La ecuación de Pell en las olimpiadas de matemáticas

Por José Hernández Santiago

1. Introducción: tres problemas

Consideremos los siguientes problemas:

Problema 1. *(USAMO 1986, problema 3). La media cuadrática de los números* a_1*,* $a_2, \ldots, a_k$ *es igual a*

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + \cdots + a_k^2}{k}}.$$

¿Existe un número entero positivo $k > 1$ *tal que la media cuadrática de los primeros* k *números enteros positivos sea igual a un número entero?*

Problema 2. *En una maratón reciente en Alfagonia*[2]*, todos los corredores fueron numerados con números enteros consecutivos comenzando con el* 1*.*
Uno de los participantes observó que la suma de los números de todos los corredores cuyos números eran menores al suyo era igual a la suma de los números de los corredores cuyos números eran mayores que el de él.
Si había más de 100 *corredores pero menos de* 1000*, ¿puede decir cuál era el número del corredor que contaba y cuántos otros corredores participaron en la maratón?*

Problema 3. *(B. J. Venkatachala;* Amer. Math. Monthly*, 2001, p. 469). Halle todos los números enteros positivos* Q *y* u *tales que* $3^Q = 2u^2 + 1$*.*

[2]Este problema proviene del libro *Las nueve cifras y el cambiante cero* del Prof. Bernardo Recamán Santos (hay varias ediciones de ese texto): se trata de una variante de uno planteado por Henry Dudeney (1857-1930) en *Strand Magazine* en 1914. El problema es célebre pues hay una anécdota de cómo Prasanta Chandra Mahalanobis (1873-1972) lo planteó al genio matemático hindú Srinivasa Ramanujan (1887-1920) en una ocasión y cómo éste rápidamente lo resolvió mientras preparaba la cena para ambos.

Por inconexos que estos problemas puedan parecer, al trabajar en ellos se aprecia que los tres pueden vincularse con la determinación del conjunto de pares ordenados $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ que satisfacen una ecuación de la forma

$$\mathcal{X}^2 - d\mathcal{Y}^2 = 1 \tag{1}$$

donde d es un número entero positivo que no es igual a un cuadrado perfecto[3]. A una ecuación de esa forma se le conoce como[4] *ecuación de Fermat-Pell* o simplemente *ecuación de Pell* y al conjunto de pares ordenados $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ que la satisfacen se le denomina el *conjunto de soluciones de la ecuación*. El **objetivo principal** en este artículo es discutir los resultados centrales sobre el conjunto de soluciones de las ecuaciones de Pell; una vez expuestos tales resultados, la idea es ilustrar cómo es que ellos permiten establecer problemas como los planteados arriba y varios más.

A fin de abundar en lo mencionado al inicio del párrafo previo, analicemos el Problema 1. Este problema solicita determinar si existen números enteros positivos k y N, con $k > 1$, tales que

$$\sqrt{\frac{1^2 + 2^2 + \cdots + k^2}{k}} = N. \tag{2}$$

Al aplicar la conocida fórmula para sumar los cuadrados de los primeros números enteros positivos y simplificar lo así obtenido tenemos que la ecuación en (2) puede reescribirse como

$$\frac{(k+1)(2k+1)}{6} = N^2$$

o bien como $2k^2 + 3k + 1 = 6N^2$. Al multiplicar por 2 ambos lados de la ecuación anterior se llega a

$$\left(2k + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 2 = 12N^2$$

[3] Algunas aclaraciones sobre la terminología y la notación: con $\mathbb{Z}^+$ denotamos al conjunto de los números enteros positivos; $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ es el conjunto conformado por todos los pares ordenados (x, y) en los que tanto x como y son números enteros positivos. En un par ordenado (x, y), al número x se le conoce como *abscisa* y al número y se le conoce como *ordenada*. Por último, con *cuadrado perfecto* nos referimos a un número que es el cuadrado de un número entero.

[4] Aunque las frases "ecuación de Fermat-Pell" o "ecuación de Pell" están muy establecidas en la literatura ello no significa que los teoremas básicos sobre la ecuación fueron establecidos por Pierre de Fermat (1601-1665) o por John Pell (1611-1685). El apellido de Pierre de Fermat figura ahí porque hay evidencia de que él había resuelto algunos casos específicos de la ecuación y porque, en alguna de sus cartas, él dejó entrever que ya sabía que la ecuación $\mathcal{X}^2 - d\mathcal{Y}^2 = 1$ tiene una infinidad de soluciones $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ (cuando d es un número entero positivo que no es un cuadrado perfecto); sin embargo, Fermat no explicó su demostración de esto último en lado alguno. El apellido de John Pell entró a escena por una atribución errónea que hizo Leonhard Euler (1707-1783) al escribir sobre un método de William Brouncker (1620-1684) para resolver tales ecuaciones. La primera persona en demostrar que una ecuación de Pell siempre tiene soluciones en números enteros positivos fue Joseph Louis Lagrange (1736-1813). En el artículo nosotros no seguimos el enfoque de Lagrange sino el tratamiento de Richard Dedekind (1831-1916) del enfoque introducido por Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859). Para más detalles sobre la peculiar historia de la ecuación de Pell se puede consultar [11, pp. 92-98, 173-174 y 314-315].

o, equivalentemente, a

$$(4k+3)^2 - 48N^2 = 1. \tag{3}$$

Así pues, el problema original se ha conectado con la ecuación de Pell

$$\mathcal{X}^2 - 48\mathcal{Y}^2 = 1. \tag{4}$$

Esta ecuación tiene al menos una solución en números enteros positivos $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$: aquella en la que $\mathcal{X} = 7$ y $\mathcal{Y} = 1$ y la cual se relaciona con la solución $(k = 1, N = 1)$ de (3). En este momento surgen de modo natural dos interrogantes:

A) ¿Hay otras soluciones $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ de (4)?

B) ¿Cada solución de (4) da lugar a una solución de (3)?

Es evidente que una respuesta afirmativa a ambas preguntas produciría una respuesta afirmativa al problema que se está analizando. En la Sección 2 del artículo discutiremos la respuesta a la pregunta en A para la ecuación general de Pell $\mathcal{X}^2 - d\mathcal{Y}^2 = 1$ (donde d es un número entero positivo que no es igual a un cuadrado perfecto); en la Sección 3 explicaremos cómo aplicar esa información para responder a la pregunta B (y concluir con ello la solución del Problema 1).

Consideremos ahora el Problema 2. Denotemos con y al número del corredor que observó las sumas de los números de los otros corredores y denotemos con T al total de corredores en la maratón. Del planteamiento del problema se sigue que y y T satisfacen

$$1 + 2 + \cdots + (y-1) = (1 + 2 + \cdots + T) - (1 + 2 + \cdots + y). \tag{5}$$

Después de calcular las sumas y simplificar, la ecuación en el renglón anterior se transforma en $(y-1)y + y(y+1) = T(T+1)$ o bien en

$$\begin{aligned} T(T+1) - 2y^2 &= 0, \\ 4T^2 + 4T - 8y^2 &= 0, \\ (2T+1)^2 - 8y^2 &= 1. \end{aligned} \tag{6}$$

De (6) es evidente la conexión del problema con la ecuación de Pell $\mathcal{X}^2 - 8\mathcal{Y}^2 = 1$. En la Sección 3 veremos cómo la teoría de la ecuación de Pell nos permite generar soluciones para (6) a partir de la solución $(\mathcal{X} = 3, \mathcal{Y} = 1)$ de $\mathcal{X}^2 - 8\mathcal{Y}^2 = 1$.

En el análisis del Problema 3 también puede introducirse una ecuación de Pell. No obstante, para obtener la conclusión en ese caso, aparte de la teoría en la Sección 2 del artículo, recurriremos a algunas ideas que discutiremos en la Sección 4: es por ello que relegaremos la resolución de este problema a una de las subsecciones de esa sección.

Cabe recalcar que, en nuestro artículo, el punto medular no es que los problemas considerados solamente se pueden resolver cuando se sabe de la ecuación de Pell: el punto es más bien que la ecuación de Pell provee un marco común dentro del cual podemos englobar y sistemáticamente abordar una buena cantidad de problemas de teoría de números.

2. Dos teoremas

Una ecuación de Pell es una ecuación de la forma

$$\mathcal{X}^2 - d\mathcal{Y}^2 = 1 \tag{7}$$

donde d es un número entero positivo que no es un cuadrado perfecto. El problema básico consiste en determinar todos los pares ordenados $(x, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ que satisfacen (7). Son dos los *hechos* que todo olímpico debe conocer sobre la ecuación de Pell:

- Que toda ecuación de Pell tiene una *solución fundamental* (o *mínima*).
- Que toda ecuación de Pell tiene una infinidad de soluciones $(x, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ y que todas ellas se pueden obtener al calcular *potencias* de la solución fundamental.

Lo que haremos a continuación es demostrar ambas afirmaciones. La factorización $\mathcal{X}^2 - d\mathcal{Y}^2 = \left(\mathcal{X} - \mathcal{Y}\sqrt{d}\right)\left(\mathcal{X} + \mathcal{Y}\sqrt{d}\right)$ indica que para ubicar las soluciones de (7) tiene sentido estudiar el conjunto $\left\{\frac{\mathcal{X}}{\mathcal{Y}} - \sqrt{d} \colon (\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+\right\}$ o, dicho de otra forma, las aproximaciones a $\sqrt{d}$ mediante números racionales. El primer resultado de la sección es un caso especial de un teorema de Peter Gustav Lejeune Dirichlet al que se le conoce como *teorema de aproximación diofántica de Dirichlet* (en caso de no haberlo hecho aún, ver la nota al pie no. 4). Fue en esas investigaciones de Dirichlet que surgieron unas de las primeras aplicaciones de lo que ahora llamamos **el principio de las casillas**; a ello se debe que el principio suela atribuirse a ese gran matemático–algunos autores incluso le denominan *el principio de las cajas de Dirichlet* (ver, por ejemplo, [2, p. 59], [8, p. 1] o [12, p. 80])–pero la legitimidad de tal atribución está en duda en la actualidad (cf. [6]).

