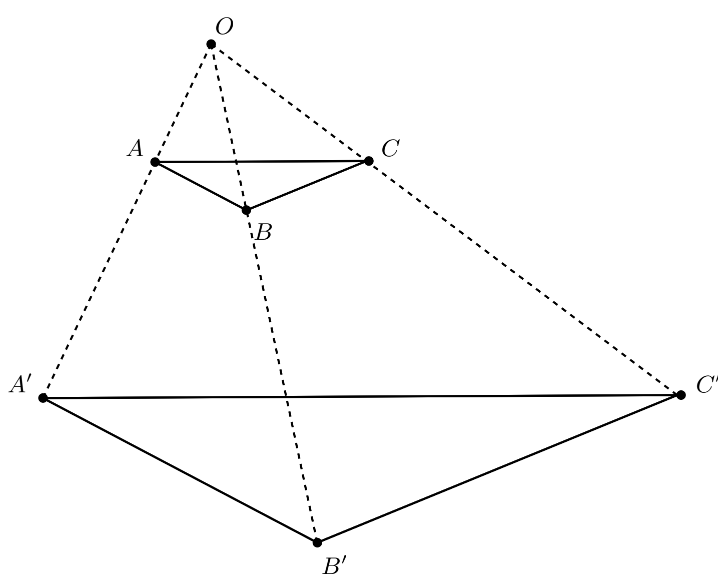
Homotecias entre círculos

Por Leonardo Ariel García Morán

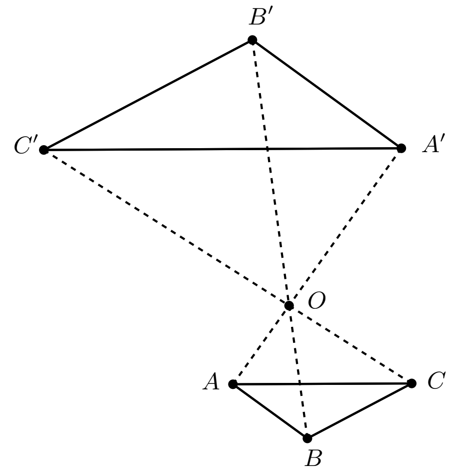
Nivel Avanzado

Introducción

Una **homotecia** es una transformación del plano que consiste en expandir o comprimir todo el plano respecto a cierto punto. Formalmente, una homotecia h con centro O y razón $k \neq 0$ es una transformación del plano que a cada punto P le asigna el punto P' en la recta OP tal que $OP' = k \cdot OP$.

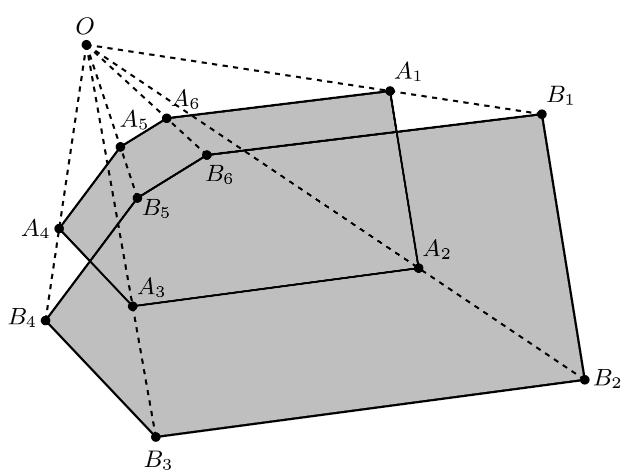


Cuando $k < 0$, la homotecia lleva puntos de un lado del punto O a puntos del otro lado, como se muestra en la siguiente figura.



La utilidad principal de las homotecias se debe al siguiente hecho: Si A y B son puntos cualquiera, entonces los triángulos OAB y $OA'B'$ son semejantes, pues $\angle AOB = \angle A'OB'$ y $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = k$. Esto en particular significa que $A'B' = kAB$ y que los segmentos AB y $A'B'$ son paralelos. Más aún, de $A'B' = kAB$ podemos ver que para cualesquiera tres puntos A, B y C, los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, pues las razones entre sus lados correspondientes son todas iguales a k. Además, sus lados correspondientes son paralelos. Ahora podemos introducir la siguiente definición.

Decimos que dos polígonos $A_1A_2 \ldots A_n$ y $B_1B_2 \ldots B_n$ son **homotéticos** si existe una homotecia que transforma A_i en B_i para cada $i = 1, 2, \ldots, n$.

