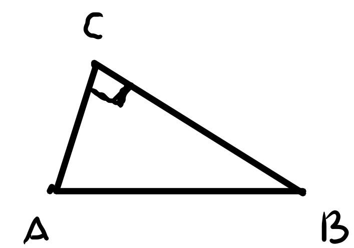
Reducción al absurdo (pruebas por contradicción)

Los teoremas de las matemáticas son de la forma:

$$\text{SI } \underbrace{P}_{\text{hipótesis}} \text{ ENTONCES } \underbrace{Q}_{\text{tesis/conclusión}}.$$

EJEMPLOS.



a) Si ABC es un triángulo rectángulo con $\angle ACB = 90^\circ$, entonces $AC^2 + CB^2 = AB^2$.

b) Si a, b y c son números enteros y $a|b$ y $b|c$, entonces $a|c$.

c) Si p es un número primo mayor que 3, entonces $p = 6m+1$ ó $p = 6m+5$ para algún entero m.

¿Cómo se demuestra una afirmación del tipo

SI P, ENTONCES Q

mediante reducción al absurdo?

☆ Empezamos por suponer que Q no se cumple y, a partir de ese supuesto, hacemos las inferencias que nos sean posibles.

☆ Si en algún momento llegamos a una conclusión que sea ABSURDA (ilógica, imposible), entonces terminaremos pues habremos establecido que el supuesto de que Q no se cumple NO ES ACEPTABLE (por sus repercusiones absurdas).

"CUANDO SE HA ELIMINADO TODO LO QUE ES IMPOSIBLE, LO QUE QUEDA, POR IMPROBABLE QUE PAREZCA, DEBE SER LA VERDAD."

Ejemplo 0. Demuestre que si m y n son números enteros que satisfacen la igualdad

$$n+n^2+n^3 = m^2+m$$

entonces n es par.

P (hipótesis)
1° m, n son núm. enteros
2° $n+n^2+n^3=m^2+m$

Q (tesis)
• n es par

Solución.

Supongamos que n es impar.

Como n es impar entonces

x	P	I
P	P	P
I	P	I

$$\underbrace{n}_{\text{IMPAR}}+\underbrace{n^2}_{\text{IMPAR}}+\underbrace{n^3}_{\text{IMPAR}}$$

$$\begin{array}{r} 2K_1+1 \\ 2K_2+1 \\ 2K_3+1 \\ \hline \underbrace{2(K_1+K_2+K_3+1)+1}_{\text{Impar}} \end{array}$$

es un número IMPAR. Entonces

Como $m^2+m = n+n^2+n^3$,

m^2+m es IMPAR $(\star)$

Ahora bien, de $m^2+m = \underbrace{m(m+1)}_{\text{Consecutivos}}$

se afirma que

m^2+m es PAR $(\star\star)$

lo cual entra en conflicto con lo obtenido en $(\star)$, y la prueba termina.

$\therefore$ n es par

Ejemplo 1. Demuestre que las mediatrices de cualesquiera dos lados de un triángulo se intersecan.

Ejemplo 2. Demuestre que no existen números enteros a y b tales que

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}.$$

Solución.

Supongamos que sí existen enteros a y b tales que

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

Podemos suponer que $a>0$, $b>0$ y que, aparte del 1, no tienen otro factor en común

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

$$2 = \frac{a^2}{b^2}$$

$$2b^2 = a^2 \qquad (\star)$$

×	P	I
P	P	P
I	P	I

$\therefore$ a^2 es un número par

$\therefore$ a es un número par

$a = 2m$ para algún ente m $(\star\star)$

$\leftrightarrow$ $2 | a$

$$2b^2 = (2m)^2$$

$$2b^2 = 4m^2$$

$$b^2 = 2m^2$$

$\therefore$ b^2 es un número par

$\therefore$ b es un número par

$b = 2n$ $\leftrightarrow$ $(2 | b)$ $(\star\star\star)$

a y b son múltiplos de 2; entonces

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

es una fracción que no está escrita en su mínima expresión, ¡contradicción!

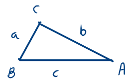
$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \ldots$$

Ejemplo 3. La sucesión de los números primos no tiene fin; en otras palabras, hay una infinidad de números primos.

Ejemplo 4.

a) Los lados de un triángulo miden 15, 20 y 25. Calcule el área de ese triángulo.

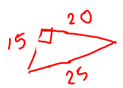
b) Demuestre el recíproco del teorema de Pitágoras:



Si en un triángulo como el de la figura se cumple que $a^2+b^2=c^2$, entonces $\measuredangle BCA = 90^\circ$.

Solución

a)

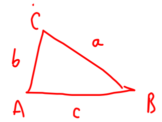


$15^2+20^2 = 225+400 = 625$

$25^2 = (20+5)^2$
$= 400 + 200 + 25 = 625$

$A = \dfrac{15\cdot 20}{2} = 150$

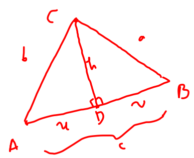
b) Recíproco del teorema de Pitágoras



Si $a^2+b^2=c^2$ entonces $\measuredangle ACB = 90^\circ$

Dem (por reducción al absurdo)

Supongamos que $\measuredangle ACB \neq 90^\circ$.



$b^2 = h^2+u^2 \quad (1)$

$a^2 = h^2+v^2 \quad (2)$

$c^2 = a^2+b^2$

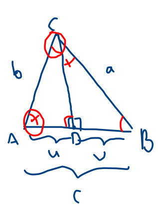
$(u+v)^2 = h^2+v^2+h^2+u^2$

$\cancel{u^2}+2uv+\cancel{v^2} = 2h^2+\cancel{v^2}+\cancel{u^2}$

$2uv = 2h^2$

$uv = h^2$

$\dfrac{u}{h} = \dfrac{h}{v}$



$\triangle ADC \sim \triangle CDB$

$\measuredangle ACB \neq 90^\circ$

$\measuredangle ACB = \measuredangle ACD + \measuredangle DCB = 90^\circ$

¡contradicción!

$\triangle ADC$

$\measuredangle CAD + \measuredangle ACD = 90^\circ$

$\measuredangle ACB = \measuredangle ACD + \measuredangle DCB = \measuredangle ACD + \measuredangle CAD$
$= 90^\circ$