Lema 1. *Sean d un número entero positivo que no es un cuadrado perfecto y N un número entero positivo. Existen $x, y \in \mathbb{Z}^+$ tales que*

$$\left|x - y\sqrt{d}\right| < \frac{1}{N} \leq \frac{1}{y} \tag{8}$$

Demostración. Para cada $j \in \{1, 2, \ldots, N+1\}$, sea $a_j = j\sqrt{d} - \lfloor j\sqrt{d} \rfloor$ (esto es, a_j es la parte fraccionaria del número $j\sqrt{d}$). Puesto que d no es un cuadrado perfecto, para cada $a_j \in \{1, 2, \ldots, N+1\}$ se cumple que $a_j \in (0, 1)$; se observa además que en la sucesión $a_1, a_2, \ldots, a_{N+1}$ no hay números repetidos[5]. Consideremos ahora la

[5] Si $a_i = a_j$ entonces $\sqrt{d} = \frac{a}{b}$ para algunos números enteros positivos a y b tales que $\operatorname{mcd}(a, b) = 1$. La sugerencia universal en aritmética (ver [3, p. 42] o [7, Teorema 6]) garantiza en tal caso que $ax + by = 1$ para algunos números enteros x y y. Elevando al cuadrado ambos lados de la igualdad anterior se obtiene que

$$1 = a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 = db^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 = b(dbx^2 + 2axy + by^2);$$

de esto se sigue que $b \mid 1$ y, consiguientemente, que $b = 1$. Así pues, $d = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = a^2$, *quod est absurdum.*

partición del intervalo $(0, 1]$ dada por los intervalos

$$\left(0, \frac{1}{N}\right], \left(\frac{1}{N}, \frac{2}{N}\right], \left(\frac{2}{N}, \frac{3}{N}\right], \ldots, \left(\frac{N-1}{N}, 1\right]:$$

Por el principio de las casillas, existen $m, n \in \{1, 2, \ldots, N+1\}$, con $m > n$, tales que

$$a_m, a_n \in \left(\frac{\ell - 1}{N}, \frac{\ell}{N}\right)$$

para algún $\ell \in \{1, 2, \ldots, N\}$. De esto se sigue que $|a_n - a_m| < \frac{1}{N}$, lo cual es equivalente a

$$\left|(n\sqrt{d} - \lfloor n\sqrt{d}\rfloor) - (m\sqrt{d} - \lfloor m\sqrt{d}\rfloor)\right| < \frac{1}{N},$$

$$\left|(\lfloor m\sqrt{d}\rfloor - \lfloor n\sqrt{d}\rfloor) - (m-n)\sqrt{d}\right| < \frac{1}{N}. \tag{9}$$

Haciendo $x = \lfloor m\sqrt{d}\rfloor - \lfloor n\sqrt{d}\rfloor$ y $y = m - n$ se consigue lo deseado pues de esa manera (9) se puede reescribir como

$$|x - y\sqrt{d}| < \frac{1}{N};$$

además, por la información que se tiene sobre m y n se garantiza que x es un número entero positivo y que y es un número entero positivo menor o igual que N. □

Lema 2. *Sea d un número entero positivo que no es un cuadrado perfecto. Existe una infinidad de pares ordenados $(x, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ tales que*

$$\left|x - y\sqrt{d}\right| < \frac{1}{y}.$$

Demostración. Sea $\mathcal{S} = \left\{(x, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ : |x - y\sqrt{d}| < \frac{1}{y}\right\}$. Supongamos que $\mathcal{S}$ es finito y denotemos con $\mathfrak{m}$ al elemento mínimo del conjunto $\left\{|x - y\sqrt{d}| : (x, y) \in \mathcal{S}\right\}$: este número $\mathfrak{m}$ está bien definido y es positivo. Sea N un número entero positivo tal que $\frac{1}{N} \leq \mathfrak{m}$. Por el lema 1, existe $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ tal que

$$\left|x_0 - y_0\sqrt{d}\right| < \frac{1}{N} \leq \frac{1}{y_0}.$$

De la desigualdad previa se sigue que $(x_0, y_0) \in \mathcal{S}$. Contemplando esto y la minimalidad de $\mathfrak{m}$ se llega a que

$$\mathfrak{m} \leq |x_0 - y_0\sqrt{d}| < \frac{1}{N} \leq \mathfrak{m}$$

lo cual es un absurdo y la demostración termina. □

Viene ahora el primer teorema del artículo: la demostración inicia con la observación de que, cuando d es un entero positivo que no es un cuadrado perfecto, la expresión $|x^2 - dy^2|$ es igual a un mismo número entero para una infinidad de pares ordenados $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Teorema 1. *Sea d un número entero positivo que no es un cuadrado perfecto. La ecuación de Pell*

$$\mathcal{X}^2 - d\mathcal{Y}^2 = 1 \tag{10}$$

admite soluciones en $\mathbb{Z}^+$: es decir, existen $(x, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ tales que $x^2 - dy^2 = 1$.

Demostración. Por el lema anterior sabemos que hay una infinidad de pares ordenados en el conjunto $\mathcal{S} = \left\{(x, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ : |x - y\sqrt{d}| < \frac{1}{y}\right\}$. Para cada par ordenado (x, y) en $\mathcal{S}$ se cumple que

$$\left|x + y\sqrt{d}\right| = \left|(x - y\sqrt{d}) + 2y\sqrt{d}\right| \leq \left|x - y\sqrt{d}\right| + 2y\sqrt{d} < \frac{1}{y} + 2y\sqrt{d}$$

y que

$$\begin{aligned}\left|x^2 - dy^2\right| &= \left|x - y\sqrt{d}\right| \left|x + y\sqrt{d}\right| \\ &< \frac{1}{y}\left(\frac{1}{y} + 2y\sqrt{d}\right) \\ &= \frac{1}{y^2} + 2\sqrt{d} \\ &\leq 1 + 2\sqrt{d}.\end{aligned}$$

Puesto que hay una infinidad de pares ordenados $(x, y) \in \mathcal{S}$, existe un número entero $k \neq 0$ (y de valor absoluto menor o igual que $1 + 2\sqrt{d}$) tal que la igualdad

$$x^2 - dy^2 = k \tag{11}$$

vale para una infinidad de pares ordenados $(x, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$: lo que haremos a continuación es **construir** una solución–en enteros positivos–para (10) con ayuda de (11). Entre la infinidad de pares ordenados $(x, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ que satisfacen (11), es posible elegir dos pares ordenados (x_1, y_1) y (x_2, y_2), distintos, tales que

$$x_1 \equiv x_2 \pmod{|k|} \quad \text{y} \quad y_1 \equiv y_2 \pmod{|k|}. \tag{12}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}k^2 &= (x_1^2 - dy_1^2)(x_2^2 - dy_2^2) = (x_1^2 x_2^2 + d^2 y_1^2 y_2^2) - d(x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2) \\ &= (x_1 x_2 - dy_1 y_2)^2 - d(x_1 y_2 - x_2 y_1)^2.\end{aligned} \tag{13}$$

En vista de (12) tenemos que $x_1 x_2 - dy_1 y_2 \equiv x_2^2 - dy_2^2 \pmod{|k|}$ y que $x_1 y_2 - x_2 y_1 \equiv x_2 y_2 - x_2 y_2 \pmod{|k|}$; estas congruencias indican que las dos expresiones que aparecen entre paréntesis en (13) son divisibles por $|k|$ y que esa igualdad se puede reescribir como

$$1 = \left(\frac{x_1x_2 - dy_1y_2}{|k|}\right)^2 - d\left(\frac{x_1y_2 - x_2y_1}{|k|}\right)^2.$$

Para garantizar la existencia de una solución $(x, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ de (10) a partir de esta última igualdad, resta verificar que $x_1y_2 - x_2y_1 \neq 0$. Hacemos esto por reducción al absurdo.
Si $x_1y_2 = x_2y_1$, entonces de (13) se desprende que $x_1x_2 - dy_1y_2 = \pm k$. Surgen dos casos:

1) Si $x_1x_2 - dy_1y_2 = k$, entonces $(x_1y_2)x_2 - dy_1y_2^2 = ky_2$ y, en consecuencia, $(x_2y_1)x_2 - dy_1y_2^2 = ky_2$ lo cual implica que $y_1(x_2^2 - dy_2^2) = ky_2$; apelando a la igualdad $x_2^2 - dy_2^2 = k$ se obtiene que $y_1 = y_2$ y $x_1 = x_2$, lo que entra en conflicto con el hecho de que los pares ordenados (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son distintos.

2) Si $x_1x_2 - dy_1y_2 = -k$, entonces $(x_1y_2)x_2 - dy_1y_2^2 = -ky_2$ y, en consecuencia, $(x_2y_1)x_2 - dy_1y_2^2 = -ky_2$ lo cual implica que $y_1(x_2^2 - dy_2^2) = -ky_2$; recurriendo a la igualdad $x_2^2 - dy_2^2 = k$ se llega a que $y_1 = -y_2$, lo que también es un absurdo (pues $-y_2$ es un número negativo).

