnetismo

Consideramos el ejemplo más simple y más prominente, el electromagnetismo asociado a una teoría de norma con el grupo de estructura $U(1)$. Considerando el grupo de Lie $U(1)$ como la variedad diferenciable 1-dimensional $U(1) \cong \mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \subset \mathbb{C} \cong \text{Mat}_1(\mathbb{C})$, obtenemos los isomorfismos

$$\begin{aligned}
u(1) := T_{\text{id}}U(1) &\cong \{c'(0) : [c(t)] = [e^{iy(t)}] \in T_1\mathbb{S}^1\}; \\
&\cong \{iy'(0) : \gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}, \gamma(0) = 0\}; \\
&\cong i\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Usando las coordenadas locales $\varphi_\alpha(p) = x = (ct, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4$, donde t tiene el significado de tiempo y c denota la velocidad de la luz, obtenemos por (12) cuatro funciones $(A_0(x), A_1(x), A_2(x), A_3(x))$ tal que $i\kappa A_j(x) \in u(1) \cong i\mathbb{R}$, por lo tanto $A_j(x) \in \mathbb{R}$. Este 4-vector es muy conocido, a saber, $(A_0(x), A_1(x), A_2(x), A_3(x)) = (\frac{1}{c}u(x), \vec{A}(x))$, donde u denota el *potencial eléctrico* y \vec{A} el *vector potencial magnético*. Este potencial no es único, si reemplazamos las funciones de transición $t_{\alpha\beta}$ en (13) por un elemento del grupo de norma $t \in \Gamma(\mathcal{G})$, donde $G = U(1)$ en la Definición 4.1 y $t(x) = e^{iy(x)}$, obtenemos por cálculos similares a (13) que $(A_0(x), A_1(x), A_2(x), A_3(x))$ y $(A_0(x), A_1(x), A_2(x), A_3(x)) + (\frac{1}{c} \frac{\partial \gamma(x)}{\partial t}, \frac{\partial \gamma(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial \gamma(x)}{\partial x_2}, \frac{\partial \gamma(x)}{\partial x_3})$ determinan el mismo campo electromagnético. Como $\text{Mat}_1(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$ es conmutativa, obtenemos $[A_i(x), A_j(x)] = 0$ en (14), entonces $F_{ij}(x) := \frac{\partial A_j(x)}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i(x)}{\partial x^j}$. Si $(E_1(x), E_2(x), E_3(x))$ denota el campo eléctrico y $(B_1(x), B_2(x), B_3(x))$ denota el campo magnético, obtenemos el “tensor de campo electromagnético”

$$(F_{ij}(x))_{i,j=0}^3 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c}E_1(x) & -\frac{1}{c}E_2(x) & -\frac{1}{c}E_3(x) \\ \frac{1}{c}E_1(x) & 0 & -B_3(x) & B_2(x) \\ \frac{1}{c}E_2(x) & B_3(x) & 0 & -B_1(x) \\ \frac{1}{c}E_3(x) & -B_2(x) & B_1(x) & 0 \end{pmatrix}.$$

Referencias

- [1] Atiyah, M. F., *Geometry of Yang-Mills fields*, Lecture Notes in Phys. 80, Springer, Berlin-New York, 1978.
- [2] Gökeler, M., Schücker, T., *Differential geometry, gauge theories, and gravity*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
- [3] Jost, J., *Geometry and physics*, Springer-Verlag, Berlin, 2009.
- [4] Zeidler, E., *Quantum field theory III. Gauge theory. A bridge between mathematicians and physicists*, Springer, Heidelberg, 2011.