Sucesiones

Por Eugenio Jair Escobar Sánchez

Nivel Avanzado

Se define una **sucesión** de números reales como una función $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, que a cada número natural le asigna un número real, el cual escribimos como f_n en lugar de $f(n)$, y a la sucesión en notación de conjunto se le denota como $\{f_n\}$. El uso de sucesiones permite abordar problemas que no parecieran involucrarlas explícitamente, como veremos más adelante, por lo que proporciona una herramienta extra en la resolución de problemas de olimpiada.

Tipos de sucesiones

Aritméticas

Las sucesiones aritméticas, o progresiones aritméticas, son aquellas en las que la diferencia entre dos elementos consecutivos es constante. Por lo que quedan completamente caracterizadas por un elemento inicial a_0 y una diferencia $d \in \mathbb{R}$.
Observemos que $a_1 = a_0 + d$, por lo que $a_2 = a_1 + d = a_0 + 2d$, y así sucesivamente, el n-ésimo término está dado por $a_n = a_0 + dn$.

Geométricas

Las sucesiones geométricas, o progresiones geométricas, son aquellas en las que el término inmediato siguiente se define como un múltiplo constante del anterior. Al igual que en las sucesiones aritméticas, estas sucesiones quedan determinadas por un elemento inicial a_0 y una razón $r \in \mathbb{R}$.
En este caso, $a_1 = ra_0$, por lo que $a_2 = ra_1 = r^2a_0$, y así, en general, $a_n = r^na_0$.

Periódicas

Una sucesión $\{a_n\}$ se dice periódica con periodo k, donde k es un entero positivo, si para todo número natural i se cumple que $a_{i+k} = a_i$.

Monótonas

Se les llama monótonas crecientes (monótonas decrecientes) a aquellas que cumplen que $a_n \geq a_m$ ($a_n \leq a_m$) para $n \geq m$.
Se les llama estrictamente crecientes (estrictamente decrecientes) cuando $a_n > a_m$ ($a_n < a_m$) para $n > m$.

Recursivas

En general, las sucesiones recursivas se definen en función de los elementos previos de la sucesión, por lo que establecer la relación entre el índice y el elemento de la sucesión se considera un problema por sí mismo cuando se define recursivamente.
Una sucesión se puede definir recursivamente como hemos visto en los casos de progresiones, y después de hacer manipulaciones somos capaces de encontrar una fórmula explícita para el n-ésimo término.

Ejemplos

Ejemplo 1. Demostrar que no existe una infinidad de números primos distintos en progresión aritmética.

Solución. Supongamos que $\{a_n\}$ es una sucesión aritmética de números primos, esto es, $a_n = a_0 + nd$ con a_n número primo para cada $n \geq 0$ y $d > 0$. En particular, si $n = a_0$, entonces $a_{a_0} = a_0 + a_0 d = a_0(1+d)$, lo que significa que $a_0 \mid a_{a_0}$. Como $a_0 \neq a_{a_0}$ (pues $a_0 = a_{a_0}$ implica que $d = 0$) y a_0 es primo, se sigue que a_{a_0} no es primo, lo cual es una contradicción.

Ejemplo 2. ¿Cuál es el valor máximo de $\dfrac{10^n}{n!}$?

Solución. Definimos $a_0 = \frac{10^0}{0!} = 1$ y recursivamente consideramos

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{10}{1} a_0, \\
a_2 &= \frac{10}{2} a_1, \\
&\vdots \\
a_n &= \frac{10}{n} a_{n-1}.
\end{aligned}$$

Si $n \geq 10$, tenemos que $\frac{10}{n} \leq 1$. Entonces, $a_n \leq a_{n-1}$ para todo $n \geq 10$, esto es, $a_n \leq a_9 = \frac{10^9}{9!}$ para todo $n \geq 10$.
Por otro lado, es fácil ver que $a_n = \frac{10^n}{n!} \leq \frac{10^{n+1}}{(n+1)!} = a_{n+1}$ si y solo si $n \leq 9$ y, también, $a_9 = a_{10}$. Por lo tanto, tenemos que $a_n \leq a_9$ para todo $n \geq 0$, lo que significa que el valor máximo de a_n es $a_9 = \frac{10^9}{9!}$.