□

Podemos precisar ahora la noción de *solución fundamental* (o *mínima*) de la ecuación de Pell

$$\mathcal{X}^2 - d\mathcal{Y}^2 = 1.$$

La *solución fundamental* de esta ecuación es el par ordenado $(x, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$, **con la menor abscisa posible**, tal que $x^2 - dy^2 = 1$. Notemos que si (x, y) es la solución fundamental de $\mathcal{X}^2 - d\mathcal{Y}^2 = 1$ y $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ es otra solución de esa misma ecuación entonces $y \leq \mathbf{y}$ y $x + y\sqrt{d} \leq \mathbf{x} + \mathbf{y}\sqrt{d}$. Lo muy relevante de la solución fundamental de una ecuación de Pell es que con ayuda de ella se determinan el resto de soluciones de la misma.

Teorema 2. *Sea d un número entero positivo que no es un cuadrado perfecto. Supongamos que (x, y) es la solución fundamental de la ecuación de Pell*

$$\mathcal{X}^2 - d\mathcal{Y}^2 = 1. \tag{14}$$

Si $r \in \mathbb{Z}^+$ y $(u, v) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ es el par ordenado que se determina mediante la igualdad

$$(x + y\sqrt{d})^r = u + v\sqrt{d}, \tag{15}$$

entonces

$$u^2 - dv^2 = 1.$$

Recíprocamente, si $(u, v) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ es una solución de (14) entonces

$$u + v\sqrt{d} = (x + y\sqrt{d})^r$$

para algún $r \in \mathbb{Z}^+$.

Antes de ir a la demostración de este teorema, es necesario hacer algunas precisiones sobre la manera en que funciona (15). Si $r \in \mathbb{Z}^+$, entonces $(x + y\sqrt{d})^r$ siempre se puede llevar a la forma $A + B\sqrt{d}$ para algunos números enteros A y B; además, dado que d es un número entero positivo que no es un cuadrado perfecto, hay una única representación de $(x + y\sqrt{d})^r$ en esa forma.
Consideremos, a guisa de ejemplo, el caso de la ecuación de Pell $\mathcal{X}^2 - 2\mathcal{Y}^2 = 1$. La solución fundamental de esta ecuación es $(x = 3, y = 2)$. De acuerdo con la primera parte del teorema 2, al calcular potencias de $3 + 2\sqrt{2}$ se consiguen otras soluciones de $\mathcal{X}^2 - 2\mathcal{Y}^2 = 1$: por ejemplo, al tomar el cuadrado de $3 + 2\sqrt{2}$, se llega a que

$$\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^2 = 3^2 + 2\,(3)\left(2\sqrt{2}\right) + \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 17 + 12\sqrt{2}$$

lo que dice que $(x_2 = 17, y_2 = 12)$ es otra solución de $\mathcal{X}^2 - 2\mathcal{Y}^2 = 1$. Al tomar el cubo de $3 + 2\sqrt{2}$ se obtiene que $(x_3 = 99, y_3 = 70)$ es otra solución de la ecuación pues $\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^3 = 99 + 70\sqrt{2}$; al desarrollar $\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^4$ se obtiene la solución $(x_4, y_4) = (577, 408)$ y así sucesivamente...
Pasando a otro orden de ideas, denotemos con $\mathbb{Z}\left[\sqrt{d}\right]$ al conjunto $\{u+v\sqrt{d} \colon u, v \in \mathbb{Z}\}$ y consideremos la función $\mathrm{N}\colon \mathbb{Z}\left[\sqrt{d}\right] \to \mathbb{Z}$ definida por la regla $\mathrm{N}\left(u + v\sqrt{d}\right) = u^2 - dv^2$. Esta función N es completamente multiplicativa: es decir, para cualesquiera enteros u_1, u_2, v_1 y v_2 se cumple que

$$\mathrm{N}\left(\left(u_1 + v_1\sqrt{d}\right)\left(u_2 + v_2\sqrt{d}\right)\right) = \mathrm{N}\left(u_1 + v_1\sqrt{d}\right)\mathrm{N}\left(u_2 + v_2\sqrt{d}\right).$$

La verificación de esta propiedad es sencilla y la dejamos como ejercicio para el lector. En varios momentos de la demostración del teorema recurriremos a la función N para determinar si un par ordenado $(U, V) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ es solución de la ecuación de Pell $\mathcal{X}^2 - d\mathcal{Y}^2 = 1$: la clave a tener en mente aquí es que (U, V) es solución de esa ecuación si y solo si $\mathrm{N}\left(U + V\sqrt{d}\right) = 1$.

Demostración del Teorema 2. Lo primero que hay que demostrar es que si $r \in \mathbb{Z}^+$ y $(u, v) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ es el par ordenado que se determina por

$$\left(x + y\sqrt{d}\right)^r = u + v\sqrt{d},$$

entonces $u^2 - dv^2 = 1$. Aplicando la función N en ambos lados de esta igualdad se obtiene que

$$u^2 - dv^2 = \mathrm{N}\left(u + v\sqrt{d}\right) = \left(\mathrm{N}\left(x + y\sqrt{d}\right)\right)^r = \left(x^2 - dy^2\right)^r; \tag{16}$$

al ser (x, y) la solución fundamental de $\mathcal{X}^2 - d\mathcal{Y}^2 = 1$, de (16) se concluye que $u^2 - dv^2 = 1$.
Vamos a demostrar ahora que, si $(u, v) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ es una solución de la ecuación $\mathcal{X}^2 - d\mathcal{Y}^2 = 1$, entonces

$$u + v\sqrt{d} = \left(x + y\sqrt{d}\right)^r$$

para algún $r \in \mathbb{Z}^+$. Supongamos que $u+v\sqrt{d}$ no es igual a una potencia de $x+y\sqrt{d}$ (de exponente entero y positivo). Si R es el mayor número entero positivo tal que $\left(x+y\sqrt{d}\right)^R < u+v\sqrt{d}$, entonces

$$\left(x+y\sqrt{d}\right)^R < u+v\sqrt{d} < \left(x+y\sqrt{d}\right)^{R+1},$$

de lo cual se sigue que

$$1 < \frac{u+v\sqrt{d}}{\left(x+y\sqrt{d}\right)^R} < x+y\sqrt{d}. \tag{17}$$

Dado que

$$\left(x-y\sqrt{d}\right)^R = C+D\sqrt{d}$$

para algunos números enteros C y D y además

$$\begin{aligned}
\frac{u+v\sqrt{d}}{\left(x+y\sqrt{d}\right)^R} &= \frac{\left(u+v\sqrt{d}\right)}{\left(x+y\sqrt{d}\right)^R}\cdot\frac{\left(x-y\sqrt{d}\right)^R}{\left(x-y\sqrt{d}\right)^R}\\
&= \frac{\left(u+v\sqrt{d}\right)\left(C+D\sqrt{d}\right)}{\left(x^2-dy^2\right)^R}\\
&= \left(u+v\sqrt{d}\right)\left(C+D\sqrt{d}\right) \qquad (18)\\
&= \left(uC+dvD\right)+\left(uD+vC\right)\sqrt{d}, \qquad (19)
\end{aligned}$$

al hacer $\mathbf{x} = uC+dvD$ y $\mathbf{y} = uD+vC$, podemos reescribir (17) como

$$1 < \mathbf{x}+\mathbf{y}\sqrt{d} < x+y\sqrt{d}. \tag{20}$$

Afirmamos que $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ es solución de la ecuación $\mathcal{X}^2 - d\mathcal{Y}^2 = 1$ y que tanto $\mathbf{x}$ como $\mathbf{y}$ son números enteros positivos. La primera parte de esta afirmación la establecemos recurriendo a (18), (19) y a la multiplicatividad de la función N:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^2 - d\mathbf{y}^2 &= \mathrm{N}\left(\mathbf{x}+\mathbf{y}\sqrt{d}\right)\\
&= \mathrm{N}\left(\left(u+v\sqrt{d}\right)\left(C+D\sqrt{d}\right)\right)\\
&= \mathrm{N}\left(u+v\sqrt{d}\right)\mathrm{N}\left(C+D\sqrt{d}\right)\\
&= \left(u^2-dv^2\right)\left(\mathrm{N}\left(x-y\sqrt{d}\right)\right)^R\\
&= \left(u^2-dv^2\right)\left(x^2-dy^2\right)^R\\
&= 1. \qquad (21)
\end{aligned}$$

Para determinar el signo de $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$, empezamos por notar que (20) y (21) implican que

$$0 < \mathbf{x}-\mathbf{y}\sqrt{d} = \frac{1}{\mathbf{x}+\mathbf{y}\sqrt{d}} < 1. \tag{22}$$

De (20) y (22) se sigue que $\mathbf{x} > \frac{1}{2}$ y $2\mathbf{y}\sqrt{d} = (\mathbf{x}+\mathbf{y}\sqrt{d})+(-\mathbf{x}+\mathbf{y}\sqrt{d}) > 1+(-1) = 0$ y, así, $\mathbf{y} > 0$. Puesto que (x, y) es la solución fundamental de la ecuación y $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$, entonces $x + y\sqrt{d} \leq \mathbf{x} + \mathbf{y}\sqrt{d}$; combinando esto con (20) se obtiene que $\mathbf{x} + \mathbf{y}\sqrt{d} < x + y\sqrt{d} \leq \mathbf{x} + \mathbf{y}\sqrt{d}$, lo que es un absurdo. $\square$

3. Primeros ejemplos

Apelando a los teoremas 1 y 2, concluiremos las soluciones de los Problemas 1 y 2.

