Geometría Combinatoria y el Teorema del Ham Sandwich

Por Cuauhtémoc Gómez Navarro

Nivel Avanzado

La geometría combinatoria es un área de las matemáticas que ha tomado mucha fuerza en los últimos años, tanto en la investigación matemática, como en problemas de olimpiadas.
Muchos problemas de esta área matemática se caracterizan por tener soluciones que solo usan ideas sencillas, sin embargo, esto no significa que el problema sea fácil de resolver. Un ejemplo de esto es el problema 2 de la Olimpiada Internacional de Matemáticas (IMO) del año 2011, que tiene una solución sencilla y, sin embargo, a la mayoria de los participantes de esa competencia no se les ocurrió esa idea sencilla.
Este artículo tiene como propósito mostrar algunas de las ideas que han servido para resolver problemas de olimpiadas de matemáticas del área de la geometría combinatoria, además veremos que esas ideas nos llevan a resultados más fuertes de investigación en geometría combinatoria (también llamada geometría discreta).
Se ha tratado de dar las referencias de todos los problemas y resultados que aparecen en este artículo. Pido una disculpa por cualquier error en las referencias. Por último, se recomienda al lector intentar los problemas antes de leer la solución.

Problemas de Olimpiadas de Matemáticas

Imaginemos que estamos manejando un automóvil sobre una avenida A y que a nuestro lado izquierdo, se encuentra otra avenida B. Supongamos que después de 30 minutos de manejar sobre la avenida A (en la misma dirección), nos damos cuenta que ahora la avenida B se encuentra a nuestro lado derecho. Si pensamos a las avenidas como líneas rectas en el plano, nuestra intuición nos debería decir que en un momento intermedio

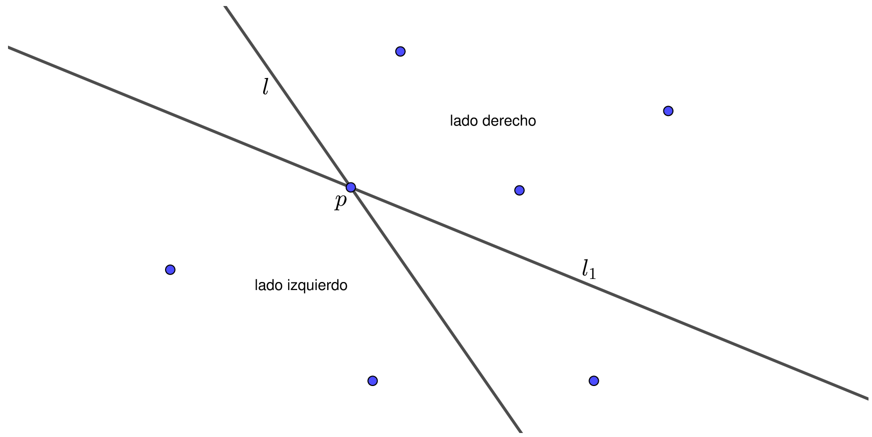

Figura 1: *En este ejemplo (del Problema 1), inicialmente el lado derecho de la recta l tiene más de la mitad de puntos. Entonces, antes de dar la media vuelta, llegaremos a la recta l_1, que deja la mitad de los puntos en cada uno de los lados que determina.*

las dos avenidas se cruzaron, es decir, en un momento estuvimos simultáneamente sobre las dos avenidas.

En esta sección veremos las soluciones de algunos problemas de olimpiadas de matemáticas. La idea intuitiva para resolverlos será la misma intuición que usamos en el ejemplo de las avenidas.

Problema 1. Sea S un conjunto finito de al menos dos puntos en el plano y con una cantidad impar de puntos. Supongamos que no hay 3 puntos en S que sean colineales. Demuestra que para cualquier punto p de S, hay una recta que pasa por p y que deja la mitad de los puntos de S en cada uno de los lados (semiplanos) definidos por esa recta.

Solución. Sea p cualquier punto de S. Nos tomamos cualquier recta l que pase por p, pero no pase por ningún otro punto de S.
Si l es una recta que deja la mitad de los puntos de S en cada uno de los lados que define la recta, es la recta que estamos buscando, si no podemos asignarle una dirección a la recta y considerar su lado derecho y su lado izquierdo. Sin pérdida de generalidad, supongamos que el lado derecho tiene más de la mitad de puntos de S. Si empezamos a rotar la recta con centro en p al dar un giro de $180°$ habremos invertido los lados, así que ahora el lado derecho va tener menos puntos de S que la mitad. Como no hay 3 puntos de S sobre la recta l (o alguna de sus rotaciones), al hacer la rotación los puntos de S van cambiando de lado uno por uno, así que antes de dar el giro de $180°$, encontraremos una recta l_1 que pase por p y deje la mitad de los puntos de S en cada uno de los lados que determina la recta (ver Figura 1). $\square$

El siguiente problema es un resultado de un tema de investigación que se ha trabajado en geometría combinatoria (el lector interesado en la historia del problema puede consultar [5]).