Ejemplo 3. Un polinomio $p(x)$ cumple que $p(0), p(1), p(2), \ldots$ están en progresión aritmética. Muestra que el grado de $p(x)$ es a lo más 1.

Solución. Supongamos que $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ y que $p(0), p(1), p(2), \ldots$ están en progresión aritmética. Esto quiere decir que la diferencia común de la sucesión es $d = p(1) - p(0) = \sum_{i=1}^{n} a_i$. En general, para cada entero positivo k

$$\begin{aligned} p(k) &= a_n k^n + a_{n-1}k^{n-1} + \cdots + a_1 k + a_0 \\ &= a_n(k^n - k) + a_{n-1}(k^{n-1} - k) + \cdots + a_2(k^2 - k) + a_0 + dk \\ &= a_0 + dk. \end{aligned}$$

Se sigue que el polinomio

$$q(x) = a_n(x^n - x) + a_{n-1}(x^{n-1} - x) + \cdots + a_2(x^2 - x)$$

se anula para cada entero $x \geq 2$. El teorema fundamental del álgebra asegura que todo polinomio de grado positivo n tiene exactamente n raíces, por lo que concluímos que q tiene grado 0, es decir, $a_2 = a_3 = \cdots = a_n = 0$. Por lo tanto, p tiene grado a lo más 1.

Ejemplo 4. (XIII OMCC). Aplicar un desliz a un entero $n \geq 5$ es transformarlo en

$$\frac{n + p^2}{p}$$

con p primo que divide a n. Muestra que tras aplicar deslices a un entero, eventualmente se llega a 5.

Solución. Hagamos unas observaciones sobre el desliz de algunos números.

- si n es primo, un desliz resulta en $n + 1$.

- si n es compuesto, un desliz depende de la elección del p primo que lo divide, sin embargo, observemos que sin importar el valor de p, $\frac{n+p^2}{p} < n \Leftrightarrow n + p^2 < np$ $\Leftrightarrow p^2 < n(p-1)$. Sin embargo, esta última desigualdad es cierta. En efecto, como n no es primo, se tiene que $n \neq p$, de donde se sigue que $\frac{n}{p} \geq 2$. Luego,

$$n(p-1) = \frac{n}{p}p(p-1) \geq 2p(p-1) = 2p^2 - 2p \geq 2p^2 - p^2 = p^2. \quad (1)$$

> Además, como $n \geq 5$, al menos uno de los términos $\frac{n}{p}$ y p debe ser mayor que 2, lo cual implica que alguna de las desigualdades en (1) debe ser estricta.

Ahora, para $n = 5$ se cumple que un desliz lo lleva a 6, y un segundo desliz lo lleva a 5.
Supongamos entonces que $n > 5$. Por las observaciones anteriores, somos capaces de generar una sucesión estrictamente decreciente usando deslices, sólo basta mostrar que el resultado de un desliz es siempre mayor o igual a 5.
Para ello, consideremos $n \geq 6$, compuesto, si p es un divisor primo de n, menor a 5, o sea, $p = 2$ o $p = 3$, se verifica que $\frac{n}{3} + 3$ y $\frac{n}{2} + 2$ son ambos mayores o iguales a 5, mientras que en el caso en que p es un divisor primo mayor o igual a 5, el desliz es evidentemente mayor a 5, con lo que terminamos la prueba.

Ejemplo 5. (Concurso Nacional, OMM 1999). Demuestre que no existen 1999 primos en progresión aritmética todos ellos menores que 12345.

Solución. Supongamos que existen $a_0, a_1, \ldots, a_{1998}$ primos en progresión aritmética con diferencia $d = a_1 - a_0 > 0$.
Se cumple que para cada $0 \leq k \leq 1998$, $a_k = a_0 + dk$. Observemos que a_0 no puede ser menor o igual que 1998, pues si lo fuera, podríamos tomar $k = a_0$ y obtener que a_{a_0} no es primo. Por lo tanto, $a_0 > 1999$.
Ahora observemos que por ser primos, la diferencia d es divisible al menos por 2.
Veamos qué ocurre en el caso $d = 2$. Recordemos que todo primo mayor que 3 es de la forma $6k \pm 1$, por lo que

$$a_1 = 6k \pm 1 + 2.$$
$$a_2 = 6k \pm 1 + 4.$$

Sin importar el signo, alguno de ellos será divisible por 3 y, por lo tanto, no será primo.
El caso $d = 4$ nos lleva a un análisis análogo.
Hemos mostrado que $d \geq 6$, por lo que $a_{1998} = a_0 + d(1998) \geq 1999 + 6(1998) > 12345$. Que es lo que queríamos probar.