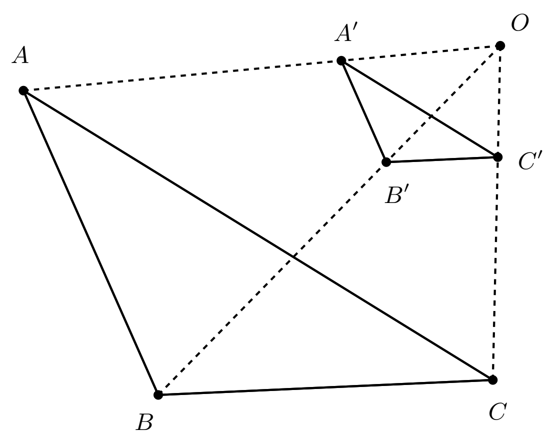


De la misma manera que lo hicimos con los triángulos, podemos ver que si $A_1A_2 \ldots A_n$

y $B_1B_2\ldots B_n$ son homotéticos desde un punto O con razón k, entonces estos son semejantes con razón k. En particular, tenemos que $B_iB_j = kA_iA_j$ para cualesquiera i, j y, el área de $B_1B_2\ldots B_n$, es igual a k^2 veces el área de $A_1A_2\ldots A_n$. Finalmente, los segmentos A_iA_j y B_iB_j son paralelos para cualesquiera i, j. Para el caso de los triángulos, el recíproco de esto último también es cierto.

Teorema 1. Dos triángulos no congruentes ABC y $A'B'C'$ son homotéticos si y solo si sus lados correspondientes son paralelos.

Demostración. Solo nos falta demostrar que si los triángulos ABC y $A'B'C'$ tienen lados correspondientes paralelos, entonces son homotéticos. Es claro que en este caso los triángulos son semejantes, pues los lados paralelos correspondientes nos dicen que tienen los mismos ángulos. Llamemos O al punto de intersección de las rectas AA' y BB'; este debe existir, de lo contrario $ABB'A'$ sería un paralelogramo, $AA' = BB'$ y los triángulos serían congruentes.



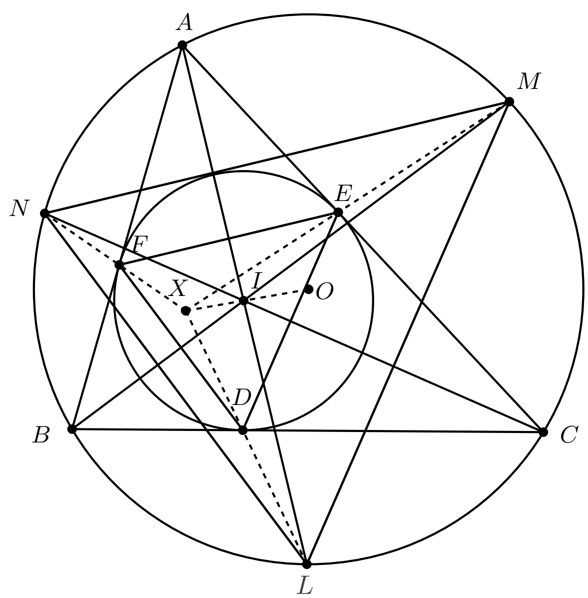
Ahora consideremos la homotecia de centro O y razón $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB}$, la cual lleva a A y B a A' y B', respectivamente. La imagen C^* de C bajo esta homotecia cumple que $B'C^*$ es paralela a BC y $A'C^*$ es paralela a AC. Esto implica que $C^* = C'$, pues las paralelas a BC y AC por B' y A' se intersecan en un único punto. Entonces, los triángulos ABC y $A'B'C'$ son homotéticos con centro O. □

Vale la pena destacar que este resultado no es válido directamente para polígonos con más lados. Por ejemplo, podemos tener un cuadrado y un rectángulo de 2×1 con lados paralelos, pero estos no pueden ser homotéticos pues ni siquiera son semejantes.
El resultado en particular significa que si dos triángulos tienen lados correspondientes paralelos, entonces las rectas que unen los vértices correspondientes concurren. Este es un resultado muy útil en una gran variedad de problemas, y lo utilizaremos para resolver el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1. Sea ABC un triángulo, I su incentro y O su circuncentro. El incírculo de

ABC es tangente a BC, CA y AB en D, E y F, respectivamente. Los puntos L, M y N son los puntos medios de los arcos $\widehat{BC}$, $\widehat{CA}$ y $\widehat{AB}$, respectivamente, del triángulo que no contienen a otros vértices del triángulo. Demostrar que las rectas LD, ME, NF y OI concurren.