Problema 2. Sea n un entero mayor que 1. Sea A un conjunto de $2n$ puntos sobre una circunferencia (en el plano). Supongamos que n de los puntos están coloreados de azul y los otros n puntos están coloreados de rojo. Una trayectoria de longitud k es una sucesión $p_1, p_2, \ldots, p_k$ de puntos distintos en el conjunto A. Decimos que la trayectoria (con vértices en el conjunto A) es una *trayectoria alternante simple* si alterna puntos azules con puntos rojos y, para toda $i \neq j$ con $0 < i, j < k$, los segmentos p_ip_{i+1} y p_jp_{j+1} no se cruzan. Demuestra que hay una trayectoria alternante simple (con vértices en el conjunto A) de longitud al menos n.

Solución. Primero veamos que hay una recta l que deja la mitad de los puntos de A de un lado y la otra mitad en el otro lado. Para eso, tomemos cualquier recta l_0 que cumpla que ni l_0 ni ninguna de las rectas paralelas a l_0 pasa por dos puntos de A. Entonces, empecemos a trasladar la recta l_0 hasta llegar a una recta l que deje la mitad de los puntos de A de un lado y la otra mitad en el otro lado. Asignemos una dirección a la recta l y consideremos el lado derecho. Por el principio de las casillas, el lado derecho tiene al menos $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ puntos de alguno de los dos colores, sin pérdida de generalidad el lado derecho tiene al menos $p \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ puntos azules, los cuales numeramos de arriba hacia abajo como $a_1, \ldots, a_p$. Entonces, el lado izquierdo debe tener al menos $q \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ puntos rojos, los cuales numeramos de arriba hacia abajo como $r_1, \ldots, r_q$. Sin pérdida de generalidad, $p \geq q$. Entonces, la trayectoria $r_1, a_1, r_2, a_2, \ldots, r_q, a_q$ es una trayectoria alternante simple de longitud $2q \geq n$ (ver Figura 2). □

A continuación veremos el problema 2 de la Olimpiada Internacional de Matemáticas (IMO) del 2011, que fue propuesto por Geoff Smith.

Problema 3. Sea S un conjunto finito de al menos dos puntos en el plano. Supongamos que no hay 3 puntos en S que sean colineales. Un *remolino* es un proceso que empieza con una recta l que pasa por exactamente un punto p de S. La recta se empieza a rotar con centro en p en sentido de las manecillas del reloj, hasta que la recta se encuentre por primera vez con otro punto q de S. En ese momento, se cambia el centro de rotación al punto q y se continúa rotando la recta en sentido a las manecillas del reloj, hasta que la recta se encuentre con otro punto de S. Este proceso continúa indefinidamente. Demuestra que se puede elegir un punto p en S y una recta l que pase por p, de tal manera que el remolino que resulta usa cada punto de S como centro de rotación una infinidad de veces.

Solución. Primero tomemos cualquier recta l que cumpla que ni l ni ninguna de las rectas paralelas a l pasa por dos puntos de S. Entonces, empecemos a trasladar la recta l hasta llegar a una recta l_1 que pase por un punto p de S y que cumpla que la diferencia (positiva) de la cantidad de puntos de S entre los dos lados que define, es a lo más 1 (notemos que si S tiene una cantidad impar de puntos, entonces l_1 es una recta que deja

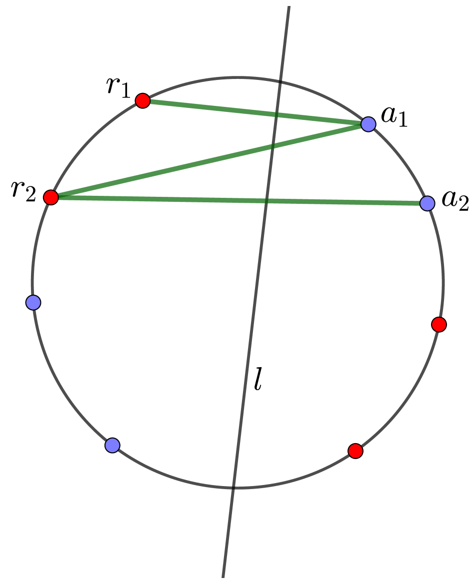

Figura 2: *Ejemplo del Problema 2 con $n = 4$ y una trayectoria alternante simple de longitud $n = 4$. Notemos que en este ejemplo, la trayectoria alternante simple que nos da la solución del Problema 2, se puede extender a una trayectoria alternante simple de longitud $2n = 8$.*

la mitad de los puntos de S en cada uno de los lados que define la recta). Proponemos que si empezamos el remolino con ese punto p y esa recta l_1, obtendremos lo que queremos.