Solución del Problema 1. Como se vio en la introducción del artículo, el problema solicita determinar si existen números enteros positivos k y N, con $k > 1$, tales que

$$(4k + 3)^2 - 48N^2 = 1. \tag{23}$$

Esto indica que, dentro de la infinidad de soluciones $(x, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ de la ecuación de Pell $\mathcal{X}^2 - 48\mathcal{Y}^2 = 1$, hay que buscar una solución (x, y) en la que la abscisa x sea de la forma $4k + 3$ para algún número entero $k > 1$.
La solución fundamental de esa ecuación es $(x = 7, y = 1)$. Para $r \in \mathbb{Z}^+$ denotemos con (x_r, y_r) a la solución de $\mathcal{X}^2 - 48\mathcal{Y}^2 = 1$ que se obtiene de

$$\left(7 + \sqrt{48}\right)^r = x_r + y_r\sqrt{48}.$$

De esta igualdad y del teorema del binomio deducimos que

$$x_r = \sum_{\substack{0\leq j\leq r,\\ 2\,|\,j}} \binom{r}{j} 7^{r-j} \left(\sqrt{48}\right)^j. \tag{24}$$

Puesto que $7^r \equiv \begin{cases} 1 \pmod 4 & \text{si } 2 \mid r \\ 3 \pmod 4 & \text{si } 2 \nmid r \end{cases}$ y $4 \mid \left(\sqrt{48}\right)^j$ siempre que j es un número par y positivo, de (24) se desprende que x_r es de la forma $4k + 3$ para todo número impar r: podemos concluir entonces que hay una infinidad de números enteros positivos k y N, con $k > 1$, que satisfacen (23). $\square$

¡Nótese que la demostración de hecho indica cómo hallar soluciones (concretas) a (23)! Por ejemplo, cuando $r = 3$, la igualdad (24) implica que

$$x_r = \binom{3}{0} 7^{3-0} \left(\sqrt{48}\right)^0 + \binom{3}{2} 7^{3-2} \left(\sqrt{48}\right)^2 = 7^3 + (3 \cdot 7)(48) = 1351$$

y que $y_r = 3 \cdot 7^2 + 48 = 195$. Dado que $1351 = 4(337) + 3$, tenemos que $(k, N) = (337, 195)$ es una solución para (23).

Solución del Problema 2. Según lo que discutimos en la introducción del artículo, en este problema tenemos que determinar si hay un par ordenado $(T, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ tal que

$$(2T + 1)^2 - 8y^2 = 1 \tag{25}$$

y de tal manera que $100 < T < 1000$.
Consideremos la ecuación de Pell $\mathcal{X}^2 - 8\mathcal{Y}^2 = 1$: la solución fundamental de esta ecuación es $(x = 3, y = 1)$. Para $r \in \mathbb{Z}^+$ denotemos con (x_r, y_r) a la solución de $\mathcal{X}^2 - 8\mathcal{Y}^2 = 1$ que se obtiene al calcular $\left(3 + \sqrt{8}\right)^r$. Ya que $\left(3 + \sqrt{8}\right)^3 = 99 + 35\sqrt{8}$, $\left(3 + \sqrt{8}\right)^4 = 577 + 204\sqrt{8}$ y $\left(3 + \sqrt{8}\right)^5 = 3363 + 1189\sqrt{8}$, se sigue que

$$(x_3, y_3) = (99, 35), \quad (x_4, y_4) = (577, 204) \quad \text{y} \quad (x_5, y_5) = (3363, 1189). \tag{26}$$

Cada uno de estos pares ordenados da lugar a una solución $(T, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ de la ecuación (25): despejando T de $2T + 1 = x_3$ vemos que el par ordenado (x_3, y_3) da lugar a la solución $(T = 49, y = 35)$; despejando T de $2T + 1 = x_4$ se observa que el par ordenado (x_4, y_4) da lugar a la solución $(T = 288, y = 204)$ y, finalmente, despejando T de $2T + 1 = x_5$ se ve que el par ordenado (x_5, y_5) da lugar a la solución $(T = 1681, y = 1189)$. Como el total T de corredores en la maratón era un número entero del intervalo $(100, 1000)$, concluimos que en la maratón participaron 288 corredores y que el número que llevaba el corredor que analizó las sumas de los números de los otros corredores era 204. □

Las dudas que haya sobre la unicidad de la conclusión anterior se disiparán con el teorema que presentamos a continuación.

Teorema 3. *Sea d un número entero positivo que no es un cuadrado perfecto. Supongamos que (x, y) es la solución fundamental de la ecuación de Pell $\mathcal{X}^2 - d\mathcal{Y}^2 = 1$ y, para cada $r \in \mathbb{Z}^+$, denotemos con (x_r, y_r) a la solución de esa ecuación que se obtiene de*

$$\left(x + y\sqrt{d}\right)^r = x_r + y_r\sqrt{d}.$$

Se cumple que las sucesiones $\{x_r\}_{r\in\mathbb{Z}^+}$ y $\{y_r\}_{r\in\mathbb{Z}^+}$ son estrictamente crecientes: esto es, para todo $r \in \mathbb{Z}^+$, se tiene que

$$x_r < x_{r+1} \quad \text{y} \quad y_r < y_{r+1}.$$

Demostración. Demostremos primero que la sucesión $\{x_r\}_{r\in\mathbb{Z}^+}$ es estrictamente creciente. Supongamos que para algún $r \in \mathbb{Z}^+$ se observa que

$$x_{r+1} \leq x_r. \tag{27}$$

Como (x_r, y_r) y (x_{r+1}, y_{r+1}) son soluciones de $\mathcal{X}^2 - d\mathcal{Y}^2 = 1$, la desigualdad (27) implica que

$$y_{r+1}^2 = \frac{x_{r+1}^2 - 1}{d} \leq \frac{x_r^2 - 1}{d} = y_r^2. \tag{28}$$

De (27) y (28) se desprende que

$$x_{r+1} + y_{r+1}\sqrt{d} \leq x_r + y_r\sqrt{d},$$

lo cual es un absurdo pues lo que sabemos es que

$$x_r + y_r\sqrt{d} = \left(x + y\sqrt{d}\right)^r < \left(x + y\sqrt{d}\right)^{r+1} = x_{r+1} + y_{r+1}\sqrt{d}.$$

Tenemos así que la sucesión $\{x_r\}_{r\in\mathbb{Z}^+}$ es estrictamente creciente. La conclusión sobre el crecimiento de $\{y_r\}_{r\in\mathbb{Z}^+}$ se obtiene fácilmente de lo anterior. $\square$

Presentamos otros dos problemas para que el lector los intente (antes de leer las soluciones que compartimos) y ponga a prueba su entendimiento de lo que hemos estado discutiendo hasta este punto.

Problema 4. *(All-Russian Mathematical Olympiad 2015 [9th grade], prob. 3). Para cualesquiera tres números enteros u, v y d, mayores que 100, que cumplen la igualdad $u^2-1=(d^2-1)v^2$, calcúlese la fracción $\frac{v}{d}$. ¿Cuál es el menor número que se obtiene de este modo?*

Solución. Para cada número entero $d>100$ se tiene que la solución fundamental de la ecuación de Pell $\mathcal{X}^2-(d^2-1)\mathcal{Y}^2=1$ es $(x=d, y=1)$. Luego, si con (u_r, v_r) denotamos a la solución de esta ecuación que proviene de la igualdad

$$u_r+v_r\sqrt{d^2-1}=\left(d+\sqrt{d^2-1}\right)^r, \tag{29}$$

tenemos que la sucesión $v_1, v_2, v_3, \ldots$ es estrictamente creciente y, en consecuencia,

$$\frac{v_r}{d}\geq\frac{v_2}{d} \tag{30}$$

para todo número entero $r\geq 2$. Dado que $\left(d+\sqrt{d^2-1}\right)^2=(2d^2-1)+2d\sqrt{d^2-1}$, se sigue que $v_2=2d$; de esto y (30) se concluye que $v_r/d\geq 2$ para todo número entero $r\geq 2$. Concluimos así que el menor número que se obtiene mediante el proceso indicado es 2. $\square$

Problema 5. *(M. Z. Garaev) Supóngase que x, y son números enteros tales que la fracción*

$$\frac{4x^2-1}{4x^2-y^2}$$

es igual a un número entero positivo k. Demuestre que $k=1$.

Solución. Supongamos que $k>1$. De

$$4x^2-1=k(4x^2-y^2), \tag{31}$$

se sigue que

$$((2k-2)x+ky)^2-(k^2-k)(2x+y)^2=1. \tag{32}$$

Consideremos la ecuación de Pell

$$\mathcal{X}^2-(k^2-k)\mathcal{Y}^2=1.$$

La solución fundamental de esta ecuación es $(x=2k-1, y=2)$: de esto y (32) se deduce que

$$(2k-2)x+ky+(2x+y)\sqrt{k^2-k}=\left(2k-1+2\sqrt{k^2-k}\right)^r \tag{33}$$

para algún $r \in \mathbb{Z}^+$. Puesto que

$$\left(2k-1+2\sqrt{k^2-k}\right)^r = \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} (2k-1)^{r-j} \left(2\sqrt{k^2-k}\right)^j, \tag{34}$$

tenemos que

$$(2x+y)\sqrt{k^2-k} = \sum_{\substack{0\le j\le r,\\ 2\nmid j}} \binom{r}{j} (2k-1)^{r-j} \left(2\sqrt{k^2-k}\right)^j; \tag{35}$$

en vista de que el coeficiente de $\sqrt{k^2-k}$ en el lado derecho de (35) es un número par (lo cual queda claro después de hacer la respectiva reducción de términos semejantes), inferimos que y es un número par. Esto indica por un lado que $(2k-2)x+ky$ es un número par; por otra parte, de (33) se desprende que

$$(2k-2)x+ky = \sum_{\substack{0\le j\le r,\\ 2\mid j}} (2k-1)^{r-j} \left(2\sqrt{k^2-k}\right)^j,$$

lo que implica que $(2k-2)x+ky$ es un número impar. Como $(2k-2)x+ky$ no puede ser par e impar simultáneamente hemos conseguido un absurdo y la demostración termina. $\square$

4. Algunos "pro tips"

En esta sección comentaremos algunos datos y algunas tácticas adicionales que conviene conocer al trabajar con problemas que involucran ecuaciones de Pell. La sección está dividida en tres subsecciones:

- Cambios de variable.
- Relaciones de recurrencia para las soluciones de una ecuación de Pell.
- La ecuación $\mathcal{X}^2 - d\mathcal{Y}^2 = M$.

