¿Cómo leer problemas de olimpiada de matemáticas?

Por Héctor Raymundo Flores Cantú

Nivel Básico

Estás presentando un examen importante de la olimpiada mexicana de matemáticas. Son 3 problemas difíciles que debes resolver en 4 horas y media. Este es el primer día de examen y te sientes satisfecho por tu desempeño. Resolviste el problema 1 sin dificultades, el problema 2 te costó algo de trabajo pero estás convencido de que está completo y en el problema 3 generaste algunas ideas. Aunque no llegaste a la solución, crees que podrías obtener algunos puntos.

Cuando termina el examen vas con los demás y están hablando sobre uno de los problemas. Escuchas lo que dicen y tratas de entender las ideas pero algo no te hace sentido. Preguntas y uno de ellos te comenta su solución. Ese sentimiento de satisfacción que tenías al salir del examen se va convirtiendo lentamente en lo que podríamos llamar un mini ataque de pánico... “leíste mal” el problema 2.

A mi me pasó como participante en algún examen y cada año que voy con una delegación muchas veces hay al menos una persona del equipo que lee mal alguno de los problemas. Primero pensé que solo me pasaba a mi, pero luego me di cuenta que realmente es algo muy frecuente. Le pasa a cualquiera.

Los problemas de olimpiada plantean situaciones a veces muy complejas en pocas frases. Tienen una estructura gramatical compleja y tienen mucha información. En este artículo quiero comentarte algunas recomendaciones sobre cómo leer problemas de olimpiada de matemáticas y, en general, cómo leer textos complejos. De paso, vamos a practicar un poco de lenguaje matemático y teoría de conjuntos. Estos dos últimos temas resultarán muy importantes para facilitarle a tu cerebro el trabajo de entender problemas complejos. Pero iniciemos con algunas recomendaciones simples que he observado que muchos participantes no siguen.

Sugerencia # 1:
Lee una sola frase y detente a pensar
antes de continuar con la lectura.

Nuestra memoria a corto plazo solo tiene capacidad de procesar un máximo de 3 o 4 "bloques" de información nueva (ver [4]). Esto significa que necesitas darle tiempo a tu cerebro de asimilar los conceptos que se presentan en cada frase. Aún si la frase es sencilla, te recomiendo que dediques un poco de tiempo a reflexionar en ella antes de seguir leyendo. Veamos como ejemplo la primera frase de un problema de la olimpiada nacional de matemáticas. En caso de que no lo tengas claro. Una frase empieza con una mayúscula y termina con un punto.

Frase # 1.1:
Sea $n \geq 2$ un número entero.

Esta puede parecer una frase sencilla, pero tiene suficiente información para que empecemos a pensar. Hay muchos problemas que inician con algo similar, n un entero o entero positivo. Una sugerencia particular para problemas que incluyen algo así es inmediatamente tener en mente un valor especial de esa n. Por ejemplo, $n = 2$, $n = 4$ o algún otro valor pequeño. Esto va a ser particularmente importante si se trata de un problema que incluya más propiedades complejas. A mí me sorprende la cantidad de participantes que intentan resolver los problemas complicados sin tener en mente que se debe primero reflexionar sobre los casos particulares ($n = 1$, $n = 2$, etc.). Problemas que inician de esta forma son tantos que quisiera resaltar esto como sugerencia, aunque no es estrictamente una sugerencia sobre lectura del problema.

Sugerencia # 2:
En problemas que hablen de n entero (positivo), no intentes resolver el problema
para n sin analizar antes los casos particulares.

Bueno, esta frase inicial no tiene mucha más información así que podemos continuar con la lectura del problema. La segunda frase de este problema será significativamente más compleja que la primera. Dice lo siguiente.

Frase # 1.2:
Para cualquier sucesión $a_1, a_2, \ldots, a_k$ de enteros positivos tales que
$a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n$, considera las sumas $S_i = 1 + 2 + \cdots + a_i$, para $1 \leq i \leq k$.

