La desigualdad del reacomodo, una desigualdad poderosa

Por Carlos Jacob Rubio Barrios

Nivel Avanzado

Consideremos dos conjuntos de números reales $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ y $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. De entre todas las permutaciones (a'_j) de (a_j) y (b'_j) de (b_j), ¿cuál pareja de permutaciones maximiza la suma $\sum a'_j b'_j$ y cual pareja de permutaciones la minimiza? La respuesta a esta pregunta está contenida en el siguiente resultado conocido como *desigualdad del reacomodo*.

Teorema (Desigualdad del reacomodo). Sean $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ y $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ (o $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ y $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$) dos sucesiones de números reales. Si $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ es cualquier permutación de $a_1, a_2, \ldots, a_n$, entonces

$$\sum_{j=1}^{n} a_j b_{n+1-j} \leq \sum_{j=1}^{n} a'_j b_j \leq \sum_{j=1}^{n} a_j b_j. \tag{1}$$

Por lo tanto, la suma $\sum_{j=1}^{n} a_j b_j$ es máxima cuando las dos sucesiones (a_j) y (b_j) están ordenadas de manera similar (esto es, cuando ambas son no-decrecientes o cuando ambas son no-crecientes). Y la suma es mínima cuando (a_j) y (b_j) están ordenadas de forma opuesta (esto es, una de ellas es creciente y la otra es decreciente).

Demostración. Asumiremos que ambas sucesiones (a_j) y (b_j) son no-decrecientes; la prueba es similar en el otro caso. Supongamos que $(a'_j) \neq (a_j)$. Sea r el mayor índice tal que $a'_r \neq a_r$, esto es, $a'_r \neq a_r$ y $a'_j = a_j$ para $r < j \leq n$. Esto implica que a'_r está en el conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_{r-1}\}$ y $a'_r < a_r$. Más aún, esto también muestra que $a'_1, a'_2, \ldots, a'_r$ es una permutación de $a_1, a_2, \ldots, a_r$. Luego, podemos encontrar índices

$k < r$ y $\ell < r$ tales que $a'_k = a_r$ y $a'_r = a_\ell$. Se sigue que

$$a'_k - a'_r = a_r - a_\ell \geq 0, \quad b_r - b_k \geq 0.$$

Ahora intercambiamos a'_r y a'_k para obtener una permutación $a''_1, a''_2, \ldots, a''_n$ de a'_1, $a'_2, \ldots, a'_n$; luego

$$\begin{cases} a''_j = a'_j & \text{si} \quad j \neq r, k \\ a''_r = a'_k = a_r, & \\ a''_k = a'_r = a_\ell. & \end{cases}$$

Consideremos las sumas

$$S'' = a''_1 b_1 + a''_2 b_2 + \cdots + a''_n b_n, \quad S' = a'_1 b_1 + a'_2 b_2 + \cdots + a'_n b_n.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} S'' - S' &= \sum_{j=1}^{n} (a''_j - a'_j) b_j = (a''_k - a'_k) b_k + (a''_r - a'_r) b_r \\ &= (a'_r - a'_k) b_k + (a'_k - a'_r) b_r = (a'_k - a'_r)(b_r - b_k). \end{aligned}$$

Como $a'_k - a'_r \geq 0$ y $b_r - b_k \geq 0$, concluimos que $S'' \geq S'$. Observemos que la permutación $a''_1, a''_2, \ldots, a''_n$ de $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ tiene la propiedad de que $a''_j = a'_j = a_j$ para $r < j \leq n$ y $a''_r = a'_k = a_r$. De esta forma, podemos considerar la permutación (a''_j) en lugar de (a'_j) y repetimos el procedimiento anterior. Después de a lo más $n-1$ pasos, obtenemos la permutación original (a_j) a partir de (a'_j). En cada paso, la suma correspondiente es no-decreciente. Por lo tanto, se sigue que

$$a'_1 b_1 + a'_2 b_2 + \cdots + a'_n b_n \leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n. \tag{2}$$

Para obtener la otra desigualdad, pongamos

$$c_j = a'_{n+1-j}, \quad d_j = -b_{n+1-j}.$$

Entonces, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ es una permutación de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$. Usando la desigualdad (2) para las sucesiones (c_j) y (d_j), obtenemos que

$$c_1 d_1 + c_2 d_2 + \cdots + c_n d_n \leq a_1 d_1 + a_2 d_2 + \cdots + a_n d_n.$$