Digamos que una recta es *justa*, si cumple que la diferencia (positiva) de la cantidad de puntos de S entre los dos lados que define, es a lo más 1.

Si empezamos a rotar la recta l_1 con centro en p, es claro que la recta seguirá siendo justa hasta que llegue a otro punto de S. Cuando lleguemos a otro punto q de S y cambiemos el centro de rotación a q, uno de los lados perderá al punto q, sin embargo, inmediatamente ganará al punto p, por lo que la recta se mantendrá siendo justa.

Como la recta se mantiene justa durante todo el remolino, entonces, cuando demos un giro de $180°$, llegaremos a otra recta l_2, paralela a l_1, que cumple que en la franja entre las rectas l_1 y l_2 no hay ningún punto (ver Figura 3).

Esto significa que en el remolino, cuando pasamos de la recta l_1 a la recta l_2, pasamos por todos los puntos de S. Entonces, si seguimos rotando la recta, cada vez que demos un giro de $180°$, pasaremos por todos los puntos de S. Por lo tanto, si empezamos el remolino con una recta justa, obtenemos el resultado. $\square$

Ahora veremos un problema que se resuelve con ideas similares a las que hemos estado viendo y que además usa la definición de *envolvente convexa*.

Decimos que un conjunto C (en el plano) es *convexo*, si para cada par de puntos x, y en C, se cumple que el segmento que tiene como extremos a x y a y, se queda contenido

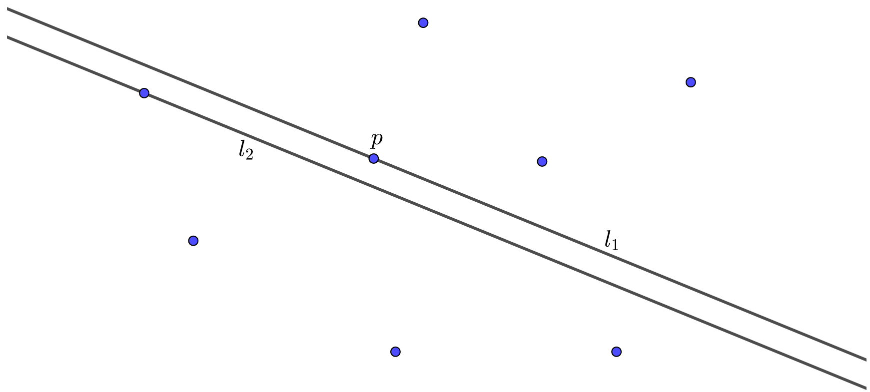

Figura 3: *En este ejemplo (del Problema 3) el conjunto tiene una cantidad par de puntos, por lo que las rectas l_1 y l_2 son distinas, pero no hay puntos en la región que está entre esas dos rectas.*

en C. Un conjunto convexo C lo podemos visualizar como un conjunto que no tiene hoyos. Por ejemplo, un círculo, un triángulo y un rectángulo, son ejemplos de conjuntos convexos.
Sea S un conjunto de puntos (en el plano). Diremos que C es la *envolvente convexa* de S, si es el conjunto convexo más pequeño que contiene en su interior o en su frontera, a todos los puntos de S, en el sentido de que cualquier otro conjunto convexo que contenga a S, contiene a C. Además, cuando un punto de S esté en el interior o sobre la frontera de la envolvente convexa C, diremos que ese punto está sobre la envolvente convexa.
La definición de envolvente convexa puede llegar a ser muy útil a la hora de resolver problemas de geometría combinatoria, ya que en muchas ocasiones, los puntos sobre las envolventes convexas tienen propiedades interesantes.
El siguiente problema se resuelve usando ideas similares a las que hemos estado viendo, además, es un ejemplo de la importancia que puede llegar a tener la envolvente convexa. Fue el problema 5 de la Olimpiada de Matemáticas de los Estados Unidos (USAMO) del 2005.

Problema 4. Sea n un entero mayor que 1. Consideremos un conjunto de $2n$ puntos en el plano donde no hay 3 colineales. Supongamos que n de los puntos están coloreados de azul y los otros n puntos están coloreados de rojo. Una recta en el plano se llama *balanceada* si pasa por exactamente un punto azul y un punto rojo, y para cada lado definido por la recta, el número de puntos azules en ese lado es igual al número de puntos rojos en ese lado. Demuestra que existen al menos dos rectas balanceadas.