Podemos estar de acuerdo que esta segunda frase es más difícil de asimilar. La mayoría de los participantes que presentaron el examen el año en que se aplicó este problema tuvieron considerables dificultades para siquiera entender lo que ahí se decía. Esto fue

posiblemente porque no estaban acostumbrados a pensar en elementos matemáticos más complejos que números o figuras geométricas.
Comentaba que cada problema presenta una situación. Puedes pensar que cada problema cuenta una historia donde los personajes serán objetos matemáticos. Esta segunda frase nos presenta un tipo específico de estos objetos: sucesiones de números. Aunque existe una definición formal de lo que es una sucesión, si eres principiante basta que consideres que una sucesión es simplemente una lista ordenada de números. A cada número a veces se le llama "término" de la sucesión.
En este caso se trata de sucesiones finitas (tienen fin). Por el subíndice de a_k, deducimos que son listas con k términos. Aunque no está explícitamente dicho en el problema, se entiende que k es un entero positivo también. El número k es la cantidad de términos de la sucesión.
Como lo comentaba, es importante que te des tiempo para asimilar el tipo de objetos matemáticos de los que el problema trata. Estos son como los personajes de la historia y requiere que te detengas un poco para pensar en ellos. Aprovechemos para definir dos elementos fundamentales del lenguaje matemático que te serán muy útiles en muchos otros problemas.

Definición (intuitiva) 1: Una *propiedad* es una afirmación matemática que trata sobre algún objeto matemático y que puede ser falsa o verdadera. Si es falsa, decimos que el elemento no cumple la propiedad. Si es verdadera, decimos que el elemento sí cumple la propiedad.

En libros de lógica o de demostraciones, verás que llaman afirmación (matemática) a lo que yo estoy definiendo aquí como "propiedad". Puedes pensar en afirmaciones, pero me parece más natural llamarlas propiedades porque es como generalmente suelen usarse en la práctica de la matemática.
Ejemplos:

- Cuando dices: "p es un número primo", el objeto matemático es p y la propiedad es "ser primo".

- Cuando dices: "El triángulo ABC es isósceles", el objeto matemático es el triángulo ABC y la propiedad es "ser isósceles".

- En nuestro problema, el objeto matemático es la sucesión $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ y la propiedad que debe cumplir es que $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n$.

Observa que en este caso, la propiedad depende de n, que era un número entero. Ya había comentado que esto significaba que en realidad no es un solo problema, sino infinitos problemas (uno para cada n). Para que te quede más claro lo que dice ahí, imagina que $n = 6$. ¿Qué sucesiones deberíamos considerar en ese caso? Pues las sucesiones (listas) de números que sumados me dan 6. Hay muchas de ellas: Una puede ser: $(1, 2, 3)$, otra $(1, 2, 2, 1)$, otra $(3, 3)$ etc. Aquí aprovecharé para darte otra definición intuitiva importante que nos ayuda a asimilar mejor las cosas en casi todos los problemas de matemáticas.

Definición (intuitiva) 2: Un *conjunto* es la abstracción que nos sirve para ponernos de acuerdo sobre los elementos matemáticos que se van a considerar en una discusión.

Los conjuntos sirven para que nos pongamos de acuerdo. Digamos que quiero que pienses en ciertos objetos matemáticos. Frecuentemente lo que haré será describir una cierta propiedad y luego pediré que imagines todos los objetos que la cumplen. Aunque ciertamente es posible definir conjuntos de forma arbitraria. De cualquier forma las propiedades/afirmaciones y los conjuntos siempre están relacionados.
Dada una propiedad, puedes imaginar el conjunto de elementos matemáticos que la cumplen y, dado un conjunto, puedes pensar en la propiedad de ser elementos del mismo. Digamos que conjuntos y afirmaciones son dos formas diferentes de representar e imaginar la misma información. Es recomendable experimentar con ambas, especialmente si estás trabajando con problemas complejos.
Ejemplos:

- Imagina dos puntos fijos A y B en el plano. Los objetos analizados son los puntos P del plano. Piensa en la propiedad de estar a la misma distancia de A que de B, ($AP = BP$). Hay puntos en el plano que cumplen y puntos que no cumplen esa propiedad. El conjunto de puntos que cumplen esa propiedad definen lo que se conoce como la *mediatriz* del segmento AB.