Ejemplo 6. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales tal que $a_1 = 1$ y, para $n \geq 1$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$. Demuestra que $a_{100} > 14$.

Solución. Elevando al cuadrado la relación, obtenemos que:

$$\begin{aligned} a_{100}^2 &= a_{99}^2 + 2 + \frac{1}{a_{99}^2} \\ &= a_{98}^2 + 2(2) + \frac{1}{a_{99}^2} + \frac{1}{a_{98}^2} \\ &\vdots \\ &= a_1^2 + 2(99) + \frac{1}{a_1^2} + \sum_{n=2}^{99} \frac{1}{a_n^2} \\ &> 1 + 2(99) + 1. \end{aligned}$$

Sacando raíz cuadrada obtenemos $a_{100} > 10\sqrt{2} > 14$.

Ejemplo 7. Sea $x = 0.a_1a_2a_3a_4\ldots$, donde $a_n = 0$ si n es primo y $a_n = 1$ si n es compuesto. Muestra que x es un número irracional.

Solución. Supongamos por contradicción que x es racional.
Lema: Un número es racional si y solo si tiene expansión decimal eventualmente periódica o finita.
Demostracion del lema: $(\Longrightarrow)$: Sea $x = \frac{p}{q}$, recordemos que por el algoritmo de la división, es posible escribir

$$\frac{p}{q} = k + \frac{r}{q} \text{ con } r < q.$$

Definimos las funciones parte entera de x, denotada por $\lfloor x \rfloor$, como el mayor entero menor o igual a x y, parte fraccionaria de x, como $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Con estas funciones vamos a construir una sucesión $\{r_n\}$ como

$$r_0 = r, \quad r_n = q\left\{\frac{10r_{n-1}}{q}\right\}.$$

Que es equivalente a obtener el residuo de $10^{n+1}x$ al dividirlo por q.
Para construir la expansión decimal de x hace falta notar que el n-ésimo dígito es

$$x_n = \left\lfloor 10\frac{r_n}{q} \right\rfloor.$$

Es decir,

$$x = k.x_0x_1x_2x_3\cdots$$

El algoritmo de la división nos asegura que cada $r_n < q$, por lo que utilizando el principio de las casillas, aseguramos que siempre se repite un residuo.
Sean r_i, r_j la primera vez que se repite un residuo.
La unicidad del algoritmo implica que $x_i = x_j$. Más aún, $x_k = x_{k+j-i} \quad \forall i \in \mathbb{N}$. Lo cual muestra su periodicidad o su expansión decimal finita en el caso en que $x_i = x_j =$

0.
$(\Longleftarrow)$: Comencemos con un caso sencillo. Supongamos que $x = 0.\overline{x_0 x_1 \cdots x_i}$. Observemos que

$$10^{i+1} x = x_0 x_1 \cdots x_i + x.$$

Por lo tanto, $x = \frac{x_0 x_1 \cdots x_i}{10^{i+1}-1}$, es decir, x es racional.
Si x tuviera la forma $x = k.x_0 x_1 \cdots x_i \overline{x_{i+1} x_{i+2} \cdots x_j}$ utilizando el caso anterior se muestra que es racional. $\square$
La sucesión evidentemente no es finita, pues hay una infinidad de números primos. Además, no puede ser periódica, pues si lo fuera, habría una infinidad de números primos en sucesión aritmética, lo cual es falso según lo demostrado en el Ejemplo 1. En tal caso, se sigue inmediatamente del lema, que x es irracional.

Ejemplo 8. Consideremos la secuencia de los números naturales y agrupemos los términos de la siguiente manera:

$$(1),(2,3),(4,5,6),(7,8,9,10),(11,12,13,14,15),\ldots$$

¿Cuánto vale la suma de los números del n-ésimo grupo?