Cambios de variable

En los primeros dos problemas que se resolvieron en el artículo vimos que, en ocasiones, para llegar a las ecuaciones de Pell es necesario efectuar algunas manipulaciones algebraicas básicas (por ejemplo, la completación de algunos trinomios). En otros problemas, digamos que en las incógnitas x y y, lo que haremos a fin de dar con una ecuación de Pell es expresar a x y y en términos de otras variables u y v: resulta que, al sustituir y hacer las simplificaciones correspondientes, se puede conseguir una ecuación de Pell en u y v.

Problema 6. *Demuestre que hay una infinidad de pares ordenados* $(x,y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ *tales que* $2021x^2 + 2022x = y^2$.

Solución. Si hacemos $x = 2022v^2$ y $y = 2022uv$ y reemplazamos en la ecuación dada, obtenemos

$$2021(2022v^2)^2 + 2022(2022v^2) = (2022uv)^2,$$

lo cual *podría* simplificarse en

$$1 = u^2 - 2021v^2. \tag{36}$$

¡Se ha llegado así a una ecuación de Pell! La demostración solicitada la podemos iniciar en (36):
Como 2021 no es un cuadrado perfecto, hay una infinidad de pares ordenados $(u, v) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ que satisfacen la ecuación de Pell (36); si para cada uno de esos pares ordenados (u, v) hacemos $x = 2022v^2$ y $y = 2022uv$, tenemos que $2021x^2 + 2022x = y^2$. Puesto que distintos pares ordenados $(u, v) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ dan lugar a distintos pares ordenados $(x, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$, se obtiene lo que deseábamos demostrar. $\square$

Esta idea de expresar a las incógnitas en una ecuación en términos de otras (con la finalidad de pasar a una ecuación más familiar) se usa frecuentemente. Cuando la ecuación original es de la forma

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 1$$

para algunos números enteros a, b y c, **un cambio de variable** que conviene tener en mente es $x = \alpha u + \beta v$, $y = \gamma u + \delta v$ donde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ son números enteros tales que $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$.

Problema 7. *(R. S. Luthar; Amer. Math. Monthly, 1976, p. 566). Demuestre que hay una infinidad de números enteros n tales que $2n + 1$ y $3n + 1$ son cuadrados perfectos y n es múltiplo de 40.*

Solución. Busquemos números enteros n tales que $2n + 1 = x^2$ y $3n + 1 = y^2$ para algunos números enteros x, y. Multiplicando ambos lados de la primera igualdad por 3 y ambos lados de la segunda igualdad por 2 llegamos al sistema:

$$\begin{aligned} 3x^2 &= 6n + 3 \\ 2y^2 &= 6n + 2. \end{aligned}$$

Restando a cada miembro de la primera ecuación el respectivo miembro de la segunda obtenemos:

$$3x^2 - 2y^2 = 1. \tag{37}$$

Cada solución $(x, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ a la ecuación (37) da lugar a un número entero n que satisface lo requerido. En efecto, si $3x^2 = 2y^2 + 1$ entonces $y^2 = 3n + 1$ para algún $n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ y, en consecuencia, $3x^2 = 6n + 3$ y $x^2 = 2n + 1$.
Es relativamente fácil establecer que un n de esa índole será múltiplo de 40. De $x^2 = 2n + 1$ se sigue que $x = 2x_0 + 1$ para algún $x_0 \in \mathbb{Z}$ y entonces $2 \mid n$; de esto se desprende a su vez que $y = 2y_0 + 1$ para algún $y_0 \in \mathbb{Z}$ y, en consecuencia, $8 \mid n$. Por otra parte, al tenerse que $x^2+y^2 = 5n+2$, entonces $x^2 \equiv 1 \pmod 5$ y $y^2 \equiv 1 \pmod 5$;

de esto se obtiene que $2n+1 \equiv 1 \pmod 5$ y, consiguientemente, que $5 \mid n$. De todo esto colegimos que $40 \mid n$.
Resta mostrar que (37) tiene una infinidad de soluciones en números enteros positivos x y y. Hagamos $x = u + 2v$ y $y = u + 3v$; con este cambio de variables la ecuación (37) deviene en

$$\begin{aligned} 3(u+2v)^2 - 2(u+3v)^2 &= 1, \\ u^2 - 6v^2 &= 1. \end{aligned}$$

Como esta última ecuación es de Pell (en las variables u y v), ella admite una infinidad de soluciones $(u,v) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$; cada una de esas soluciones da lugar a una solución $(x,y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ de $3x^2 - 2y^2 = 1$. □

Relaciones de recurrencia para las soluciones de una ecuación de Pell

Ya sabemos que si $(x,y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ es la solución fundamental de la ecuación de Pell $\mathcal{X}^2 - d\mathcal{Y}^2 = 1$, entonces el resto de las soluciones de esa ecuación las podemos obtener al calcular las potencias de $x + y\sqrt{d}$. De hecho, a lo largo del artículo nos hemos apegado a esta convención: si $r \in \mathbb{Z}^+$, entonces $(x_r, y_r) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ es la solución determinada por la igualdad

$$\left(x + y\sqrt{d}\right)^r = x_r + y_r\sqrt{d}. \tag{38}$$

De esto se sigue que

$$\begin{aligned} x_{r+1} + y_{r+1}\sqrt{d} &= \left(x + y\sqrt{d}\right)^{r+1} && (39) \\ &= \left(x + y\sqrt{d}\right)^{r}\left(x + y\sqrt{d}\right)^{1} \\ &= \left(x_r + y_r\sqrt{d}\right)\left(x_1 + y_1\sqrt{d}\right) \\ &= (x_r x_1 + y_r y_1 d) + (x_r y_1 + x_1 y_r)\sqrt{d} && (40) \end{aligned}$$

De (39) y (40) y del supuesto de que d es un número entero positivo que no es un cuadrado perfecto, obtenemos las siguientes **relaciones de recurrencia** para (x_{r+1}, y_{r+1}):

$$\begin{cases} x_{r+1} = x_r x_1 + y_r y_1 d \\ y_{r+1} = x_r y_1 + x_1 y_r \end{cases}$$

Estas relaciones permiten obtener (x_2, y_2) a partir de la solución fundamental (x_1, y_1), (x_3, y_3) a partir de (x_2, y_2) y de (x_1, y_1), (x_4, y_4) a partir de (x_3, y_3) y de (x_1, y_1), y así sucesivamente. Haciendo las modificaciones pertinentes en el análisis de arriba es posible conseguir las recurrencias generales que damos enseguida: para cualesquiera $r, s \in \mathbb{Z}^+$ se cumple que

$$\begin{cases} x_{r+s} = x_r x_s + y_r y_s d \\ y_{r+s} = x_r y_s + x_s y_r \end{cases} \tag{41}$$

Ilustraremos a continuación cómo es que estas relaciones se aplican al resolver problemas.

Problema 8. *Demuestre que si* $(x, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ *es una solución de la ecuación de Pell* $\mathcal{X}^2 - 24\mathcal{Y}^2 = 1$*, entonces* $5 \mid xy$*.*

Solución. La solución fundamental de la ecuación es $(x_1 = 5, y_1 = 1)$. Por lo discutido en esta subsección tenemos que

$$\begin{cases} x_{r+1} = 5x_r + 24y_r \\ y_{r+1} = x_r + 5y_r \end{cases} \tag{42}$$

para todo $r \in \mathbb{Z}^+$. Demostraremos por inducción matemática que, para todo $r \in \mathbb{Z}^+$, se cumple que $5 \mid x_r y_r$. Claramente esto se verifica para $r = 1$. Supongamos que

$$5 \mid x_r y_r \tag{43}$$

para algún $r \in \mathbb{Z}^+$ fijo (pero arbitrario). Puesto que 5 es un número primo, de (43) se sigue que $5 \mid x_r$ o $5 \mid y_r$. Consideremos por separado ambos casos:

i) Si $5 \mid x_r$, de la segunda igualdad en (42) se desprende que $5 \mid y_{r+1}$.

ii) Si $5 \mid y_r$, de la primera igualdad en (42) se desprende que $5 \mid x_{r+1}$.