- Imagina un entero positivo n. Los objetos serán los números enteros positivos menores o iguales a n. Ahora piensa en la propiedad de ser divisor de n. Hay números que son divisores de n y números que no lo son. Los números que son divisores de n forman un conjunto.

- En nuestro problema también debemos basarnos en un entero n. Los objetos son sucesiones (listas de números). La propiedad es que $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n$. Hay listas que cumplen esta propiedad y listas que no cumplen la propiedad. El conjunto de listas que cumplen, es el que debemos tener en mente.

A los conjuntos se les suele poner como nombre letras mayúsculas (A, B, C, etc.). Esto es un acuerdo común en textos matemáticos. Mientras que a los objetos que forman parte de esos conjuntos se les nombra con letras minúsculas (x, y, z). Conocer sobre el lenguaje de conjuntos puede ayudarte a simplificar tu forma de escribir problemas de olimpiada y hacer que los revisores te entiendan mejor. Pero más importante aún, asimilar este lenguaje hará que tu cerebro esté más preparado para pensar como matemático. Algo que te resultará fundamental cuando trates de enfrentarte a problemas más complejos.
Si le ponemos como nombre C a un conjunto y a un objeto matemático le nombramos con la letra x, la forma compacta de decir que el objeto está considerado en el conjunto es escribir: $x \in C$. Se suele leer que "x es elemento de C" o simplemente que "x está en C". No daré aquí una lista completa de todos los símbolos y operadores de conjuntos, pero te recomiendo que los aprendas. La mayoría de los libros de matemáticas discretas o combinatoria incluyen estos temas.
Regresando a nuestra frase # 2, observemos que apenas hemos discutido sobre la primera mitad de lo que decía. La segunda mitad de la frase nos pide que consideremos las sumas $S_i = 1 + 2 + \cdots + a_i$, para $1 \leq i \leq k$.

Los a_i's eran los términos de la sucesión, así que lo que nos dice esta parte es que habrá una suma para cada término de la sucesión.

Sucesión	Cálculos	Sumas asociadas
$(1,2,3)$	$S_1 = 1$, $S_2 = 1+2 = 3$, $S_3 = 1+2+3 = 6$	$1,3,6$
$(1,2,2,1)$	$S_1 = 1$, $S_2 = 1+2 = 3$, $S_3 = 2+1 = 3$, $S_4 = 1$	$1,3,3,1$
$(3,3)$	$S_1 = 1+2+3 = 6$, $S_2 = 1+2+3 = 6$	$6,6$

Si estás durante un examen leyendo un problema como este, será fundamental que dediques varios minutos a hacer varias de estas listas. La tabla anterior solo considera el caso $n = 6$, pero tú deberías hacer varios experimentos para más casos. Aprovecho también para sugerirte que siempre que tengas algún tipo de asociación entre objetos matemáticos, escribas los ejemplos usando justamente tablas. Tal como lo puse arriba. Esta frase # 2 tiene una estructura matemática compleja a pesar de que solo trata con conceptos relativamente sencillos (listas de números enteros). El tiempo que dediques a cada frase debe depender de la complejidad de la misma. Finalmente, asegúrate de escribir mucho durante la lectura de un problema complejo. Esto reforzará aun más la asimilación de los elementos matemáticos del problema.

Sugerencia # 3:
Después de leer cada frase, asegúrate de haber escrito lo que hayas descubierto o experimentado mientras la analizabas. Usa gráficas, listas, tablas, ecuaciones, dibujos o lo que te parezca más adecuado. Pero, ¡escribe cosas!

Esta sugerencia puede parecer evidente, pero cada año decenas de participantes entregan hojas en blanco en sus exámenes. Escribir también estimula tu mente a tener ideas. No solo se trata de "escribir soluciones", escribes desde que estás leyendo el problema para ayudarte a entender mejor las cosas.
Veamos ahora la frase final del problema.

Frase # 1.3:
Determina, en términos de n, el máximo valor posible del producto $S_1 S_2 \cdots S_k$.