Sustituyendo los valores de c_j y d_j, obtenemos que

$$-\sum_{j=1}^{n} a'_{n+1-j} b_{n+1-j} \leq -\sum_{j=1}^{n} a_j b_{n+1-j},$$

esto es,

$$a'_1 b_1 + a'_2 b_2 + \cdots + a'_n b_n \geq a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1, \tag{3}$$

que es la segunda desigualdad.
No es difícil ahora determinar las condiciones bajo las cuales se dan las igualdades

en las desigualdades anteriores. Si para cada par k,ℓ con $1 \leq k < \ell \leq n$, o bien $a'_k = a'_\ell$ o $a'_k > a'_\ell$ y $b_k = b_\ell$, entonces se sostiene la igualdad en (2). Una condición similar se cumple para la igualdad en (3): para cada k,ℓ con $1 \leq k < \ell \leq n$, o bien $a'_{n+1-k} = a'_{n+1-\ell}$ o $a'_{n+1-k} > a'_{n+1-\ell}$ y $b_{n+1-k} = b_{n+1-\ell}$. $\square$

Corolario 1. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reales y sea $b_1, b_2, \ldots, b_n$ una permutación de $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Entonces,

$$\sum_{j=1}^{n} a_i b_i \leq \sum_{j=1}^{n} a_i^2,$$

con la igualdad si y solo si $(a_j) = (b_j)$.

Demostración. Sea $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ una permutación de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tal que $a'_1 \leq a'_2 \leq \cdots \leq a'_n$. Entonces, podemos encontrar una función biyectiva σ de $\{1, 2, \ldots, n\}$ sobre sí mismo tal que $a'_j = a_{\sigma(j)}$ para $1 \leq j \leq n$, esto es, σ es una permutación del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$. Sea $b'_j = b_{\sigma(j)}$. Entonces, $b'_1, b'_2, \ldots, b'_n$ es una permutación de $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$. Aplicando la desigualdad del reacomodo a $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ y $b'_1, b'_2, \ldots, b'_n$, obtenemos que

$$\sum_{j=1}^{n} a'_j b'_j \leq \sum_{j=1}^{n} (a'_j)^2 = \sum_{j=1}^{n} a_j^2.$$

Por otro lado, observemos que

$$\sum_{j=1}^{n} a'_j b'_j = \sum_{j=1}^{n} a_{\sigma(j)} b_{\sigma(j)} = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j,$$

ya que σ es una biyección de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Por lo tanto, se sigue que

$$\sum_{j=1}^{n} a_j b_j \leq \sum_{j=1}^{n} a_j^2.$$

Supongamos que se da la igualdad en la desigualdad y que $(a_j) \neq (b_j)$. Entonces, $(a'_j) \neq (b'_j)$. Sea k el índice más grande tal que $a'_k \neq b'_k$, esto es, $a'_k \neq b'_k$ y $a'_j = b'_j$ para $k < j \leq n$. Sea m el menor entero tal que $a'_k = b'_m$. Si $m > k$, entonces $b'_m = a'_m$ y, por lo tanto, $a'_k = a'_m$. Esto implica que $a'_k = a'_{k+1} = \cdots = a'_m$ y, en consecuencia, $b'_{k+1} = \cdots = b'_m$. Pero ahora tenemos un bloque de $m+1-k$ elementos iguales entre los a'_i's y $m-k$ elementos entre los b'_i's. Se sigue que existe $m_1 > m$ tal que $a'_k = b'_{m_1}$. Usando a m_1 como pivote, obtenemos que $a'_k = a'_{k+1} = \cdots = a'_m = \cdots = a'_{m_1}$ y $b'_{k+1} = \cdots = b'_m = \cdots b'_{m_1}$. Este proceso no puede continuar indefinidamente. Concluimos que $a'_k = b'_\ell$ para algún $\ell < k$, lo cual implica que $m < k$.
Es claro que $b'_m \neq b'_k$ por la elección de k. Sabemos que la igualdad se sostiene si y solo si para cualesquiera dos índices $r \neq s$, o bien $a'_r = a'_s$ o $b'_r = b'_s$. Como $b'_m \neq b'_k$, debemos tener $a'_m = a'_k$. Pero entonces tenemos que $a'_m = a'_{m+1} = \cdots = a'_k$. Usando la minimalidad de m, vemos que $k-m+1$ elementos iguales $a'_m, a'_{m+1}, \ldots, a'_k$ deben

estar entre $b'_m, b'_{m+1}, \ldots, b'_n$ y, como b'_k es distinto de a'_k, debemos tener que $a'_k = b'_\ell$ para algún $\ell > k$. Ahora, usando que $b'_\ell = a'_\ell$, obtenemos que

$$a'_m = a'_{m+1} = \cdots = a'_k = \cdots = a'_\ell.$$

Luego, el número de elementos iguales aumentó a $\ell - m + 1 > k - m + 1$. Como este proceso no puede continuar de manera indefinida, concluimos que $(a'_j) = (b'_j)$. Se sigue ahora que $(a_j) = (b_j)$. $\square$

Corolario 2. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reales positivos. Si $b_1, b_2, \ldots, b_n$ es una permutación de $a_1, a_2, \ldots, a_n$, entonces

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{b_i}{a_i} \geq n,$$

con la igualdad si y solo si $(a_j) = (b_j)$.