Solución. Observemos que el n-ésimo grupo se compone de n enteros consecutivos, por lo que encontraremos el valor inicial de cada grupo.
Definimos $a_1 = 1$ y notemos que el valor inicial del $(n+1)$-ésimo grupo se puede calcular como el valor inicial del n-ésimo grupo más la cantidad de elementos de ese grupo, es decir, $a_{n+1} = a_n + n$. Se puede demostrar por inducción que

$$a_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n} k = 1 + \frac{n(n+1)}{2}.$$

Por lo tanto, el valor correspondiente a la suma de los elementos del n-ésimo grupo, es igual a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=a_n}^{a_{n+1}-1} k &= \left(1 + \frac{n(n-1)}{2}\right) + \left(1 + \frac{n(n-1)}{2} + 1\right) + \cdots + \left(1 + \frac{n(n+1)}{2} - 1\right) \\
&= \left(1 + \frac{n(n-1)}{2}\right) + \left(1 + \frac{n(n-1)}{2} + 1\right) + \cdots + \left(1 + \frac{n(n-1)}{2} + n - 1\right) \\
&= n\left(1 + \frac{n(n-1)}{2}\right) + \sum_{k=1}^{n-1} k = n\left(1 + \frac{n(n-1)}{2}\right) + \frac{(n-1)n}{2} \\
&= \frac{n\left(n^2+1\right)}{2}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 9. (Lista corta, IMO 1981). Una sucesión $\{a_n\}$ se define recursivamente como $a_1 = 1$ y

$$a_{n+1} = \frac{1 + 4a_n + \sqrt{1 + 24a_n}}{16} \quad \text{para} \quad n \geq 1.$$

Hallar una fórmula explícita para a_n.

Solución. Definamos una sucesión auxiliar de números reales positivos, b_n, tales que $b_n^2 = 1 + 24a_n$ para cada $n \geq 1$. Observemos que

$$\begin{aligned}
\frac{2}{3}b_{n+1}^2 &= \frac{2}{3}\left(1 + 24a_{n+1}\right) \\
&= \frac{2}{3}\left(1 + \frac{24}{16}\left(1 + 4a_n + \sqrt{b_n^2}\right)\right) \\
&= \frac{2}{3}\left(1 + \frac{3}{2} + 6a_n + \frac{3}{2}b_n\right) \\
&= \frac{3}{2} + \frac{b_n^2}{6} + b_n \\
&= \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2} + \frac{b_n}{2}\right)^2.
\end{aligned}$$

De donde obtenemos que $b_1 = 5$ y $b_{n+1} = \frac{3+b_n}{2}$ para $n \geq 1$. Consideremos otra sucesión auxiliar definida por $c_n = 2^{n-1}b_n$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
c_{n+1} &= 2^n b_{n+1} \\
&= 2^{n-1}(3 + b_n) \\
&= c_n + 3 \cdot 2^{n-1} \\
&= c_{n-1} + 3(2^{n-1} + 2^{n-2}) \\
&\ \vdots \\
&= c_1 + 3(2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2^0) \\
&= 5 + 3(2^n - 1) \\
&= 2 + 3 \cdot 2^n.
\end{aligned}$$

Luego, $b_n = 2^{1-n}c_n = 2^{1-n}(2 + 3 \cdot 2^{n-1}) = 3 + 2^{2-n}$.
Por lo tanto,

$$a_n = \frac{b_n^2 - 1}{24} = \frac{1}{24}(8 + 6 \cdot 2^{2-n} + 2^{4-2n}).$$

Ejemplo 10. (China, 2005). Una sucesión de números reales $a_0, a_1, a_2, \ldots$ satisface que $a_0 = 1$ y

$$a_{n+1} = \frac{7a_n + \sqrt{45a_n^2 - 36}}{2}$$

para cada entero positivo n.

a) Demuestra que a_n es un entero positivo para cada entero positivo n.

b) Demuestra que $a_n a_{n+1} - 1$ es el cuadrado de un entero para cada entero positivo n.