Dije que cada problema cuenta una historia, pero siempre hace más que eso. Al final te hace una pregunta o te propone un reto. Cuando lees una historia eres un simple espectador, pero en los problemas se te exige que juegues un rol más activo haciendo alguna deducción o encontrando algo. El tipo de reto define el tipo de problema y en muchos casos las estategias que podemos usar.
En este caso el reto consiste en "encontrar algo" y, en particular, encontrar el máximo valor de una expresión. A este tipo de problemas se les conoce como problemas de optimización (cuando se trata de encontrar el máximo o el mínimo de una función

en un conjunto). La tabla que usamos arriba podemos completarla con una columna adicional.

Sucesión	Cálculos	Sumas asociadas	Producto
$(1,2,3)$	$S_1 = 1$, $S_2 = 1+2 = 3$, $S_3 = 1+2+3 = 6$	$1,3,6$	$1\cdot 3\cdot 6 = 18$
$(1,2,2,1)$	$S_1 = 1$, $S_2 = 1+2 = 3$, $S_3 = 2+1 = 3$, $S_4 = 1$	$1,3,3,1$	$1\cdot 3\cdot 3\cdot 1 = 9$
$(3,3)$	$S_1 = 1+2+3 = 6$, $S_2 = 1+2+3 = 6$	$6,6$	$6\cdot 6 = 36$

Recuerda que debemos entender el problema primero para $n = 6$ antes de tratar de analizar casos más complejos. Lo que nos pide el problema es encontrar el máximo valor que puede obtenerse de ese producto cuando la lista cumple la propiedad de que su suma es igual a 6. Para este caso, no es dificil encontrar que la lista que hace máximo el producto es $(3,3)$. Analizando de forma similar para otros casos y observando con cuidado, no tardarás en darte cuenta de las características de esa lista y estarás muy cerca de la solución del problema.

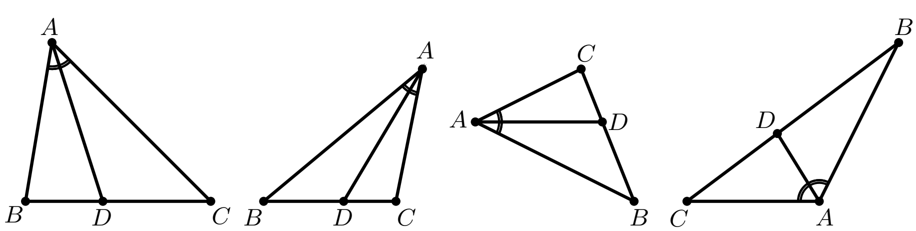
En este artículo no completaré la solución, ya que quiero enfocarme en la lectura y entendimiento de los problemas. Por si te interesa investigarlo más, el problema que acabo de usar como ejemplo, apareció en el examen nacional de la 32^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas y puedes hallarlo en la página oficial de la olimpiada (`www.ommenlinea.org`). Aunque fue problema 4 (en teoría "fácil"), los participantes de ese año obtuvieron menos puntos en él que en algunos problemas 6 de otros años.

Usemos otro problema como ejemplo para aprender más sugerencias sobre esto.

Siguiendo la sugerencia 1 que comenté, veamos lo que dice la primera frase del problema antes de continuar con la lectura.

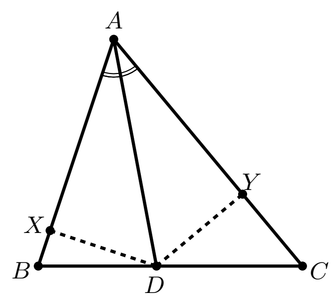
Frase # 2.1:
Sean ABC un triángulo y AD la bisectriz del ángulo $\angle BAC$, con D sobre BC.

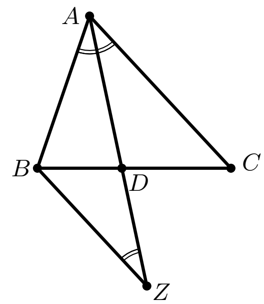
Una ventaja de los problemas de geometría, es que cada frase suele darnos indicaciones para la construcción de una figura. Así que siempre tendremos alguna imagen visual de la información del problema. Aprovecharé para sugerirte que en problemas de geometría conviene hacer varias figuras en posiciones diferentes, ya sea durante la lectura del problema o cuando ya lo estemos analizando.