Demostración. Sea $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ una permutación de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tal que $a'_1 \leq a'_2 \leq \cdots \leq a'_n$. Como en la prueba del Corolario 1, podemos encontrar una permutación σ de $\{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $a'_j = a_{\sigma(j)}$ para $1 \leq j \leq n$. Definamos $b'_j = b_{\sigma(j)}$. Entonces, (b'_j) es una permutación de (a'_j). Usando la desigualdad del reacomodo, obtenemos que

$$\sum_{j=1}^{n} b'_j \left(-\frac{1}{a'_j}\right) \leq \sum_{j=1}^{n} a'_j \left(-\frac{1}{a'_j}\right) = -n.$$

Esto prueba la desigualdad. La condición para la igualdad se puede obtener como se hizo en la prueba del Corolario 1. $\square$

A continuación veremos algunas aplicaciones de la desigualdad del reacomodo en la solución de problemas de olimpiada.

Ejemplo 1. Sean a, b, c números reales positivos. Demostrar que

$$a^5 + b^5 + c^5 \geq a^4 b + b^4 c + c^4 a.$$

Solución. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $a \geq b \geq c > 0$ (como la desigualdad es cíclica debemos también considerar el caso $c \geq b \geq a$). Entonces, $a^4 \geq b^4 \geq c^4$. Aplicando la desigualdad derecha en la desigualdad del reacomodo, obtenemos que $aa^4 + bb^4 + cc^4 \geq ba^4 + cb^4 + ac^4$, que es la desigualdad deseada.
Si $c \geq b \geq a > 0$, entonces $c^4 \geq b^4 \geq a^4$. Aplicando la desigualdad derecha en la desigualdad del reacomodo, obtenemos que $cc^4 + bb^4 + aa^4 \geq ac^4 + cb^4 + ba^4$, que es la desigualdad deseada.

Ejemplo 2. Sean a, b, c números reales positivos. Demostrar que:

$$\frac{a^2 + c^2}{b} + \frac{b^2 + a^2}{c} + \frac{c^2 + b^2}{a} \geq 2(a + b + c).$$

Solución. Como la desigualdad es simétrica, podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $a \geq b \geq c > 0$. Entonces, $a^2 \geq b^2 \geq c^2$ y $\frac{1}{c} \geq \frac{1}{b} \geq \frac{1}{a}$.
Aplicando la desigualdad izquierda en la desigualdad del reacomodo, obtenemos que

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} = a^2 \cdot \frac{1}{b} + b^2 \cdot \frac{1}{c} + c^2 \cdot \frac{1}{a} \geq a^2 \cdot \frac{1}{a} + b^2 \cdot \frac{1}{b} + c^2 \cdot \frac{1}{c} = a + b + c$$

y también

$$\frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b} = a^2 \cdot \frac{1}{c} + b^2 \cdot \frac{1}{a} + c^2 \cdot \frac{1}{b} \geq a^2 \cdot \frac{1}{a} + b^2 \cdot \frac{1}{b} + c^2 \cdot \frac{1}{c} = a + b + c.$$

Sumando estas dos desigualdades, obtenemos la desigualdad deseada.

Ejemplo 3. Sean x, y, z números reales positivos. Demostrar que

$$\frac{x^2 - z^2}{y + z} + \frac{y^2 - x^2}{z + x} + \frac{z^2 - y^2}{x + y} \geq 0.$$

Solución. La desigualdad a demostrar es equivalente a la desigualdad $\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{z^2}{y+z} + \frac{x^2}{z+x} + \frac{y^2}{x+y}$. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $x \geq y \geq z > 0$ (como la desigualdad es cíclica, también consideraremos el caso $z \geq y \geq x$). Entonces, $x^2 \geq y^2 \geq z^2$ y $\frac{1}{y+z} \geq \frac{1}{z+x} \geq \frac{1}{x+y}$. Aplicando la desigualdad del reacomodo, obtenemos que

$$\frac{x^2}{y + z} + \frac{y^2}{z + x} + \frac{z^2}{x + y} \geq \frac{z^2}{y + z} + \frac{x^2}{z + x} + \frac{y^2}{x + y}.$$

Si ahora suponemos que $z \geq y \geq x$, entonces $z^2 \geq y^2 \geq x^2$ y $\frac{1}{x+y} \geq \frac{1}{x+z} \geq \frac{1}{z+y}$.
Aplicando la desigualdad del reacomodo, obtenemos que

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{y + z} + \frac{y^2}{z + x} + \frac{z^2}{x + y} &= z^2 \cdot \frac{1}{x + y} + x^2 \cdot \frac{1}{y + z} + y^2 \cdot \frac{1}{z + x} \\ &\geq z^2 \frac{1}{y + z} + x^2 \cdot \frac{1}{z + x} + y^2 \cdot \frac{1}{x + y} \\ &= \frac{z^2}{y + z} + \frac{x^2}{z + x} + \frac{y^2}{x + y}.\end{aligned}$$

En cualquier caso, se obtiene la desigualdad deseada. La igualdad se sostiene si y solo si $x = y = z$.