Solución. Observemos que la envolvente convexa del conjunto de los $2n$ puntos, contiene al menos 3 puntos sobre ella. Por el principio de las casillas, hay al menos 2 de esos puntos que son del mismo color, sin pérdida de generalidad, supongamos que son

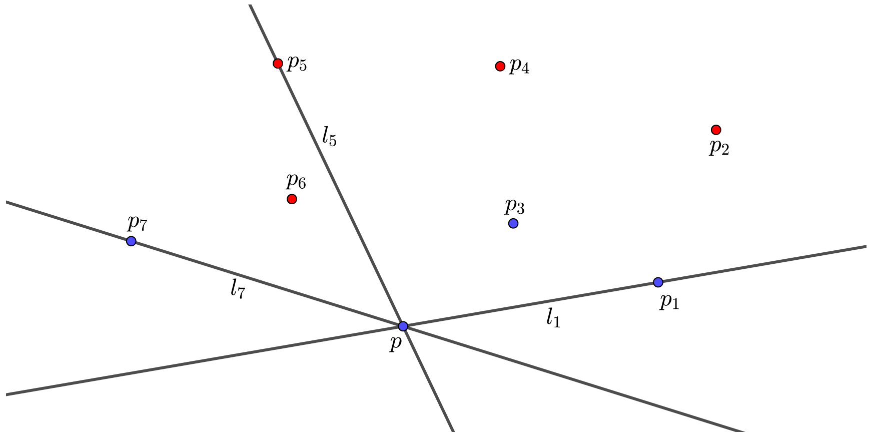

Figura 4: *En este ejemplo (del Problema 4) tenemos 4 puntos azules y 4 puntos rojos. Notemos que la recta l_3 cumple que su lado derecho tiene la misma cantidad de puntos azules que rojos, sin embargo, el punto p_3 es azul, por lo cual l_3 no es balanceada. La recta l_5 también cumple que su lado derecho tiene la misma cantidad de puntos azules que rojos, y como el punto p_5 sí es rojo, tenemos que l_5 sí es balanceada.*

de color azul. La idea será buscar una recta balanceada por cada punto azul sobre la envolvente convexa.

Consideremos uno de los puntos azules p sobre la envolvente convexa. Sean p_1 y p_{2n-1} los dos puntos que están sobre la envolvente convexa y que son adyacentes a p. Si alguno de p_1 o p_{2n-1} es de color rojo, al unirlo con el punto azul p, obtendremos una recta balanceada. Entonces, supongamos que tanto p_1 como p_{2n-1} son azules.

Sea l_1 la recta que pasa por p y p_1. Empecemos a rotar la recta l_1 con centro en p en sentido contrario a las manecillas del reloj. Numeremos a los $2n-1$ puntos que son distintos de p, de acuerdo al orden en que la recta fue pasando por esos puntos, cuando hicimos la rotación con centro en p; al i-ésimo punto lo llamamos p_i. Notemos que esta numeración es compatible con las etiquetas que ya le habíamos puesto a los puntos p_1 y p_{2n-1}. Dado el orden anterior, llamemos l_i a la recta que pasa por los puntos p y p_i (ver Figura 4).

A todas las rectas l_i les asignamos una dirección: apuntando hacia el lado contrario de p visto desde p_i. Entonces, la recta l_2 cumple que su lado derecho tiene más puntos azules que rojos; y la recta l_{2n-1} cumple que su lado derecho tiene menos puntos azules que rojos. Como no hay tres de los puntos que sean colineales, cuando hacemos la rotación con centro en p, estamos cambiando a los puntos de lado uno por uno. Por lo tanto, hay una recta l_i (con $2 \leq i \leq 2n-2$) que cumple que su lado derecho tiene la misma cantidad de puntos azules que rojos. Además, si el punto p_i es rojo, entonces, el lado izquierdo de l_i también tiene el mismo número de puntos azules y rojos, por lo cual l_i sería balanceada.