Otra sugerencia específica que debes tener en mente, es detenerte a pensar algunas consecuencias, deducciones o ideas que puedas generar a partir de lo que dice la frase.

En el caso de este problema, la bisectriz nos dice que los ángulos son iguales y, por lo tanto, podemos imaginar ya algunas construcciones. Por ejemplo, que la distancia del punto D a los lados AB y AC son iguales o podríamos recordar el teorema de la bisectriz que dice que $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$. Si recordamos un teorema, deberíamos también tratar de recordar su demostración. Para este teorema, por ejemplo, una demostración consiste en trazar una paralela a AC por el punto B e intersecarla con la recta AD.





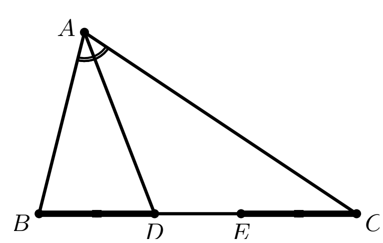
Como ya lo comenté, la idea de dedicar un poco de tiempo a analizar estas figuras (antes de continuar con la lectura del problema), es permitir a tu cerebro asimilar mejor las ideas y de paso generar algunas otras ideas que podrían ser útiles para resolver el problema. Para este problema en particular, la idea de trazar la paralela por B será útil.

Sugerencia # 4:
Especialmente en problemas de geometría. Cada vez que leas una frase, detente, haz varias figuras, trata de deducir todas las cosas que puedas.
Recuerda los teoremas involucrados y las ideas de sus demostraciones.
No olvides escribir todo lo que se te vaya ocurriendo.

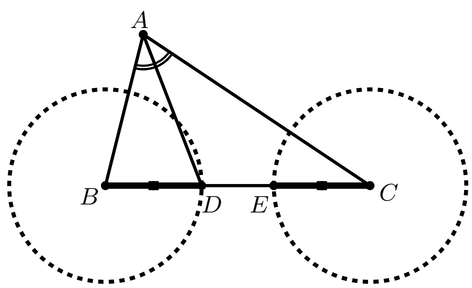
Sigamos con la lectura de este problema. La segunda frase dice lo siguiente.

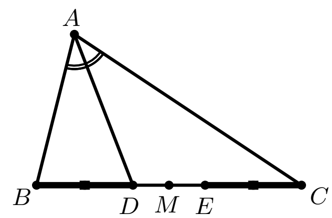
Frase # 2.2:
Sea E un punto sobre el segmento BC tal que $BD = EC$.

Algunas frases suele agregarnos nuevos elementos a nuestra figura. En este caso nos hablan de un nuevo punto E con la propiedad de que $BD = EC$. Siguiendo la sugerencia # 4, haremos una figura y trataremos de deducir cosas sobre ella.



En muchos casos, las frases nuevas nos hablan de nuevos elementos mediante sus propiedades. Hazte preguntas. ¿Qué observas? ¿Qué puedes deducir? Una sugerencia adicional que te puede ser muy útil, especialmente en problemas de geometría, es tratar de imaginar ¿cómo construir el elemento nuevo?
Para construir el punto E puedes pensar en abrir el compás con centro en B y radio AD, para luego moverlo a C como centro. Algo como lo que se muestra en la figura de abajo. Sin embargo, si lo piensas con más cuidado, existe una forma aún más simple de construir el punto E y es que resulta ser el simétrico de D respecto al punto medio del segmento BC.