Ejemplo 4. Sean x, y, z números reales positivos. Demostrar que:

$$\frac{x^3}{yz} + \frac{y^3}{zx} + \frac{z^3}{xy} \geq x + y + z.$$

Solución. Como la desigualdad es simétrica, podemos asumir que $x \geq y \geq z > 0$. Entonces, $x^3 \geq y^3 \geq z^3$ y $\frac{1}{yz} \geq \frac{1}{zx} \geq \frac{1}{xy}$. Aplicando la desigualdad del reacomodo, obtenemos que

$$\begin{aligned}\frac{x^3}{yz}+\frac{y^3}{zx}+\frac{z^3}{xy} &= x^3\cdot\frac{1}{yz}+y^3\cdot\frac{1}{zx}+z^3\cdot\frac{1}{xy}\\ &\geq x^3\cdot\frac{1}{xy}+y^3\cdot\frac{1}{yz}+z^3\cdot\frac{1}{zx}=\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}. \qquad (4)\end{aligned}$$

Demostraremos ahora que

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\geq x+y+z. \qquad (5)$$

Como $x\geq y\geq z>0$, tenemos que $x^2\geq y^2\geq z^2$ y $\frac{1}{z}\geq\frac{1}{y}\geq\frac{1}{x}$.
Por la desigualdad del reacomodo, obtenemos que

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\geq\frac{x^2}{x}+\frac{y^2}{y}+\frac{z^2}{z}=x+y+z.$$

El caso cuando $z\geq y\geq x$ es análogo al anterior.
Luego, de (4) y (5) obtenemos que $\frac{x^3}{yz}+\frac{y^3}{zx}+\frac{z^3}{xy}\geq x+y+z$. La igualdad se da si y solo si $x=y=z$.

Ejemplo 5. Sean x,y,z números reales positivos. Demostrar que

$$\sum(z+x)(x+y)(y+z-x)(z-x)\geq 0,$$

donde la suma es considerada cíclicamente sobre x,y,z.

Solución. Pongamos $z+x=2a$, $x+y=2b$ y $y+z=2c$. Resolviendo este sistema de ecuaciones en x,y,z, obtenemos que $x=a+b-c$, $y=b+c-a$ y $z=c+a-b$ y la desigualdad es equivalente a la desigualdad

$$\sum ab(3c-a-b)(c-b)\geq 0, \qquad (6)$$

donde la suma se considera cíclicamente sobre a,b,c.
Como x,y,z son números reales positivos, tenemos que a,b,c son las longitudes de los lados de un triángulo.
Si $a\leq b\leq c$, entonces

$$\frac{s-2a}{a}\geq\frac{s-2b}{b}\geq\frac{s-2c}{c},$$

donde $2s=a+b+c$.
Si $b\leq a\leq c$, entonces

$$\frac{s-2b}{b}\geq\frac{s-2a}{a}\geq\frac{s-2c}{c}.$$

En cualquier caso, aplicando la desigualdad del reacomodo obtenemos que

$$a\frac{(s-2a)}{a}+b\frac{(s-2b)}{b}+c\frac{(s-2c)}{c}\leq a\frac{(s-2b)}{b}+b\frac{(s-2c)}{c}+c\frac{(s-2a)}{a},$$

esto es,

$$\frac{(c-a)(s-2a)}{a}+\frac{(a-b)(s-2b)}{b}+\frac{(b-c)(s-2c)}{c}\geq 0.$$

Simplificando, obtenemos la desigualdad (6).

Ejemplo 6. (Examen selectivo de la India para la IMO de 1997). Sean a, b y c números reales positivos. Demostrar que

$$\frac{1}{a(1+b)}+\frac{1}{b(1+c)}+\frac{1}{c(1+a)}\geq\frac{3}{1+abc}.$$

Solución. La desigualdad se puede reescribir en la forma

$$\left(\frac{1}{a(1+b)}+\frac{bc}{1+b}\right)+\left(\frac{1}{b(1+c)}+\frac{ac}{1+c}\right)+\left(\frac{1}{c(1+a)}+\frac{ab}{1+a}\right)\geq 3,$$

esto es,

$$\left(\frac{1}{a(1+b)}+\frac{ab}{1+a}\right)+\left(\frac{1}{b(1+c)}+\frac{bc}{1+b}\right)+\left(\frac{1}{c(1+a)}+\frac{ac}{1+c}\right)\geq 3. \tag{7}$$

Observemos que

$$\frac{1}{a(1+b)}+\frac{ab}{1+a}=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1+b}+b\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{a}}.$$

Si $\frac{1}{a}\geq b$, entonces $\frac{1+a}{a}\geq 1+b$ y, por consiguiente, $\frac{1}{1+b}\geq\frac{1}{1+\frac{1}{a}}$.