Solución. a) Tenemos que $a_1 = \frac{7a_0+\sqrt{45a_0^2-36}}{2} = \frac{7+\sqrt{45-36}}{2} = \frac{7+\sqrt{9}}{2} = 5$ y $\{a_n\}$ es una sucesión escrictamente creciente tal que

$$2a_{n+1} - 7a_n = \sqrt{45a_n^2 - 36}.$$

Elevando al cuadrado ambos lados, obtenemos que

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 - 7a_n a_{n+1} + a_n^2 + 9 = 0, \\ a_n^2 - 7a_{n-1}a_n + a_{n-1}^2 + 9 = 0. \end{aligned}$$

Restando estas dos relaciones, obtenemos que $(a_{n+1}-a_{n-1})(a_{n+1}+a_{n-1}-7a_n) = 0$. Como la sucesión a_n es estrictamente creciente, necesariamente $a_{n+1}+a_{n-1}-7a_n = 0$, esto es, $a_{n+1} = 7a_n - a_{n-1}$. Usando que $a_0 = 1$ y $a_1 = 5$, un argumento inductivo muestra que a_n es un entero positivo para cada entero positivo n.
b) La relación $a_{n+1}^2 - 7a_n a_{n+1} + a_n^2 + 9 = 0$ obtenida en a), la podemos reescribir en la forma $(a_{n+1} + a_n)^2 = 9(a_n a_{n+1} - 1)$, esto es,

$$a_{n+1}a_n - 1 = \left(\frac{a_{n+1} + a_n}{3}\right)^2.$$

Como a_n y a_{n+1} son enteros positivos según lo demostrado en a), el número $a_{n+1}+a_n$ también es un entero positivo, cuyo cuadrado, igual a $9(a_n a_{n+1} - 1)$ también es un número entero. Luego, $a_{n+1}+a_n$ es un entero múltiplo de 3 y, por lo tanto, $a_{n+1}a_n - 1$ es el cuadrado del entero $\frac{a_{n+1}+a_n}{3}$.

Ejemplo 11. (Lista corta, IMO 1985). Mostrar que la sucesión $\{a_n\}$ definida como $a_n = \lfloor n\sqrt{2}\rfloor$, para $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, contiene una infinidad de potencias distintas de 2.

Solución. De manera similar a como demostramos que la expansión decimal de un número irracional no es periódica, podemos demostrar que en base 2, la expansión tampoco es periódica. Así que consideremos $\sqrt{2}$ en base 2.

$$\sqrt{2} = 1.b_0b_1b_2b_3\ldots \quad \text{con} \quad b_k \in \{0, 1\}.$$

En tal caso, como $\sqrt{2}$ es irracional, sabemos que la sucesión asociada tiene una infinidad de 1's. Para cada $b_k = 1$ en la representación, consideremos

$$2^{k-1}\sqrt{2} - 1 < a_{2^{k-1}} = m < 2^{k-1}\sqrt{2} - \frac{1}{2}.$$

En efecto, la desigualdad de la izquierda es clara utilizando una propiedad de la función piso: $\lfloor m\rfloor > m-1$. La desigualdad de la derecha se obtiene de ver a $2^{k-1}\sqrt{2}$ en binario y restarle 0.1 en base 2 (lo cual no cambia el valor de su piso por la suposición $b_k = 1$). Multiplicando por $\sqrt{2}$ y sumando $\sqrt{2}$ obtenemos que

$$2^k < (m+1)\sqrt{2} < 2^k + \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Es decir, $a_{m+1} = \lfloor (m+1)\sqrt{2} \rfloor$ es una potencia de 2. Cada una de estas potencias es distinta porque la sucesión $\{a_n\}$ es creciente y, por lo tanto, cada término es mayor que el anterior.

Ejemplo 12. (IMO, 2014). Sea $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ una sucesión infinita de enteros positivos. Probar que existe un único entero $n \geq 1$ tal que

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

Solución. Definimos una nueva sucesión $\{d_n\}$ para cada $n \geq 0$, como sigue:

$$d_n = (a_0 + a_1 + \cdots + a_n) - na_n.$$

Observemos que la primera desigualdad es equivalente a que $d_n > 0$, mientras que la segunda desigualdad es equivalente a

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= (a_0 + a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1}) - (n+1)a_{n+1} \\ &= (a_0 + a_1 + \cdots + a_n) - na_{n+1} \leq 0. \end{aligned}$$

Así, el problema se traduce a encontrar un único $n \geq 1$ tal que $d_{n+1} \leq 0 < d_n$.
Ahora, observemos que $d_0 = d_1 > 0$ y que

$$\begin{aligned} d_{n+1} - d_n =& (a_0 + \cdots + a_n + a_{n+1}) - (n+1)a_{n+1} - ((a_0 + \cdots + a_n) - na_n) \\ =& n(a_n - a_{n+1}) < 0. \end{aligned}$$

Es decir, $\{d_n\}_{n \geq 1}$ es una sucesión de enteros estrictamente decreciente que inicia en un número positivo, por lo que el valor de n buscado, será el primero en que d_{n+1} sea negativo o cero.