En otro caso, el punto p_i es azul. Entonces, la recta l_{i+1} cumple que su lado derecho tiene más puntos azules que rojos, y como ya sabemos que la recta l_{2n-1} cumple que

su lado derecho tiene menos puntos azules que rojos, tenemos que existe una recta l_j (con $i+1 \leq j \leq 2n-2$) que cumple que su lado derecho tiene la misma cantidad de puntos azules que rojos. Notemos que si desde el principio nos hubieramos tomado i como el máximo de los números que cumplen que el lado derecho de l_i tiene la misma cantidad de puntos azules que rojos, entonces l_j nos hubiera dado una contradicción.
El párrafo anterior nos dice que si nos tomamos i como el máximo de los números que cumplen que el lado derecho de l_i tiene la misma cantidad de puntos azules que rojos, entonces l_i será una recta balanceada.
Por lo tanto, para cada punto azul sobre la envolvente convexa hay una recta balanceada que pasa por el punto azul. Como estamos suponiendo (sin pérdida de generalidad) que hay al menos dos puntos azules, tenemos al menos dos rectas balanceadas. □

Como seguramente recordarán, en las rotaciones de las soluciones de los Problemas 1 y 3, no usamos que los centros de rotación estuvieran sobre la envolvente convexa del conjunto de puntos. Esto nos podría llevar a pensar que en la solución del Problema 4 podemos usar cualquier punto como centro de rotación, por lo cual tendríamos al menos n rectas balanceadas (una recta por cada punto azul o una recta por cada punto rojo). Sin embargo, no hay ninguna recta balanceada que pase por el punto p_6 de la Figura 4, por lo que la solución anterior puede fallar si nos tomamos como centro de rotación cualquier punto en el interior de la envolvente convexa. Afortunadamente, sí es cierto que hay al menos n rectas balanceadas, y eso es un resultado de J. Pach y R. Pinchasi. Como la demostración de ese resultado es muy larga y queda fuera del propósito de este artículo, los lectores interesados pueden consultar [7].

El teorema del Ham Sandwich

Los Problemas 1 y 3 de la sección anterior nos motiva a preguntarnos si, dados dos conjuntos finitos de puntos S_1 y S_2 (ajenos) en el plano, existe una recta l que cumpla que cada uno de los semiplanos (lados) definidos por l contiene a la mitad de los puntos de S_1 y a la mitad de los puntos de S_2.

Dado un conjunto S de puntos en el plano, decimos que una recta l *biseca* el conjunto S, si l pasa por a lo más 1 punto de S, y los dos semiplanos (lados) definidos por l continen la misma cantidad de puntos de S.

El siguiente teorema es la versión discreta en el plano de un teorema conocido como el *teorema del Ham Sandwich*.

Teorema 1. *Consideremos m puntos azules y n puntos rojos en el plano, de tal manera que no hay 3 puntos (azules o rojos) que sean colineales. Entonces, existe una recta que biseca simultáneamente los dos conjuntos de colores.*

Demostración. Para demostrar este teorema, primero supongamos que alguno de m o n es impar, sin pérdida de generalidad, m es impar.
Por el Problema 1, podemos encontrar una recta l_1 que pasa por un punto p azul y que biseca los puntos azules. Empecemos a rotar la recta l_1 en sentido de las manecillas del

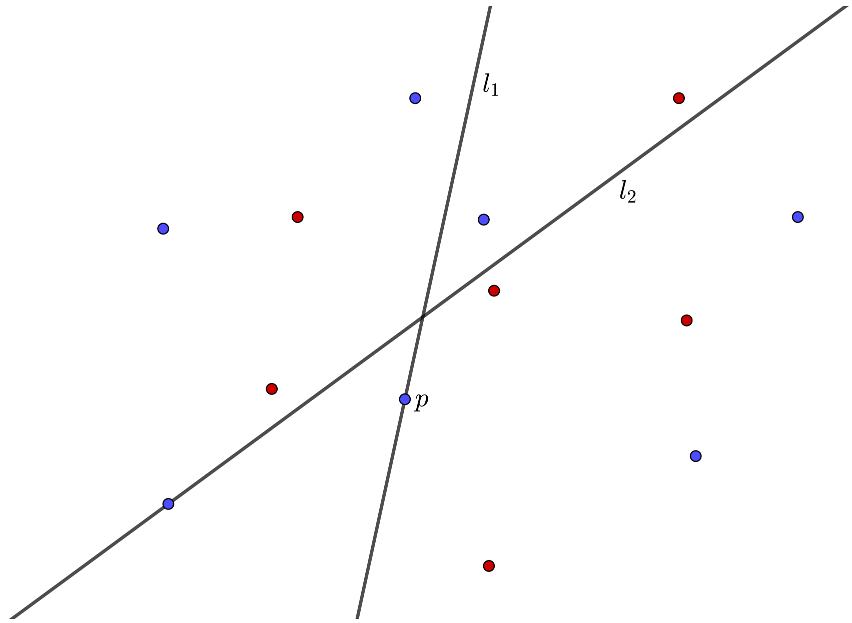

Figura 5: *En este ejemplo (del Teorema 1), la recta l_1 pasa por el punto p azul y biseca el conjunto de puntos azules, sin embargo, no biseca el conjunto de puntos rojos. Cuando hacemos las rotaciones (del Problema 3), antes de dar la media vuelta, llegaremos a la recta l_2, que biseca ambos conjuntos de colores.*