Si $\frac{1}{a}\leq b$, entonces $\frac{1+a}{a}\leq 1+b$ y, por consiguiente, $\frac{1}{1+b}\leq\frac{1}{1+\frac{1}{a}}$.

Aplicando la desigualdad del reacomodo, obtenemos que

$$\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1+b}+b\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{a}}\geq\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{a}}+b\cdot\frac{1}{1+b}=\frac{1}{1+a}+\frac{b}{1+b}. \tag{8}$$

De manera análoga, con los otros sumandos obtenemos que

$$\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{1+c}+c\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{b}}\geq\frac{1}{1+b}+\frac{c}{1+c}, \tag{9}$$

$$\frac{1}{c}\cdot\frac{1}{1+a}+a\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{c}}\geq\frac{1}{1+c}+\frac{a}{1+a}. \tag{10}$$

Finalmente, sumando las desigualdades (8), (9) y (10), obtenemos la desigualdad (7).

Ejemplo 7. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reales positivos y $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Demostrar que

$$\frac{a_1}{s-a_1} + \frac{a_2}{s-a_2} + \cdots + \frac{a_n}{s-a_n} \geq \frac{n}{n-1}.$$

Solución. Observemos que la suma del lado izquierdo de la desigualdad es simétrica en las a_j's y, por lo tanto, podemos suponer que $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$. Esto implica que

$$s - a_1 \geq s - a_2 \geq \cdots \geq s - a_n$$

y

$$\frac{1}{s-a_1} \leq \frac{1}{s-a_2} \leq \cdots \leq \frac{1}{s-a_n}.$$

Para cualquier k, consideremos la permutación de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ definida por

$$b_j = \begin{cases} a_{k+j-1} & \text{si} \quad 1 \leq j \leq n-k+1, \\ \\ a_{k+j-1-n} & \text{si} \quad n-k+2 \leq j \leq n. \end{cases}$$

Usando la desigualdad del reacomodo, obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{s-a_1} + \frac{a_2}{s-a_2} + \cdots + \frac{a_n}{s-a_n} \geq & \frac{a_k}{s-a_1} + \frac{a_{k+1}}{s-a_2} + \cdots + \frac{a_n}{s-a_{n+k-1}} + \\ & + \frac{a_1}{s-a_{n+k}} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{s-a_n} \end{aligned}$$

para cada k. Sumando ahora sobre k, con $2 \leq k \leq n$, obtenemos que

$$\begin{aligned} (n-1)\left(\frac{a_1}{s-a_1} + \frac{a_2}{s-a_2} + \cdots + \frac{a_n}{s-a_n}\right) &\geq \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{s-a_j}\left(\sum_{\ell \neq j} a_\ell\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{s-a_j}{s-a_j} = n, \end{aligned}$$

lo cual implica que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{s-a_j} \geq \frac{n}{n-1}$.

Ejemplo 8. (Estados Unidos, 1974). Sean a, b, c números reales positivos. Demostrar que

$$a^a b^b c^c \geq (abc)^{(a+b+c)/3}.$$

Solución. Si x, y son números reales positivos tales que $x \leq y$, entonces $\ln x \leq \ln y$ (la función logaritmo natural es no decreciente). Luego, por la desigualdad del reacomodo tenemos que

$$x \ln x + y \ln y \geq x \ln y + y \ln x.$$

Como la función exponencial es no decreciente, $e^{x \ln x + y \ln y} \geq e^{x \ln y + y \ln x}$, esto es, $x^x y^y \geq x^y y^x$. Por lo tanto, tenemos que

$$a^a b^b \geq a^b b^a, \quad b^b c^c \geq b^c c^b, \quad c^c a^a \geq c^a a^c.$$

Multiplicando estas tres desigualdades, resulta que

$$(a^a b^b c^c)^2 \geq a^{b+c} b^{c+a} c^{a+b}.$$

Multiplicando esta desigualdad de ambos lados por $a^a b^b c^c$, obtenemos que

$$(a^a b^b c^c)^3 \geq a^{b+c+a} b^{c+a+b} c^{a+b+c},$$

de donde se sigue que $a^a b^b c^c \geq (abc)^{(a+b+c)/3}$.