En cualquiera de estos dos casos tenemos que $5 \mid x_{r+1}y_{r+1}$, que es justamente a lo que queríamos llegar. □

Problema 9. *Demuestre que si* $(x, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ *es una solución de la ecuación de Pell* $\mathcal{X}^2 - 15\mathcal{Y}^2 = 1$*, entonces* y *no puede ser de la forma* $3^\alpha \cdot 5^\beta$ *para algunos enteros* $\alpha > 1$ *y* $\beta > 1$*.*

Solución. La solución fundamental de la ecuación es $(x_1 = 4, y_1 = 1)$. En este problema, las relaciones de recurrencia para la solución $(x_{r+1}, y_{r+1}) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ son

$$\begin{cases} x_{r+1} = 4x_r + 15y_r \\ y_{r+1} = x_r + 4y_r \end{cases} \tag{44}$$

En vista de que $(x_2 = 31, y_2 = 8)$, las recurrencias generales en (41) implican que

$$\begin{cases} x_{r+2} = 31x_r + 120y_r \\ y_{r+2} = 8x_r + 31y_r \end{cases} \tag{45}$$

para todo $r \in \mathbb{Z}^+$. De la segunda igualdad en (44) y de la segunda igualdad en (45) se obtiene que

$$y_{r+2} = 8y_{r+1} - y_r \tag{46}$$

para todo $r \in \mathbb{Z}^+$. Esta relación de recurrencia para la sucesión $\{y_r\}_{r\in\mathbb{Z}^+}$ permite obtener, de manera rápida, información aritmética sobre sus términos. Por ejemplo, con ayuda de (46) podemos fácilmente ver que los restos en la división por 3 de los términos de la sucesión son como se indica en la siguiente tabla:

r	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
$y_r \pmod 3$	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	...

No resulta difícil inferir de la periodicidad de los números en la segunda fila que el r-ésimo término de la sucesión $y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots$ es divisible por 3 si y solo si $3 \mid r$. Esto indica que si y_r es de la forma $3^\alpha \cdot 5^\beta$ (para algunos enteros $\alpha > 1$ y $\beta > 1$) entonces $3 \mid r$. Sin embargo, ninguno de los términos $y_3, y_6, y_9, y_{12}, \ldots$ resulta ser de dicha forma pues todos estos términos, aparte de ser divisibles por 3, también son divisibles por 7; este último aserto se puede corroborar al analizar la tabla de los restos en la división por 7 de los términos de la sucesión $\{y_r\}_{r\in\mathbb{Z}^+}$:

r	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\ldots$
$y_r \pmod 7$	1	1	0	6	6	0	1	1	0	6	6	0	$\ldots$

Nuevamente, por la periodicidad de los números en la segunda fila de la tabla se infiere que el r-ésimo término de la sucesión $y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots$ es divisible por 7 si y solo si $3 \mid r$. Podemos concluir así que no existe $r \in \mathbb{Z}^+$ tal que $y_r = 3^\alpha \cdot 5^\beta$ para algunos números enteros $\alpha > 1$ y $\beta > 1$. $\square$

Resolveremos enseguida el tercer problema planteado en la introducción del artículo (¡finalmente!). El problema solicita determinar todos los números enteros positivos Q y u tales que

$$3^Q = 2u^2 + 1.$$

Al igual que en el caso del problema 9, en una etapa de la solución echaremos mano del recurso de analizar los términos de una sucesión recurrente de números enteros con respecto a dos módulos distintos.

Solución del Problema 3. Primero buscaremos las soluciones (Q, u) en las que Q es par y después las soluciones en las que Q es impar.
Si suponemos que Q es par entonces $Q = 2q$ para algún número entero $q \geq 1$ y entonces tenemos que resolver $(3^q-1)(3^q+1) = 2u^2$. Después de notar que el máximo común divisor de los números en la izquierda es 2 podemos inferir que $3^q - 1 = 4r^2$ y $3^q + 1 = 2t^2$ para algunos números enteros positivos r y t o que $3^q - 1 = 2r^2$ y $3^q + 1 = 4t^2$ para algunos números enteros positivos r y t. Que la primera de las dos posibilidades no puede tener lugar se puede establecer mediante congruencias módulo 3; la segunda posibilidad nos lleva a que $3^q = (2t-1)(2t+1)$, de lo cual se obtiene que $t = 1$. De todo este análisis se desprende que la ecuación $3^Q = 2u^2 + 1$ tiene una única solución $(Q, u) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ con Q par: a saber, $(Q = 2, u = 2)$.
Buscamos ahora las soluciones para la ecuación $3^Q = 2u^2 + 1$ con Q impar. Supongamos que $Q = 2q + 1$ para algún número entero $q \geq 1$. Se debe cumplir que

$$3(3^q)^2 - 2u^2 = 1.$$

Así pues, nuestra tarea consiste en determinar las soluciones $(x, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ de la ecuación

$$3x^2 - 2y^2 = 1 \tag{47}$$

en las que x es una potencia de 3. Por lo que vimos en el problema 7, las soluciones en números enteros positivos de la ecuación (47) están en correspondencia biunívoca con las soluciones en números enteros no negativos de la ecuación de Pell $u^2 - 6v^2 = 1$.

Como la solución fundamental de $u^2 - 6v^2 = 1$ es $(u_1 = 5, v_1 = 2)$ y para cada $r \in \mathbb{Z}^+$ se cumple que

$$(u_{r+1}, v_{r+1}) = (5u_r + 12v_r, 2u_r + 5v_r)$$

y

$$(u_{r+2}, v_{r+2}) = (49u_r + 120v_r, 20u_r + 49v_r),$$

entonces podemos obtener una relación de recurrencia para las abscisas x_r de las soluciones (x_r, y_r) de $3x^2 - 2y^2 = 1$. Puesto que $x_r = u_r + 2v_r$, para cada $r \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ se tiene que

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 9 \quad \text{y} \quad x_{r+2} = 10x_{r+1} - x_r. \tag{48}$$

Ya que estamos interesados en saber qué términos de la sucesión $\{x_r\}_{r\in\mathbb{Z}^+}$ son potencias de 3, lo que hacemos ahora es estudiar los primeros términos de esta módulo 27. Es fácil ver que los números $x_0, x_1, \ldots, x_{17}$ son, respectivamente, congruentes módulo 27 a

$$1, 9, 8, 17, 0, 10, 19, 18, 26, 26, 18, 19, 10, 0, 17, 8, 9, 1.$$

En esta lista ha quedado de manifiesto la periodicidad de los residuos en la división por 27 de los términos de la sucesión $\{x_r\}_{r\in\mathbb{Z}^+}$. Además, de la información ahí recabada se infiere que $27 \mid x_r$ si y solo si $r \equiv 4 \pmod{18}$ o $r \equiv 13 \pmod{18}$; no obstante, al analizar los restos en la división por 17 de los términos de $\{x_r\}_{r\in\mathbb{Z}^+}$ caemos en la cuenta de que $27 \mid x_r$ si y solo si $17 \mid x_r$.
De todo el análisis previo se desprende que las únicas soluciones $(x, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ de la ecuación $3x^2 - 2y^2 = 1$, en las que x es una potencia de 3, son $(x = 1, y = 1)$ y $(x = 9, y = 11)$; de esto se sigue que las únicas soluciones en $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ de la ecuación $3^Q = 2u^2 + 1$ con Q impar son $(Q = 1, u = 1)$ y $(Q = 5, u = 11)$.
En conclusión: la ecuación $3^Q = 2u^2 + 1$ tiene en total tres soluciones $(Q, u) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$: $(Q = 1, u = 1)$, $(Q = 2, u = 2)$ y $(Q = 5, u = 11)$. □

La ecuación $\mathcal{X}^2 - d\mathcal{Y}^2 = M$

Sean d un número entero positivo que no es igual a un cuadrado perfecto y M un número entero distinto de 1. ¿Qué podemos decir del conjunto de soluciones, en números enteros positivos, de la ecuación $\mathcal{X}^2 - d\mathcal{Y}^2 = M$?
A diferencia de lo que ocurre con la ecuación de Pell $\mathcal{X}^2 - d\mathcal{Y}^2 = 1$, la ecuación $\mathcal{X}^2 - d\mathcal{Y}^2 = M$ no necesariamente tiene soluciones: por ejemplo, mediante congruencias módulo 3 se puede ver que si $3 \mid d$ y $M \equiv 2 \pmod 3$ entonces no existen números enteros $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$ tales que $\mathcal{X}^2 - d\mathcal{Y}^2 = M$. Por otro lado, demostraremos a continuación que cuando la ecuación $\mathcal{X}^2 - d\mathcal{Y}^2 = M$ tiene una solución $(u, v) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ entonces su conjunto de soluciones es infinito.