reloj con centro en p, hasta intersectar a otro punto azul q, en ese momento cambiemos el centro de rotación a q y sigamos rotando la recta. Continuemos rotando la recta de esa manera, cambiando el centro de rotación cada vez que toquemos otro punto azul. De acuerdo al Problema 3, obtenemos rectas que siempre van a bisecar el conjunto de puntos azules, y como m es impar, al dar un giro de $180°$ tenemos que regresar a la misma recta l_1 pero en sentido contrario. Por el mismo argumento de la solución del Problema 1, al hacer estas rotaciones, antes de dar un giro de $180°$ tendremos una recta l_2 que también biseque los puntos rojos, por lo tanto, esa recta biseca ambos conjuntos (ver Figura 5).
Si ambos números m, n son pares, podemos considerar un punto r (que no sea azul ni rojo), agregar el punto r al conjunto de puntos azules y aplicar las rotaciones anteriores a ese nuevo conjunto. Por el mismo argumento, llegaremos a una recta que biseque el conjunto de puntos rojos, además, si la recta pasa por el punto r también bisecará el conjunto de puntos azules. Si la recta no pasa por r significa que pasa por algún punto azul y alguno de los lados tendrá un punto azul más que el otro, pero como hay una cantidad finita de puntos, podemos trasladar un poco la recta para pasar ese punto azul al lado correspondiente, sin afectar los puntos rojos, así tendremos la recta buscada. $\square$

Ahora vamos a ver una aplicación sencilla de la versión discreta del teorema del Ham

Sandwich (Teorema 1). El siguiente teorema es un resultado de J. Akiyama y N. Alon [1]. Aunque la demostración que veremos usa la versión discreta del teorema del Ham Sandwich, el siguiente teorema también se puede demostrar sin usar el teorema del Ham Sandwich, lo que lo hace un buen ejercicio de práctica para estudiantes que participan en Olimpiadas de Matemáticas.

Teorema 2. *Sea n un entero mayor que 1. Consideremos un conjunto de $2n$ puntos en el plano donde no hay 3 colineales. Supongamos que n de los puntos están coloreados de azul y los otros n puntos están coloreados de rojo. Decimos que un segmento es* arcoíris *si uno de sus extremos es un punto azul y su otro extremo es un punto rojo. Demuestra que es posible trazar n segmentos arcoíris que no se intersecten entre sí.*

Demostración. Demostraremos por Inducción sobre n. Como no hay 3 puntos colineales, entonces podemos aplicar la versión discreta del teorema del Ham Sandwich (Teorema 1), por lo que hay una recta l que biseca simultáneamente el conjunto de puntos rojos y el conjunto de puntos azules. Entonces, en cada uno de los semiplanos (lados) definidos por l aplicamos la hipótesis de inducción, es decir, en cada semiplano (lado) trazamos segmentos arcoíris que no se intersecten entre sí (ver Figura 6).

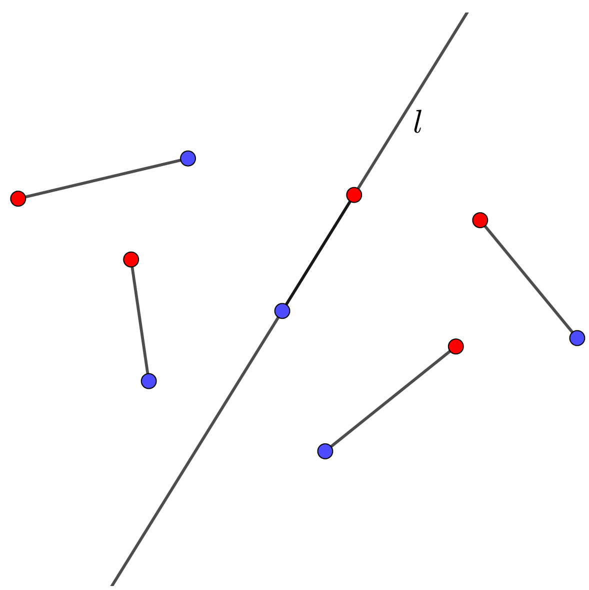

Figura 6: *Ejemplo del Teorema 2 con $n = 5$. La recta l biseca simultáneamente el conjunto de puntos azules y el conjunto de puntos rojos, por lo que podemos aplicar la hipótesis de inducción en cada uno de los lados definidos por l, con lo que obtenemos los segmentos arcoíris que queremos.*

Como l separa a esos dos semiplanos (lados), entonces obtenemos segmentos arcoíris que no se intersectan entre sí. Si n es par hemos acabado. Si n es impar, entonces en l hay un punto rojo y un punto azul, si trazamos el segmento entre esos dos puntos, ese segmento arcoíris no intersecta a los demás segmentos arcoíris que ya habíamos trazado, lo que concluye la prueba. ☐

Veamos otra aplicación del Teorema 1. El siguiente resultado es conocido como *el teorema del collar*.