Ejemplo 9. (IMO, 1995). Sean a, b, c números reales positivos tales que $abc = 1$. Demostrar que

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Solución. Como la expresión del lado izquierdo de la desigualdad es simétrica, podemos suponer que $a \geq b \geq c$. Sean $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$, $z = \frac{1}{c}$. Como $abc = 1$, tenemos también que $xyz = 1$. Entonces,

$$\begin{aligned}\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} &= \frac{x^3}{\frac{1}{y} + \frac{1}{z}} + \frac{y^3}{\frac{1}{z} + \frac{1}{x}} + \frac{z^3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \\ &= \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}.\end{aligned}$$

Como $c \leq b \leq a$, tenemos que $x \leq y \leq z$, lo cual implica que $\frac{x}{y+z} \leq \frac{y}{z+x} \leq \frac{z}{x+y}$. Por ejemplo, $\frac{x}{y+z} \leq \frac{y}{z+x}$ si y solo si $y^2 + yz \geq xz + x^2$ si y solo si $(y-x)(x+y+z) \geq 0$. Aplicando la desigualdad del reacomodo, obtenemos las desigualdades:

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} &\geq \frac{xy}{y+z} + \frac{yz}{z+x} + \frac{zx}{x+y}, \\ \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} &\geq \frac{xz}{y+z} + \frac{yx}{z+x} + \frac{zy}{x+y}.\end{aligned}$$

Sumando término a término estas dos desigualdades obtenemos que

$$\begin{aligned}&2\left(\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)}\right) \\ &= 2\left(\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}\right) \\ &\geq \frac{xy}{y+z} + \frac{yz}{z+x} + \frac{zx}{x+y} + \frac{xz}{y+z} + \frac{yx}{z+x} + \frac{zy}{x+y} \\ &= x+y+z \\ &\geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3,\end{aligned}$$

donde la última desigualdad es por MG-MA. El resultado ahora es inmediato.

Algunas desigualdades clásicas vía la desigualdad del reacomodo

Observemos que en la desigualdad del reacomodo no es necesario que los a_i's y los b_i's sean positivos. Esto a menudo no sucede con otras desigualdades. Por ejemplo, en la desigualdad MH-MG-MA (media armónica - media geométrica - media aritmética) es necesario que los números sean positivos. Esta es una razón de que la desigualdad del reacomodo sea un resultado sorprendentemente fuerte. En particular, puede ser usado para deducir varias desigualdades clásicas.

A continuación usaremos la desigualdad del reacomodo para demostrar algunas desigualdades clásicas como la desigualdad MH-MG-MA, la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la desigualdad de Tchebyshev.

Teorema. (Desigualdad MH-MG-MA). Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reales positivos. Entonces

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

Las igualdades se sostienen si y solo si $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Demostración. Sean $G = (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n}$ y $\alpha_k = \dfrac{a_1 a_2 \cdots a_k}{G^k}$ para $1 \leq k \leq n$. Ahora, hagamos

$$\beta_1 = \alpha_2, \beta_2 = \alpha_3, \ldots, \beta_{n-1} = \alpha_n, \beta_n = \alpha_1.$$

Aplicando el Corolario 2, obtenemos que

$$n \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_i}{\alpha_i} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} + \frac{\alpha_1}{\alpha_n}.$$

Por otro lado, tenemos que

$$\frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} = \frac{(a_1 a_2 \cdots a_{i+1})/G^{i+1}}{(a_1 a_2 \cdots a_i)/G^i} = \frac{a_{i+1}}{G}, \quad \frac{\alpha_1}{\alpha_n} = \frac{a_1}{G}.$$

Por lo tanto,

$$n \leq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_{i+1}}{G} + \frac{a_1}{G} = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{G}.$$

Aquí la igualdad se sostiene si y solo si $(\alpha_i) = (\beta_i)$ que es equivalente a $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n$, lo cual a su vez es equivalente a $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.
Usando el Corolario 2, tenemos también que

$$n \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\beta_i} = \frac{G}{a_2} + \frac{G}{a_3} + \cdots + \frac{G}{a_n} + \frac{G}{a_1}.$$

Esto implica que

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \leq G = (a_1a_2\cdots a_n)^{1/n}.$$

Aquí la igualdad se sostiene si y solo si $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. $\square$

Teorema. (Desigualdad de Cauchy-Schwarz). Si $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ son números reales, entonces

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

La igualdad se sostiene si y solo si existe un úmero real k tal que $a_i = kb_i$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.

Demostración. Si alguno de $\sum_{i=1}^{n} a_i^2$ o $\sum_{i=1}^{n} b_i^2$ es igual a 0, la desigualdad es inmediata. Supongamos entonces que

$$A = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} \quad \text{y} \quad B = \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2}$$

son ambos positivos. Definamos

$$\begin{cases} \alpha_i = \dfrac{a_i}{A} & \text{si } \ 1 \leq i \leq n, \\ \\ \alpha_{n+i} = \dfrac{b_i}{B} & \text{si } \ 1 \leq i \leq n, \end{cases}$$

obteniendo así $2n$ números: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_{2n}$. Ahora, consideremos la permutación $\beta_i = \alpha_{n+i}$, $\beta_{n+i} = \alpha_i$ para $1 \leq j \leq n$.
Aplicando el Corolario 1, obtenemos que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\alpha_{n+i} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_{n+i}\alpha_i \leq \sum_{i=1}^{2n} \alpha_i^2 = 2.$$

Luego, se sigue que

$$2\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_ib_i}{AB}\right) \leq 2.$$

Por lo tanto,

$$\sum_{i=1}^{n} a_ib_i \leq AB = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2}.$$

La igualdad se sostiene si y solo si $\alpha_i = \alpha_{n+i}$ para $1 \leq i \leq n$. Esto es equivalente a

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n} = k,$$

una constante. □

La desigualdad de Tchebyshev es una consecuencia directa de la desigualdad del reacomodo.