Teorema 4. *Sean d un número entero positivo que no es un cuadrado perfecto y M un número entero distinto de 1. Si la ecuación $\mathcal{X}^2 - d\mathcal{Y}^2 = M$ tiene una solución $(u, v) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$, entonces tiene una infinidad de soluciones en $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$.*

Demostración. Recurriremos a la función $\mathrm{N}\colon \mathbb{Z}\left[\sqrt{d}\right] \to \mathbb{Z}$ que usamos en la demostración del teorema 2; recuérdese que si U y V son números enteros entonces $\mathrm{N}\left(U+V\sqrt{d}\right) = U^2 - dV^2$. Esta función N es completamente multiplicativa y es de gran ayuda al determinar si un par ordenado $(U,V) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ es solución de la ecuación $\mathcal{X}^2 - d\mathcal{Y}^2 = M$: la observación clave aquí es que (U,V) es solución de tal ecuación si y solo si $\mathrm{N}\left(U+V\sqrt{d}\right) = M$.
Supongamos que la solución fundamental de la ecuación de Pell

$$\mathcal{X}^2 - d\mathcal{Y}^2 = 1 \tag{49}$$

es (x,y). Si $r \in \mathbb{Z}^+$, con (x_r, y_r) denotamos a la solución de (49) que se obtiene al elevar $x+y\sqrt{d}$ a la r: esto es, $\left(x+y\sqrt{d}\right)^r = x_r + y_r\sqrt{d}$. Consideremos el producto

$$\left(u+v\sqrt{d}\right)\left(x_r+y_r\sqrt{d}\right) = (ux_r + vy_r d) + (uy_r + vx_r)\sqrt{d}.$$

Si para cada $r \in \mathbb{Z}^+$ hacemos $u_r = ux_r + vy_r d$ y $v_r = uy_r + vx_r$, entonces tenemos que cada par ordenado (u_r, v_r) es una solución, en números enteros positivos, de la ecuación $\mathcal{X}^2 - d\mathcal{Y}^2 = M$: en efecto,

$$\begin{aligned} u_r^2 - dv_r^2 &= \mathrm{N}\left(u_r + v_r\sqrt{d}\right) = \mathrm{N}\left(\left(u+v\sqrt{d}\right)\left(x_r+y_r\sqrt{d}\right)\right) \\ &= \mathrm{N}\left(u+v\sqrt{d}\right)\mathrm{N}\left(x_r+y_r\sqrt{d}\right) = (u^2-dv^2)(x_r^2-dy_r^2) \\ &= M\cdot 1 = M. \end{aligned}$$

Como las sucesiones $\{x_r\}_{r\in\mathbb{Z}^+}$ y $\{y_r\}_{r\in\mathbb{Z}^+}$ son estrictamente crecientes, las soluciones (u_r, v_r) son todas diferentes entre sí y tenemos la conclusión deseada. □

A las ecuaciones de la forma $\mathcal{X}^2 - d\mathcal{Y}^2 = M$, donde M es un número entero distinto de 1, se les denomina *ecuaciones de tipo Pell* (por ejemplo, ver [1, p. 120]). El problema que exponemos a continuación apareció en la sección de problemas de entrenamiento del segundo número de 2021 de esta revista. La solución que proporcionamos abajo es un tanto más sucinta que la que se publicó en [10, pp. 29-30].

Problema 10. *Para cada número entero positivo n, denotemos con T_n al n-ésimo número triangular. Demuestre que hay una infinidad de tercias de números triangulares consecutivos cuya suma es otro número triangular. (Un ejemplo de una tercia de ese tipo es la conformada por T_1, T_2 y T_3 pues $T_1+T_2+T_3 = 1+3+6 = 10 = T_4$).*

Solución. Puesto que $T_n = 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ para todo número entero positivo n, en este problema se trata de determinar si la ecuación

$$\frac{(n-1)n}{2} + \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{m(m+1)}{2}$$

admite una infinidad de soluciones $(n,m) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$. Al multiplicar por 2 ambos lados y haciendo después la reducción de términos semejantes obtenemos la ecuación equivalente $3n^2 + 3n + 2 = m^2 + m$. Esta ecuación se puede reescribir a su vez como

$$(2m+1)^2 - 3(2n+1)^2 = 6. \tag{50}$$

Esto nos lleva a considerar la ecuación

$$\mathcal{X}^2 - 3\mathcal{Y}^2 = 6. \tag{51}$$

Es claro que $(\mathcal{X} = 3, \mathcal{Y} = 1)$ es una solución de (51); el teorema 4 garantiza entonces que esa ecuación tiene una infinidad de soluciones $(x, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$. Puesto que, en cada una de esas soluciones de (51), ni x ni y son números pares se sigue que cada solución $(x, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ de (51) en la que $y > 1$ da lugar a una solución de (50) en números enteros positivos m y n: a saber, a la solución $\left(m = \frac{x-1}{2}, n = \frac{y-1}{2}\right)$. □

5. Ejemplos varios

En esta sección expondremos tres problemas más que se pueden abordar mediante ecuaciones de Pell.

Problema 11. *(J. L. Pietenpol; Amer. Math. Monthly, 1961, p. 573). Demuestre que hay una infinidad de cuadrados perfectos en la sucesión de números triangulares*[6].

Solución. Presentaremos dos soluciones de este problema. Recordemos que el n-ésimo número triangular se denota por T_n y es igual a $\frac{n(n+1)}{2}$.

1. Si $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$ es un cuadrado perfecto, entonces

$$\begin{aligned} T_{4n(n+1)} &= \frac{[4n(n+1)][4n(n+1)+1]}{2} = 4\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)(4n^2+4n+1) \\ &= 4T_n(2n+1)^2 \end{aligned}$$

   es otro número triangular que es igual a un cuadrado perfecto. Como $T_1 = 1$ es un cuadrado perfecto, concluimos que hay una infinidad de cuadrados perfectos en la sucesión de números triangulares.

2. El problema es equivalente a determinar si la ecuación $\frac{n(n+1)}{2} = m^2$ tiene una infinidad de soluciones $(n, m) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$. Esta ecuación se puede reescribir como

$$(2n+1)^2 - 8m^2 = 1. \tag{52}$$

   La conclusión deseada se obtiene al considerar la ecuación de Pell $\mathcal{X}^2 - 8\mathcal{Y}^2 = 1$ y notar que $(x, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ es solución de esa ecuación si y solo si $(n, m) = \left(\frac{x-1}{2}, y\right)$ es solución de (52).

□

En la lista de problemas adicionales de la Sección 7 el lector encontrará otros problemas que se resuelven usando la observación de que $4n^2 + 4n + 1$ es un trinomio cuadrado perfecto; en esa lista aparecerán también algunos problemas que se pueden abordar con una ecuación de Pell conveniente o aplicando un argumento recursivo parecido al que se usó en la primera solución.

[6] Ver también [11, pp. 173-174].

La ventaja de la solución mediante la ecuación de Pell en el problema recién expuesto es que con ella podemos obtener una fórmula para el r-ésimo número entero que es tanto triangular como cuadrado perfecto. En efecto, de dicha solución se desprende que si t_r es el r-ésimo número triangular que es cuadrado perfecto entonces

$$\mathsf{t}_r = \frac{\left(\frac{x_r-1}{2}\right)\left(\frac{x_r-1}{2}+1\right)}{2} = \frac{x_r^2-1}{8}$$

donde x_r es la abscisa de la solución (x_r, y_r) de la ecuación $\mathcal{X}^2 - 8\mathcal{Y}^2 = 1$. Dado que la solución fundamental de esta ecuación de Pell es $(x = 3, y = 1)$ se sigue que $x_r = \frac{\left(3+\sqrt{8}\right)^r+\left(3-\sqrt{8}\right)^r}{2}$ y, por lo tanto,

$$\begin{aligned}\mathsf{t}_r &= \frac{\frac{\left(3+\sqrt{8}\right)^{2r}+\left(3-\sqrt{8}\right)^{2r}+2\left(3+\sqrt{8}\right)\left(3-\sqrt{8}\right)-4}{4}}{8}\\ &= \frac{\left(17+12\sqrt{2}\right)^r+\left(17-12\sqrt{2}\right)^r-2}{32}.\end{aligned}$$

Los primeros cinco términos de esta sucesión $\{\mathsf{t}_r\}_{r\in\mathbb{Z}^+}$ son 1, 36, 1225, 41616 y 1413721. Un excelente sitio para ver más términos de la sucesión o aprender más acerca de ella es [5].

En el problema que viene a continuación usaremos que, para todo $n \in \mathbb{Z}$, el número

$$n(n+1)(n+2)(n+3)+1$$

es un cuadrado perfecto; este hecho se puede establecer fácilmente al transformar esa expresión en un producto de binomios conjugados:

$$\begin{aligned}n(n+1)(n+2)(n+3) &= (n^2+3n)(n^2+3n+2)\\ &= ((n^2+3n+1)-1)((n^2+3n+1)+1)\\ &= (n^2+3n+1)^2-1.\end{aligned}$$

Problema 12. *(M. Tetiva; Math. Magazine, 2017, p. 299). Demuestre que la ecuación $n(n+1)(n+2)(n+3) = a^2+b^2$ admite una infinidad de soluciones en números enteros a, b y n.*

Solución. En vista de que $(n^2+3n+1)^2 = (n^2+3n)^2+2(n^2+3n)+1$, llegamos a que

$$n(n+1)(n+2)(n+3) = (n^2+3n)^2+2(n^2+3n).$$

Así pues, para que $n(n+1)(n+2)(n+3)$ sea una suma de dos cuadrados perfectos basta con que $n^2+3n = 2y^2$ para algún número entero y; esta última igualdad es equivalente a $(2n+3)^2-8y^2 = 9$. ¡Es en este momento que se vislumbra una conexión con las ecuaciones de tipo Pell!

Consideremos la ecuación

$$\mathcal{X}^2 - 8\mathcal{Y}^2 = 9. \tag{53}$$

Dado que $9^2-8\cdot 3^2=9$, esa ecuación tiene una solución en números enteros positivos; el teorema 4 garantiza la existencia de una infinidad de soluciones, en números enteros positivos, de (53). Si $(x,y)\in\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+$ es solución de (53), entonces haciendo $n=\frac{x-3}{2}$ obtenemos un número entero que satisface $(2n+3)^2-9=x^2-9=8y^2$ y tal que

$$n(n+1)(n+2)(n+3)=(n^2+3n)^2+2(n^2+3n)=\underbrace{(n^2+3n)^2}_{a^2}+\underbrace{(2y)^2}_{b^2}. \quad (54)$$

Como hemos mostrado que cada solución $(x,y)\in\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+$ de (53) da lugar a una terna (propia) de números enteros (n,a,b) que cumplen la igualdad $n(n+1)(n+2)(n+3)=a^2+b^2$, la aserción se ha establecido. $\square$

En el último problema de la sección se ilustra que en ocasiones, cuando es posible resolver determinada situación a través de ecuaciones de Pell, la solución que se obtiene no solamente es concisa o fecunda sino que tiene una buena estética también.

