PROBLEMAS DE PRÁCTICA
(Semana 9)

FACTORIZACIÓN

Problema 1. Demuestre que la ecuación $a^2b^2 + b^2c^2 + 3b^2 - a^2 - c^2 = 2020$ no admite soluciones en números enteros a, b y c.

Problema 2. Demuestre que si m y n son números naturales entonces

$$4mn - m - n$$

no es un cuadrado perfecto.

Problema 3. Demuestre que si $n \in \mathbb{Z}$ es tal que $n^2 + 11$ es un número primo entonces $n + 4$ no es un cubo perfecto.

Problema 4. Sean p y q primos gemelos (es decir, p y q son números primos y $|p - q| = 2$). Demuestre que $(p^4 + 4, q^4 + 4) > 1$.

Problema 5. Halle todos los números enteros positivos a y b tales que

$$\frac{a^2(b-a)}{b+a} = p^2$$

para algún número primo p.

ACOTACIÓN

Problema 6. Decimos que un número es *supersticioso* si es igual a trece veces la suma de sus dígitos. ¿Cuál es el mayor número supersticioso?

Problema 7. ¿Cuáles son todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $3^{n-1} + 5^{n-1} \mid 3^n + 5^n$?

INTERCALACIÓN

Problema 8. Encuentre todas las parejas (x, y) de números enteros tales que $x^3 = y^3 + 2y^2 + 1$.

Problema 9. a) ¿Existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $3^{6n-3}+3^{3n-1}+1$ es un cubo perfecto?

b) ¿Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(n+2)^4 - n^4$ es un cubo perfecto?

CONSTRUCCIÓN Y/O DETERMINACIÓN EXPLÍCITA

Problema 10. Un número es *suertudo* si al sumar los cuadrados de sus cifras y repetir esta operación suficientes veces obtenemos el número 1. Por ejemplo, 1900 es suertudo ya que $1900 \to 82 \to 68 \to 100 \to 1$. Encuentre una infinidad de parejas de números enteros consecutivos en las que ambos números son suertudos.

Problema 11. Demuestre que si alguno de los términos de una progresión aritmética es un cuadrado perfecto entonces en esa progresión aritmética aparecen una infinidad de cuadrados perfectos.

Problema 12. Decimos que la pareja (m, n) de números enteros positivos es *permanente* si se cumplen las dos condiciones siguientes:

a) m y n tienen los mismos factores primos y

b) $m+1$ y $n+1$ también tienen los mismos factores primos.

Demuestre que hay una infinidad de parejas (m, n) que son permanentes.

Problema 13. Demuestre que para cada entero $n > 1$ existen enteros x, y tales que

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \cdots + \frac{1}{y(y+1)}.$$

CONGRUENCIAS, CASOS CON CONGRUENCIAS

Problema 14. Sea p un número primo. Demuestre que p divide a $\alpha(\alpha-1)+3$ para algún número entero α si y sólo si p divide a $\beta(\beta-1)+25$ para algún número entero β.

Problema 15. Sean p, q números primos tales que $p + q^2$ es un cuadrado perfecto. Demuestre que si n es un número entero positivo entonces $p^2 + q^n$ no puede ser un cuadrado perfecto.

Problema 16. Encuentre todos los números de 7 dígitos que son múltiplos de 3 y 7 y cuyos únicos dígitos son 3 o 7.

PEQUEÑO TEOREMA DE FERMAT

Problema 17. Sea p un número primo impar. Demuestre que

$$2^{2^p-2} \equiv 1 \pmod{2^p+1}.$$

Problema 18. Determine todos los números primos de la forma

$$1 + 2^p + 3^p + \cdots + p^p$$

donde p es un número primo.

Problema 19. Demuestre que si n es un número natural mayor que 1 entonces $n \nmid 2^n - 1$.

Problema 20. Considere la sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots$ definida por

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Determine cuáles son todos los números naturales que son coprimos con todos los elementos de la sucesión.

TEORÍA DE NÚMEROS PARA LA SELECCIÓN

Gro., México; a 2 de noviembre de 2020.