Teorema. (Desigualdad de Tchebyshev). Sean $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ y $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$. Entonces,

$$\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}{n} \geq \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)\left(\frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}\right).$$

Demostración. Aplicando varias veces la desigualdad del reacomodo, tenemos que

$$\begin{aligned}
a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n &= a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n, \\
a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n &\geq a_1b_2 + a_2b_3 + \cdots + a_nb_1, \\
a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n &\geq a_1b_3 + a_2b_4 + \cdots + a_nb_2, \\
&\vdots \\
a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n &\geq a_1b_n + a_2b_1 + \cdots + a_nb_{n-1}.
\end{aligned}$$

Sumando las desigualdades anteriores, obtenemos que

$$n(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n) \geq (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n),$$

de donde se sigue el resultado. □

Veamos algunos ejemplos adicionales.

Ejemplo 10. Sean a, b, c números reales positivos. Demostrar que

$$\frac{a^8 + b^8 + c^8}{a^3b^3c^3} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Solución. Como la expresión es simétrica, podemos suponer que $a \leq b \leq c$. Entonces, $a^2 \leq b^2 \leq c^2$ y $a^6 \leq b^6 \leq c^6$. Aplicando la desigualdad de Tchebyshev, tenemos que

$$3(a^8 + b^8 + c^8) = 3(a^6a^2 + b^6b^2 + c^6c^2) \geq (a^6 + b^6 + c^6)(a^2 + b^2 + c^2).$$

Aplicando ahora la desigualdad MA - MG, tenemos que $a^6 + b^6 + c^6 \geq 3a^2b^2c^2$. Luego,

$$3(a^8 + b^8 + c^8) \geq 3a^2b^2c^2(a^2 + b^2 + c^2).$$

Además, por la desigualdad MA-MG tenemos que $a^2 + b^2 \geq 2ab$, $b^2 + c^2 \geq 2bc$ y $a^2 + c^2 \geq 2ac$, de donde se sigue que $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$. Por lo tanto, $3(a^8 + b^8 + c^8) \geq 3a^2b^2c^2(ab + bc + ac)$, lo cual implica que

$$\frac{a^8 + b^8 + c^8}{a^3b^3c^3} \geq \frac{ab + bc + ac}{abc} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Ejemplo 11. Sean $a \geq b \geq c > 0$ y $0 < x \leq y \leq z$. Demostrar que

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} \geq \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{xyz}} \geq 3\left(\frac{a+b+c}{x+y+z}\right).$$

Solución. Tenemos que $a \geq b \geq c$ y $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y} \geq \frac{1}{z}$. Aplicando la desigualdad de Tchebyshev con estos números, obtenemos que

$$3\left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}\right) \geq (a+b+c)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right).$$

Por otro lado, aplicando la desigualdad MA-MG tenemos que

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}} = \frac{3}{\sqrt[3]{xyz}}.$$

Luego,

$$3\left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}\right) \geq \frac{3(a+b+c)}{\sqrt[3]{xyz}},$$

de donde se sigue la desigualdad izquierda.
Aplicando una vez más la desigualdad MA-MG, obtenemos que $x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$, esto es, $\dfrac{1}{\sqrt[3]{xyz}} \geq \dfrac{3}{x+y+z}$ y, por lo tanto, $\dfrac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}} \geq \dfrac{3(a+b+c)}{x+y+z}$, que es la desigualdad derecha.

Ejemplo 12. (Desigualdad de Nesbitt). Sean a, b, c números reales positivos. Demostrar que

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Solución. Por la simetría de la expresión, podemos suponer que $a \geq b \geq c$, lo cual implica que $a+b \geq a+c \geq b+c$ y, por lo tanto, $\frac{1}{b+c} \geq \frac{1}{a+c} \geq \frac{1}{a+b}$. Aplicando la desigualdad de Tchebyshev, obtenemos que

$$3\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}\right) \geq (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b}\right).$$

Desarrollando el producto del lado derecho de esta desigualdad, obtenemos que

$$3\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}\right) \geq 3 + \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}\right),$$

esto es,

$$2\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}\right) \geq 3,$$

de donde se sigue el resultado.