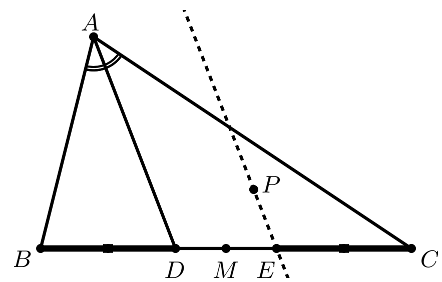
Observa que este punto M no es parte del problema, sin embargo apenas en la lectura de la segunda frase del problema ya podemos darnos cuenta que puede ser relevante para las ideas de la solución. Nuestra mente empieza a pensar en términos de simetrías y reflexiones. A priori, no sabemos cuáles ideas serán las que nos servirán para resolver el problema, pero entre más ideas generamos es mejor.
De hecho, tener el punto medio de un lado nos lleva directo a pensar en la idea de "duplicar la mediana" y completar un paralelogramo. Esta idea es sumamente útil en muchos problemas y es una que siempre debes investigar si tienes figuras como estas. Pero esto nos aleja del tema central, que es la lectura del problema.

Sugerencia # 5:
En problemas de geometría siempre pregúntate:
¿cómo puedo construir los elementos de la figura?
Busca formas que involucren al resto de los elementos del problema.

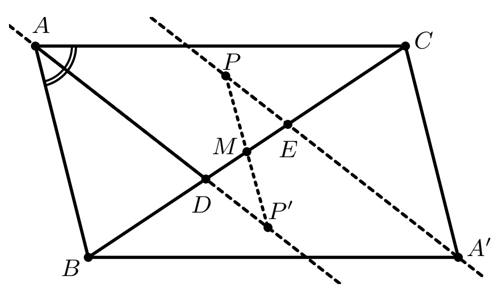
Esta sugerencia a veces puede aplicarse en otro tipo de problemas. Podrías, por ejemplo, preguntarte ¿cómo calcular cierto número o cómo construir cierto conjunto? Las ideas de esas construcciones suelen ser puntos de partida importantes para el análisis y la solución de los problemas. Pasemos a la siguiente frase.

Frase # 2.3:
Por el punto E se traza la recta ℓ paralela a AD
y considera un punto P sobre ℓ dentro del triángulo ABC.

Esta tercera frase nos corrobora que las ideas sobre paralelas y paralelogramos podrían servirnos mucho con el problema. Como he recomendado, debemos trazar los nuevos elementos y tratar de hacer algunas deducciones.



Cuando estamos a la mitad de la lectura, es posible que el problema empiece a complicarse por la cantidad de elementos involucrados. En este punto debemos dedicar aún más tiempo a tratar de establecer conexiones entre los distintos elementos que nos han presentado. Desde la frase anterior estábamos pensando sobre la simetría respecto al punto M. Así que ahora podríamos dedicar un poco de tiempo a ver cómo esa simetría puede aplicarse con la nueva recta ℓ y al resto de los elementos. Denotaremos por A' al simétrico de A y por P' al simétrico de P. Notemos que ya sabíamos que E es el simétrico de D y que C es el simétrico de B. Todo respecto a M.



Observamos que la recta ℓ se refleja sobre la recta que genera la bisectriz AD. Por lo que el triángulo $A'CB$ cumple lo mismo que cumplía el triángulo ABC hasta ahora. En particular, $A'E$ es bisectriz del ángulo $\angle CA'B$. De paso, podemos demostrar fácilmente que los triángulos MPE y $MP'D$ son congruentes, así como varios otros que se ven en la figura.

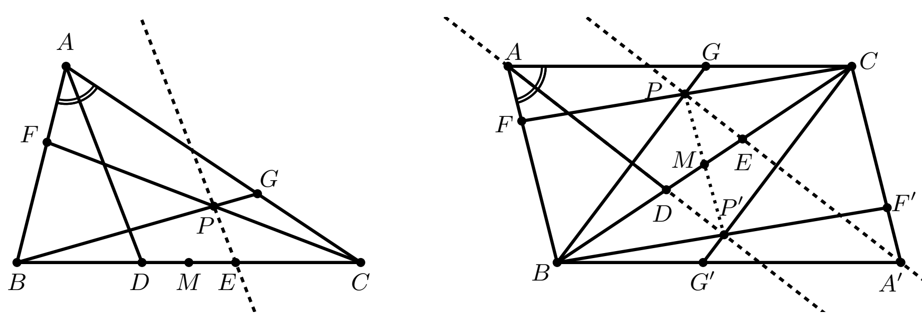
Claro que se pueden deducir muchas más cosas sobre la figura. Durante la lectura, conviene no detenerse mucho en las demostraciones detalladas y quedarse solo con el análisis de ideas generales que podrían ser útiles. Creo que vale la pena poner eso como sugerencia.