Teorema 3. *Dos ladrones han robado un collar (abierto) con* 2 *tipos de perlas diferentes: perlas azules y perlas rojas. Ellos quieren partir el collar en varias partes, para después repartir esas partes de tal manera que a los dos les toque la misma cantidad de perlas de cada uno de los* 2 *tipos de perlas. Demuestra que el collar puede ser repartido entre los dos ladrones usando a lo más* 2 *cortes.*

Demostración. Vamos a colocar el collar en el plano de tal manera que cada perla es representado por un punto (el punto es del mismo color de la perla) y no hay 3 puntos en el collar que sean colineales. Entonces, por la versión discreta del teorema del Ham Sandwich (Teorema 1), existe una recta l que biseca simultáneamente los puntos azules y los puntos rojos (ver Figura 7).

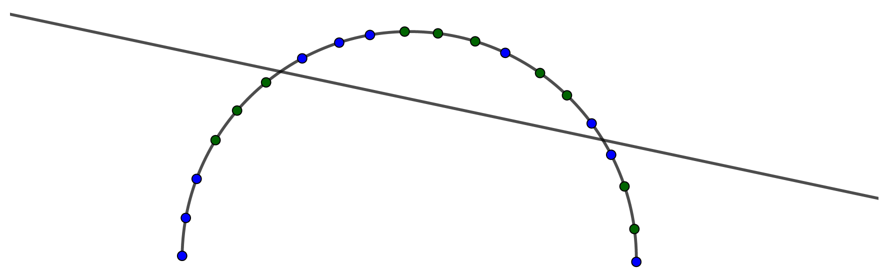

Figura 7: *Ejemplo de un collar dividido en tres partes (con 2 cortes), donde las partes 1 y 3 le tocan a un ladrón y la parte 2 le toca al otro ladrón.*

Si los ladrones hacen un corte por cada vez que esa recta interseca al collar, habrán hecho a lo más 2 cortes, ya que no hay 3 puntos en el collar que estén sobre la recta l. Por lo tanto, se puede repartir el collar con 2 cortes: todas las perlas que quedaron en uno de los lados definidos por l son para uno de los ladrones y todas las perlas que se quedaron en el otro lado definido por l son para el otro ladrón. □

Ya hemos trabajado con rectas que bisecan conjuntos finitos de puntos. Una pregunta muy natural es si también existen rectas que bisecan el área de polígonos en el plano. Antes de responder esta pregunta, precisemos a qué nos referimos cuando decimos polígonos en el plano.
Un polígono en el plano, es la envolvente convexa de un conjunto finito de puntos en el plano, que cumplen que no hay 3 de esos puntos que sean colineales. Además, diremos que una recta *biseca* el área de un polígono, si la recta parte al polígono en dos polígonos con la misma área.
Motivados por el Teorema 1, ahora nos gustaría probar que, dados dos polígonos en el plano, existe una recta que biseca simultáneamente el área de ambos polígonos. Ese

resultado es la versión en el plano del *teorema del Ham Sandwich*, que enunciamos a continuación. La demostración queda como ejercicio al lector.

Teorema 4. *Dados dos polígonos en el plano, existe una recta que biseca simultáneamente el área de ambos polígonos.*

Conclusiones y comentarios finales

Como vimos a lo largo de este artículo, muchos de los problemas de geometría combinatoria tienen la característica de tener soluciones sencillas. De hecho, a nivel investigación, estas mismas ideas sencillas son uno de los ingredientes principales para demostrar resultados fuertes de geometría combinatoria (también llamada geometría discreta).

Por ejemplo, Soberón [8], Karasev, Hubard, Aronov [6], Blagojevic y Ziegler [2], demostraron un teorema que generaliza el teorema del Ham Sandwich (Teorema 4), y la solución geométrica de ese teorema es muy similar a la idea que vimos en la demostración del Teorema 1, la diferencia es que para concluir sus resultados, usan herramientas muy fuertes de topología algebraica. Para una continuación amigable de los temas vistos en este artículo, se puede consultar [3], [4] y [9]. Además, en la siguiente sección dejamos algunos ejercicios de práctica para el lector.