Ejercicios

1) Encuentra todas las posibles sucesiones que son a la vez aritméticas y geométricas.

2) ¿Es posible encontrar una sucesión aritmética infinita en la cual todos los números son cuadrados perfectos distintos?

3) Muestra que si $\{a_n\}$ es periódica de periodo p y $\{b_n\}$ es periódica de periodo q, entonces la sucesión $\{a_n + b_n\}$ es periódica. ¿De qué periodo?

4) Sea $a_1, a_2, \ldots$ una sucesión de números reales positivos tal que $a_1 = 1$ y $a_{n+1}^2 + a_{n+1} = a_n$ para todo $n \geq 1$. Muestra que $a_n \geq \frac{1}{n}$.

5) Una sucesión x_n está definida como $x_0 = 2$ y

$$x_{n+1} = \frac{2 + x_n}{1 - 2x_n}, \quad \text{para} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Muestra que $x_n \neq \frac{1}{2}$ para todo $n \geq 1$.

6) (IMO, 2005). Sea $a_1, a_2, \ldots$ una sucesión de enteros con infinitos términos positivos e infinitos términos negativos. Supón que para cada entero positivo n, los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tienen n diferentes residuos módulo n. Muestra que cada entero aparece exactamente una vez en la sucesión.

7) (Lista corta, IMO 2006). Una sucesión de números reales $a_0, a_1, a_2, \ldots$ es definida recursivamente como $a_0 = -1$ y

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{k+1} = 0 \quad \text{para} \quad n \geq 1.$$

Muestra que $a_n > 0$ para cada $n > 0$.

8) (Lista corta, IMO 2001). Sea $a_0, a_1, a_2, \ldots$ una sucesión de números positivos. Demuestra que la desigualdad $1 + a_n > a_{n-1}\sqrt[n]{2}$ es válida para una infinidad de valores de n.

9) (Vietnám, 1975). Encuentra todos los términos de la sucesión aritmética -1, 18, $37, \ldots$ que tienen 5 en todos sus dígitos.

10) (Lista corta, IMO 2006). Una sucesión de números reales $a_0, a_1, \ldots$ es tal que a_0 es un número real arbitrario y $a_{i+1} = \lfloor a_i \rfloor \{a_i\}$ para $i \geq 0$, donde $\lfloor x \rfloor$ denota al mayor entero menor o igual a x, mientras que $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ es la parte fraccionaria de x. Demuestra que $a_i = a_{i+2}$ para i suficientemente grande.

Bibliografía

1) Olimpiada Matemática Mexicana, Baja California. Material de entrenamiento. Series, Sucesiones y recursiones. 2016.

2) Compilado por Kin Y. Li. Math Problem Book I. Hong Kong Mathematical Society. 2001.

3) López, J . Solved Problems on Sequences in the Training of High School Students fot International Mathematical Olympiads. Departamento de Matemática, Universidade Federal de São Carlos. São Paulo. 2019.

4) D. Djukic, V. Jankovic, I. Matic, Nikola Petrovic. The IMO Compendium, A Collection of Problems Suggested for the International Mathematical Olympiads: 1959 – 2004. Springer, 2006

5) Le Hai Chau, Le Hai Khoi. Selected Problems of the Vietnamese Mathematical Olympiad (1962–2009). World Scientific Publishing, 2010.

6) Lista corta de problemas IMO 1985. `https://prase.cz/kalva/short/sh85.html`
Acceso 03/06/21.

7) Lista corta de problemas IMO 2005. `https://www.imomath.com/imocomp/sl05_0707.pdf`
Acceso 03/06/21.

8) Lista corta de problemas IMO 2006.
`http://www.imo-official.org/problems/IMO2006SL.pdf`
Acceso 03/06/21.