Problema 13. *(M. N. Deshpande; Amer. Math. Monthly, 1997, p. 870). Encuentre una infinidad de tercias $(a,b,c)\in\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+$ tales que a, b y c estén en progresión aritmética y de tal modo que $ab+1$, $ac+1$ y $bc+1$ sean cuadrados perfectos.*

Solución. Si $(u,v)\in\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+$ es una solución de la ecuación de Pell $\mathcal{X}^2-3\mathcal{Y}^2=1$ (distinta de la solución fundamental), entonces la terna $(a=2v-u, b=2v, c=2v+u)$ consiste de números enteros positivos que están en progresión aritmética. Se cumple además que

$$\begin{aligned} ab+1&=(2v-u)(2v)+1=(u-v)^2,\\ ac+1&=(2v-u)(2v+u)+1=v^2,\\ bc+1&=(2v)(2v+u)+1=(v+u)^2. \end{aligned}$$

Como la ecuación de Pell considerada tiene una infinidad de soluciones $(u,v)\in\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+$, concluimos que hay una infinidad de ternas $(a,b,c)\in\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+$ que satisfacen lo deseado. $\square$

6. Comentarios finales

Hemos expuesto la teoría básica de la ecuación de Pell y hemos dado varios ejemplos de la aplicación de la misma en la resolución de problemas de las olimpiadas. Un aspecto de la teoría que no tocamos en este artículo es el de la determinación (eficiente) de la solución fundamental de una ecuación de Pell dada: decidimos proceder así porque, por un lado, consideramos que es más adecuado desarrollar ese aspecto en un trabajo aparte y, por otro lado, porque en el ámbito olímpico por lo general surgen ecuaciones de Pell cuya solución fundamental se puede hallar mediante inspección (esto es algo que ha sido señalado ya por otros autores en el pasado–e.g., A. Engel en [2, p. 129]–y que el lector seguramente ha podido corroborar en estas páginas).

7. Problemas adicionales

1) Con este problema quedará claro por qué en el estudio de la ecuación $\mathcal{X}^2 - d\mathcal{Y}^2 = 1$ solamente es relevante el caso en que d es un número entero positivo que no es un cuadrado perfecto.

   a) Sean n un número entero y d un número entero negativo. Demuestre que la ecuación $\mathcal{X}^2 - d\mathcal{Y}^2 = n$ tiene una cantidad finita de soluciones $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

   b) Sean n un número entero y d un cuadrado perfecto. Demuestre que la ecuación $\mathcal{X}^2 - d\mathcal{Y}^2 = n$ tiene una cantidad finita de soluciones $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

2) Decimos que el par ordenado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ es de *coordenadas enteras* si tanto x como y son número enteros. ¿Cuántos puntos de coordenadas enteras hay en el conjunto

$$\big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 - 3y^2 - 1 = 0,\ 0 \leq x \leq 100,\ 0 \leq y \leq 100\big\}?$$

3) *(Folleto de problemas avanzados para la 22a. OMM, p. 1).* Denotemos con $S(n)$ a la suma de los primeros n números enteros positivos. Diremos que un número entero positivo n es *fantástico* si n y $S(n)$ son ambos cuadrados perfectos. Por ejemplo, el número 49 es fantástico pues $49 = 7^2$ y $S(49) = 1+2+\cdots+49 = 1225 = 35^2$ son ambos cuadrados perfectos. Encuentre un número entero $n > 49$ que sea fantástico.

4) *(H. Dudeney)* "Los hombres de Harold permanecían muy juntos, como era su costumbre, y formaban trece cuadrados con igual número de hombres en cada cuadrado, ¡y ay del normando que se atreviera a entrar en su reducto, pues un solo golpe de un hacha de guerra sajona quebraría su lanza y penetraría en su cota de malla...! Cuando Harold se lanzó en persona a la batalla, los sajones conformaron un único y poderoso cuadrado, profiriendo los gritos de batalla de *¡Ut!*, *¡Olicrosse!*, *¡Godemitè!...*"

   En pocas palabras: si las fuerzas de Harold se dividían en trece cuadrados que, al agregarse el mismo Harold, podían disponerse en un gran cuadrado único, ¿de cuántos hombres consistía el ejército de Harold?

Observación. El grabado pudiera sugerir que es inexacto atribuir el "acertijo" a Dudeney; no obstante, el mismo Loyd presentó a este problema como una creación de Dudeney.

5) Demuestre que la ecuación $5u^2+2u = v^2$ tiene una infinidad de soluciones $(u, v) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$.

6) Las tres preguntas que se listan enseguida se pueden resolver con ayuda del trinomio $4n^2 + 4n + 1$.

   a) Sea m un entero distinto de 0. Halle una solución $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ de la ecuación $\mathcal{X}^2 - (m^2 + 1)\mathcal{Y}^2 = 1$.

   b) Demuestre que la ecuación $x^2 + y^2 + 1 = z^2$ tiene una infinidad de soluciones en números enteros x, y y z.

   c) En las descomposiciones canónicas de los números enteros m y n aparecen los mismos números primos; en las descomposiciones canónicas de los números enteros $m + 1$ y $n + 1$ ocurre lo mismo (es decir, también aparecen los mismos números primos). ¿Hay una infinidad de pares ordenados $(m, n) \in (\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+) \setminus \{(\ell, \ell) \colon \ell \in \mathbb{Z}^+\}$ de ese tipo?

7) *(Examen W. L. Putnam; prob. A-2, 2000).* Demuestre que hay una infinidad de números enteros n tales que n, $n + 1$ y $n + 2$ se pueden expresar como una suma de dos cuadrados perfectos.

8) Un número entero positivo es *potencioso* si es divisible por el cuadrado de cada uno de sus divisores primos. Por ejemplo, el 72 es potencioso ya que sus factores primos son 2 y 3 y 72 es múltiplo de 2^2 y 3^2. Demuestre que hay una infinidad de números potenciosos consecutivos.

   Observación. Este es un problema muy popular (se encuentra en [12, p. 248] y también apareció en [9, p. 26]); al igual que al problema anterior se le puede resolver con una ecuación de Pell o con un argumento como el de la primera solución que dimos al problema 11 de la Sección 5.

9) *([2, p. 135]).* Sea n un entero positivo. Demuestre que si $3n + 1$ y $4n + 1$ son cuadrados perfectos, entonces $56 \mid n$.

10) *(Olimpiada Nacional de Turquía; prob. 2 [2a. ronda], 2014).* Determine todas las tercias (x, y, z), de números enteros positivos, para las cuales se verifica la igualdad $x^3 = 3^y \cdot 7^z + 8$.

    Observación. Este problema se reduce a demostrar que si $(x, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ es una solución de la ecuación de Pell $\mathcal{X}^2 - 3\mathcal{Y}^2 = 1$ y x es una potencia de 7 entonces $x = 7$. Es posible armar una demostración de esto emulando el análisis de las relaciones de recurrencia que se efectuó en los problemas 3 y 9; una demostración alternativa se puede consultar en [4, pp. 8-9].

11) *(Nieuw Archief voor Wiskunde; prob. C, marzo de 2015).* Determine todos los pares ordenados (p, q) en los que p y q son números primos impares, $q \equiv 3 \pmod 8$ y $\frac{q^{p-1}-1}{p}$ es un cuadrado perfecto.

12) *(G. Martínez)* Demuestre que hay una infinidad de tercias $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ en las que a, b y c son distintos entre sí y $ab - 1$, $ac - 1$ y $bc - 1$ son cuadrados perfectos.

13) Demuestre que hay una infinidad de cuadrados perfectos de la forma $1 + 2^{x^2} + 2^{y^2}$ con $(x, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$.

14) *(P. G. Walsh)* ¿Para qué números enteros positivos m y n se cumple que

$$(2^m - 1)(3^n - 1)$$

es un cuadrado perfecto?

8. Bibliografía

1) T. Andreescu, D. Andrica, and I. Cucurezeanu. *An introduction to Diophantine equations: a problem-based approach*. Birkhäuser Verlag, 2010.

2) A. Engel. *Problem-solving strategies*. Springer Verlag, 1997.

3) E. R. Gentile. *Aritmética elemental*. Secretaría General de la OEA, Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico, 1985, 138 pp.

4) J. Hernández. Solving problems by looking at a discriminant. *Mathematical Reflections*, (2020), No. 4, pp. 1-10.

5) OEIS Foundation Inc. (2022). The square triangular numbers, entry A001110 in *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, `http://oeis.org/A001110`.

6) B. Rittaud and A. Heeffer. The pigeonhole principle, two centuries before Dirichlet. *The Mathematical Intelligencer*, (2014), No. 2, Vol. 36, pp. 27-29.

7) C. J. Rubio y J. A. Lara. El máximo común divisor. *Tzaloa: Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas*, (2015), No. 1, pp. 1-13.

8) P. Soberón. El principio de las casillas. *Tzaloa: Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas*, (2010), No. 2, pp. 1-6.

9) *Tzaloa: Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas*, (2013), No. 2.

10) *Tzaloa: Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas*, (2022), No. 1.

11) A. Weil. *Number theory: An approach through history (from Hammurapi to Legendre)*. Birkhäuser Verlag, 1983.

12) P. Zeitz. *The art and craft of problem solving*. Third edition, John Wiley and Sons Inc., 2017.