Ejercicios

1) (Oriol Solé Pi, Olimpiada Regional del Centro de México 2019) Considera n líneas en el plano tal que no hay 3 que pasen por un mismo punto. Demuestra que es posible etiquetar los k puntos donde esas líneas se intersectan con los números del 1 al k (usando cada número exactamente una vez), de tal manera que en cada línea, las etiquetas de los $n-1$ puntos que están sobre esa línea están arreglados en orden creciente (en una de las dos direcciones).

2) Considera n rectas en el plano tal que no hay 3 que pasen por un mismo punto. Definamos una gráfica donde los vértices son las intersecciones de las rectas, y dos vértices están conectados por una arista (son vecinos en la gráfica) si y solo si son consecutivos en una misma recta. Demuestra que los vértices de esa gráfica se pueden colorear con 3 colores, de tal manera que no hay dos vértices vecinos del mismo color.

3) Dar una demostración alternativa del Teorema 2, que no use ninguna de las dos versiones que vimos del teorema del Ham Sandwich (Teorema 1 y Teorema 4).

4) (Víctor Dominguez Silva, Olimpiada Mexicana de Matemáticas 2019) Sea $n \geq 2$ un entero. Considera $2n$ puntos alrededor de una circunferencia. Cada vértice ha sido etiquetado con un entero del 1 al n, inclusive, y cada uno de estos enteros ha sido usado exactamente 2 veces. Isabel divide los puntos en n parejas y traza los n segmentos entre dichas parejas, con la condición de que estos no se intersecan. Luego, a cada segmento le asigna el número mayor entre las dos etiquetas en sus extremos.

a) Muestre que, sin importar cómo se hayan etiquetado los puntos, Isabel puede escoger las parejas de tal forma que se usen exactamente $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ números para etiquetar a los segmentos.

b) ¿Pueden etiquetarse los puntos de tal forma que, sin importar cómo Isabel divida los puntos en parejas, siempre se usen exactamente $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ números para etiquetar los segmentos?

5) (El teorema del Ham Sandwich) Considera dos polígonos convexos en el plano. Demuestra que siempre existe una recta que parte a la mitad el área de ambos polígonos.

6) (Olimpiada Geometrense 2020) Sea K un polígono convexo en el plano con perímetro igual a 1. Sea $n \geq 2$ un entero y sea $r < n$ un entero positivo. Demuestra que existe un par de rectas perpendiculares que dividen la frontera de K en arcos de longitudes $\frac{r}{2n}, \frac{r}{2n}, \frac{n-r}{2n}, \frac{n-r}{2n}$, en ese orden cíclico.

7) Sea $t \in [0, \frac{1}{4}]$ un número real y K un polígono convexo en el plano de área 1. Demuestra que existe una pareja de rectas perpendiculares que divide a K en 4 polígonos de áreas $t, t, (\frac{1}{2} - t), (\frac{1}{2} - t)$, en ese orden cíclico.

8) (A. Kaneko, M. Kano, K. Suzuki [5]) Considera 8 puntos en el plano donde no hay 3 colineales. Supongamos que 4 de los puntos están coloreados de azul y los otros 4 puntos están coloreados de rojo. Demuestra que hay una trayectoria alternante simple (con la misma definición del Problema 2) de longitud 8 (es decir, que pasa por los 8 puntos).

Bibliografía

1) J. Akiyama, N. Alon. *Disjoint simplices and geometric hypergraphs*, Combinatorial Mathematics; Proc. of the Third International Conference (New York, 1985), volume 555, pages 1-3. Annals of the New York Academy of Sciences, 1989. (ref: p. 53)

2) P.V.M. Blagojevic, G.M. Ziegler, *Convex equipartitions via equivariant obstruction theory*, Israel Journal of Mathematics, 200:49-77, 2014.

3) C. Gomez-Navarro, *Teoremas de equipartición: una generalización del teorema del Ham Sandwich*, Tesis UNAM, 2020.

4) C. Gomez-Navarro, *Una introducción a la geometría combinatoria: problemas de divisiones justas*, Espacio Matemático 2(1), 16-30, 2021.

5) A. Kaneko, M. Kano, K. Suzuki, *Path Coverings of Two Sets of Points in the plane*, Towards a theory of geometric graphs, 99-111, ed. by J. Pach, Contemp. Math. 342, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.

6) R. Karasev, A. Hubard, B. Aronov, *Convex equipartitions: The spicy chicken theorem*, Geometriae Dedicata, 170:263-279, 2014.

7) J. Pach, R. Pinchasi, *On the Number of Balanced Lines*, Discrete and Computational Geometry 25:611-628 (2001).

8) P. Soberón, *Balanced convex partitions of measures in* $\mathbb{R}^d$, Mathematika 58(1), 71-76, 2012.

9) A.H. Stone, J.W. Tukey, *Generalized sandwich theorems*, Duke Math. J.9 (1942).