Ejemplo 13. Sean a, b, c números reales positivos y sea n un número natural. Demostrar que
$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}\geq\frac{a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}}{2}.$$

Solución. Como la expresión es simétrica en a, b, c, podemos asumir que $a\geq b\geq c$. Entonces,
$$\frac{a}{b+c}\geq\frac{b}{c+a}\geq\frac{c}{a+b}.$$
Por ejemplo, $\frac{a}{b+c}\geq\frac{b}{c+a}$ si y solo si $ac+a^2\geq bc+b^2$ si y solo si $(a-b)(c+a+b)\geq 0$ si y solo si $a\geq b$.
Por lo tanto, tenemos que
$$a^{n-1}\geq b^{n-1}\geq c^{n-1} \quad \text{y} \quad \frac{a}{b+c}\geq\frac{b}{c+a}\geq\frac{c}{a+b}.$$
Aplicando la desigualdad de Tchebyshev con estos números, obtenemos que
$$\left(a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}\right)\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)\leq 3\left(\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}\right).$$
Aplicando ahora la desigualdad de Nesbitt, obtenemos
$$\left(a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}\right)\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)\geq\frac{3}{2}\left(a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}\right).$$
Por lo tanto,
$$3\left(\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}\right)\geq\frac{3}{2}\left(a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}\right),$$
de donde se sigue el resultado.

Generalizaciones de la desigualdad del reacomodo

También hay una desigualdad dual de la desigualdad del reacomodo (ver [4]), aunque es solo para números reales no negativos:

Teorema. Sean $a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_n$ y $b_1\leq b_2\leq\cdots\leq b_n$ dos sucesiones de números reales no negativos. Si $a_1', a_2', \ldots, a_n'$ es una permutación de $a_1, a_2, \ldots, a_n$, entonces
$$(a_1+b_1)\cdots(a_n+b_n)\leq(a_1'+b_1)\cdots(a_n'+b_n)\leq(a_n+b_1)\cdots(a_1+b_n). \quad (11)$$

En [3] se demuestra que las desigualdades (1) y (11) son equivalentes para números reales positivos.
En [5], estas desigualdades son generalizadas a más de dos sucesiones de números no negativos:

Teorema. Consideremos un conjunto de números reales no negativos $\{a_{ij}\}$, $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, n$. Para cada i, sea $a'_{i1}, a'_{i2}, \ldots, a'_{in}$ una permutación de los números $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ tal que $a'_{i1} \geq a'_{i2} \geq \cdots \geq a'_{in}$. Entonces,

$$\sum_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{k} a_{ij} \leq \sum_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{k} a'_{ij},$$
$$\prod_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} a_{ij} \geq \prod_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} a'_{ij}.$$

Para finalizar, dejamos una lista de desigualdades para el lector.

Ejercicios

1) Si a y b son números reales no negativos, demuestra que

$$2(a^5 + b^5) \geq (a^3 + b^3)(a^2 + b^2).$$

2) Sean a, b, c números reales positivos. Demuestra que

$$a^n + b^n + c^n \geq a^{n-1}b + b^{n-1}c + c^{n-1}a$$

para todo entero $n \geq 2$.

3) Si a, b, c son números reales positivos, demuestra que

$$ab + bc + ca \geq a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab}.$$

4) Demuestra que para cualesquiera números reales positivos a, b, c, se tiene que

$$\frac{a+b+c}{abc} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

5) Sean a, b, c números reales positivos. Demuestra que

$$\frac{a}{b(b+c)} + \frac{b}{c(c+a)} + \frac{c}{a(a+b)} \geq \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}.$$

6) (China, 1984). Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reales positivos, demuestra que

$$\frac{a_1^2}{a_2} + \frac{a_2^2}{a_3} + \cdots + \frac{a_n^2}{a_1} \geq a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

7) Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reales positivos y $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Demuestra que

$$\frac{a_1}{s-a_1} + \frac{a_2}{s-a_2} + \cdots + \frac{a_n}{s-a_n} \geq \frac{n^2}{n-1}.$$

8) Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reales positivos tales que $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$. Demuestra que

$$\frac{a_1}{2-a_1} + \frac{a_2}{2-a_2} + \cdots + \frac{a_n}{2-a_n} \geq \frac{n}{2n-1}.$$

9) Sean $a \geq c \geq 0$ y $b \geq d \geq 0$. Demuestra que $(a+b+c+d)^2 \geq 8(ad+bc)$.

10) Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reales en el intervalo $[0,1]$ tales que $a_1 + \cdots + a_n = 1$. Demuestra que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{n-a_i}{1+na_i} \geq \frac{n^2-1}{2}$.

Bibliografía

1) R. Bulajich Manfrino, J.A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Inequalities.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas, Instituto de Matemáticas, UNAM, 2005.

2) Dragos Hrimiuc. *The Rearrangement Inequality.* π in the Sky. The Pacific Institute for the Mathematical Sciences, December, 2000.

3) H. Minc. *Rearrangements*. Transactions of the American Mathematical Society, vol. 159, pp. 497-504, 1971.

4) A. Oppenheim. *Inequalities connected with definite Hermitian forms, II*. American Mathematical Montly, vol. 61, pp. 463-466, 1954.

5) H. Ruderman. *Two new inequalities*. American Mathematical Montly, vol. 59, no. 1, pp. 29-32, 1952.