Sugerencia # 6:
Durante la lectura de las frases, dedícate a observar y generar todas las ideas que puedas. Evita enfocarte en demostraciones o en detalles, ya habrá tiempo para eso más adelante.

Pasemos a la siguiente frase del problema.

Frase # 2.4:
Sea G el punto donde la recta BP corta al lado AC y sea F el punto donde la recta CP corta al lado AB.

Esta frase nos agrega nuevos elementos al problema. Especialmente en problemas complejos de geometría, nuestras figuras pueden incluir muchos elementos. Si observas una figura como la que se genera sin haber pasado por el proceso de asimilar lo que obtuvimos antes, es fácil sentirse abrumado. Pero una vez que ya hemos analizado los elementos anteriores, podemos tratar de hacer conexiones con las ideas que hemos tenido antes.
Si aplicamos la reflexión a los nuevos elementos del problema, no es difícil observar que las rectas FG' y GF' parecen ser paralelas a la recta ℓ y a la bisectriz AD.



Así, tendríamos varios grupos de rectas paralelas: $AC \parallel BA'$, $AB \parallel CA'$, $FC \parallel BF'$, $AD \parallel A'P$ (posiblemente también $GF' \parallel FG'$), etc. Conectando estas ideas con la información de que AD es bisectriz, es muy fácil deducir que los triángulos FBG' y GBF' son congruentes e isósceles. Lo cual es justamente lo que nos pide el problema y a lo que hemos llegado aún sin haber acabado de leerlo.

Frase # 2.5:
Demuestra que $BF = CG$.

De nuevo no daré los detalles de la demostración de este problema. Pero todas las ideas necesarias ya las discutimos desde la misma lectura. Este problema es el número 6 del concurso nacional correspondiente a la 19^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas, por si te interesa ver los detalles de la demostración.

Como comentaba, los problemas te cuentan una historia, te presentan algunos personajes (elementos matemáticos) y sus propiedades. Finalmente, te plantean una pregunta o reto. Estos dos ejemplos que presenté, los usé solo para resaltar algunas sugerencias basándome en problemas que realmente se aplicaron en exámenes. Seguramente cuando te enfrentes a tus propios problemas, los leas y los analices, el proceso no será tan "limpio" como ocurrió aquí. Deberán generar muchas ideas y dedicar un buen tiempo a observar y reflexionar. Todo es cuestión de práctica. Solo espero que después de leer esto, leas con más cuidado y no te aprasures tanto para evitar que se te escape información importante o ideas que se te debieron haber ocurrido.

Para concluir, voy a darte una lista de problemas para que practiques la lectura analítica siguiendo las sugerencias que te he compartido. Aunque claro que pueden aplicarse para cualquier problema. Incluso problemas fuera de las olimpiadas de matemáticas. Suerte con tu entrenamiento y te deseo que no vuelvas a leer mal un problema.

Problemas

1) (OMM, Concurso Nacional, 1994) Un matemático caprichoso escribe un libro que tiene páginas de la 2 a la 400 y que debe ser leído en el siguiente orden: Primero deberán leerse todas las páginas cuyo número no sea primo relativo con 400 (por suerte, estas páginas se leen en orden normal, de menor a mayor). Una vez que se han leído estas, hay que tomar el último número de las que no se han leído (en este caso el 399) y entonces leer todas las páginas cuyo número no sea primo relativo con él y que no se hayan leído antes. Este proceso (tomar el último número de las que no se han leído y leer las páginas cuyo número no sea primo relativo con este y que no se haya leído antes) continúa hasta terminar de leer el libro. ¿Cuál es el número de la última página que se debe leer?

2) (OMM, Concurso Nacional, 2001) Se tienen algunas pelotas de colores (son por lo menos tres colores) y por lo menos tres cajas. Las pelotas se ponen en la cajas, de manera que no quede vacía ninguna caja y que no haya tres pelotas de colores distintos que estén en tres cajas distintas. Prueba que hay una caja tal que todas las pelotas que están fuera de ella son del mismo color.

3) (OMM, Concurso Nacional, 2000) Dado un conjunto A de enteros positivos, construimos el conjunto A' poniendo todos los elementos de A y todos los enteros positivos que se pueden obtener de la siguiente manera: Se escogen algunos elementos de A, sin repetir, y a cada uno de esos números se le pone el signo $+$ o el signo $-$. Luego, se suman esos números con signo y el resultado se pone en A'. Por ejemplo, si $A = \{2, 8, 13, 20\}$, entonces algunos elementos de A' son 8 y 14 (pues 8 es elemento de A y $14 = 20 + 2 - 8$). A partir de A' construimos A'' de la misma manera que A' se construye a partir de A. Encuentra el mínimo número de elementos que necesita tener A, si queremos que A'' contenga todos los enteros del 1 al 40 (inclusive).

4) (OMM, Concurso Nacional, 2001) En un cuadrilátero $ABCD$ inscrito en una circunferencia, llamemos P al punto de intersección de las diagonales AC y BD, y

sea M el punto medio de CD. Una circunferencia que pasa por P y que es tangente a CD en M, corta a BD y a AC enlos puntos Q y R, respectivamente. Se toma un punto S en el segmento BD de tal manera que $BS = DQ$. Por S se traza una paralela a AB que corta a AC en un punto T. Muestra que $AT = RC$.

5) (OMCC, 1999) Con perlas de diversos colores se forman collares. Se dice que un collar es primo si no puede descomponerse en cadenas de perlas de la misma longitud, e iguales entre sí. Sean n y q enteros positivos. Demuestra que el número de collares primos con n perlas, cada una de las cuales tiene uno de q^n colores posibles, es igual a n veces el número de collares primos son n^2 perlas, cada una de las cuales tiene uno de q colores posibles.
Nota: Dos collares se consideran iguales si tienen el mismo número de perlas y se puede obtener la misma coloración en ambos collares, rotando uno de ellos hasta hacerlo coincidir con el otro.

6) (Olimpiada Estatal de Nuevo León, 2021) Sean Γ_1 y Γ_2 dos circunferencias tales que Γ_2 pasa por el centro de Γ_1. Γ_2 interseca a Γ_1 en A y B. Sea P un punto cualquiera en Γ_2. Las rectas PA y PB intersecan a Γ_1 otra vez en E y F, respectivamente. Demuestra que $AB = EF$.

7) (OMM, Concurso Nacional, 2008) Un rey decide realizar un juego para premiar a uno de sus caballeros, para ello, acomoda a los n caballeros en una mesa redonda y hace que digan los números $1, 2, 3$ y repitan de nuevo $1, 2, 3$ y así, sucesivamente (lo dicen en el sentido de las manecillas del reloj y cada persona dice un número). Las personas que dicen 2 o 3 son retiradas inmediatamente y el juego continúa hasta que queda un solo caballero, el ganador. Se numeran las personas de 1 a n conforme al primer turno. Encuentra todos los valores de n de tal manera que el ganador sea el caballero 2008.

8) (Olimpiada Estatal de Nuevo León, 2021) Sea p un número primo tal que $\frac{p-1}{2}$ también es primo y sean a, b y c enteros que no son divisibles por p. Demuestra que existen a lo mucho $1 + \sqrt{2p}$ enteros positivos n tales que $n < p$ y p divide a $a^n + b^n + c^n$.

Bibliografía

1) Jo Boaler. *Mathematical Mindsets.* Jossey-Bass, 2016.

2) Keith Devlin. *Introduction to Mathematical Thinking.* Keith Devlin, 2012.

3) José A. Gómez Ortega, Carlos J. Rubio Barrios, Rogelio Valdez Delgado. *Concursos Nacionales de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas: 1987-2016.* Instituto de Matemáticas, UNAM, Colección Papirhos, 2019.

4) Barbara Oakley. *A Mind for Numbers: How to Excel at Math and Science.* Penguin Group, 2014.

5) George Polya. *¿Cómo plantear y resolver problemas?* Editorial Trillas, 1965.