Solución. Primero demostraremos que LD, ME y NF concurren en un punto X. Nuestra estrategia será demostrar que los triángulos DEF y LMN tienen lados correspondientes paralelos, lo cual implicará que las rectas LD, ME y NF concurren en un punto que es centro de una homotecia que lleva el triángulo DEF al triángulo LMN.

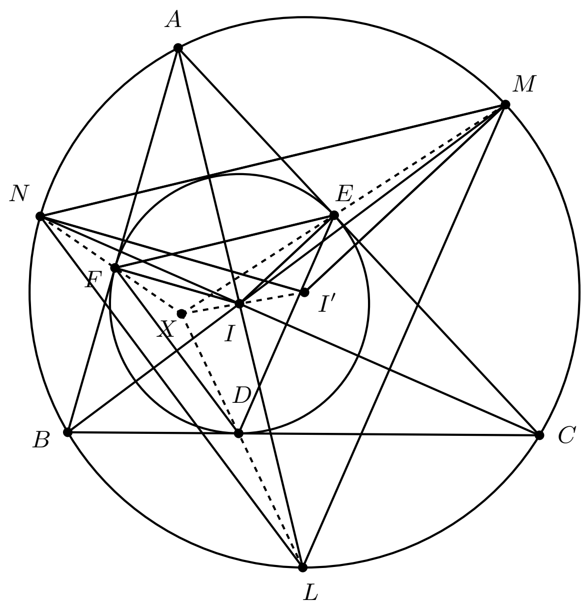


Demostraremos que EF y MN son paralelos, demostrando que ambos son perpendiculares a AI. Primero observemos que $AE = AF$, pues AE y AF son tangentes al incírculo y, como AI biseca al ángulo $\angle EAF$, se sigue que AI es perpendicular a EF. Por otro lado, tenemos que BI y CI cortan al circuncírculo del triángulo ABC en M y N respectivamente, por lo que $\angle MNI = \angle MNC = \angle MBC = \frac{1}{2}\angle B$ y

$$\angle AIN = \angle IAC + \angle ICA = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle C.$$

Luego, $\angle INM + \angle AIN = \frac{1}{2}\left(\angle A + \angle B + \angle C\right) = 90°$, por lo que el ángulo entre AI y MN es de 90° y AI también es perpendicular a MN. Concluimos que las rectas EF y MN son paralelas. Análogamente, obtenemos que FD es tangente a NL y DE es tangente a LM. Concluimos que los triángulos DEF y LMN son homotéticos, por lo que LD, ME y NF concurren en un punto X que es el centro de la homotecia entre los triángulos DEF y LMN.

Ahora nos falta probar que X, I y O son colineales. Para demostrar esto, demostraremos que la homotecia con centro X que manda al triángulo DEF al triángulo LMN, manda I a O.



Para esto, observemos que si I' es la imagen de I bajo esta homotecia, entonces los triángulos IEF, IED y IDF son semejantes a los triángulos $I'NM$, $I'ML$ y $I'LN$, respectivamente, todos con razón igual a la razón k de la homotecia. En particular, $I'N = kIF$, $I'M = kIE$ y $I'D = kID$, por lo que I' es el circuncentro del triángulo LMN y $I' = O$. Concluímos que X, I y O son colineales, como queríamos.

La última parte de esta solución muestra que si dos puntos son "correspondientes" en dos triángulos homotéticos (en el sentido de que forman triángulos semejantes con los lados de ambos triángulos), entonces la homotecia entre los dos triángulos también manda uno de estos puntos en el otro. Concretamente tenemos los siguientes casos especiales.

Teorema 2. Sean ABC y $A'B'C'$ dos triángulos homotéticos con centro K. Entonces, la homotecia que manda ABC a $A'B'C'$ también manda:

- El gravicentro G del triángulo ABC, al gravicentro G' del triángulo $A'B'C'$.
- El incentro I del triángulo ABC, al incentro I' del triángulo $A'B'C'$.
- El circuncentro O del triángulo ABC, al circuncentro O' del triángulo $A'B'C'$.
- El ortocentro H del triángulo ABC, al ortocentro H' del triángulo $A'B'C'$.

En particular, las rectas GG', II', OO' y HH' todas pasan por K.

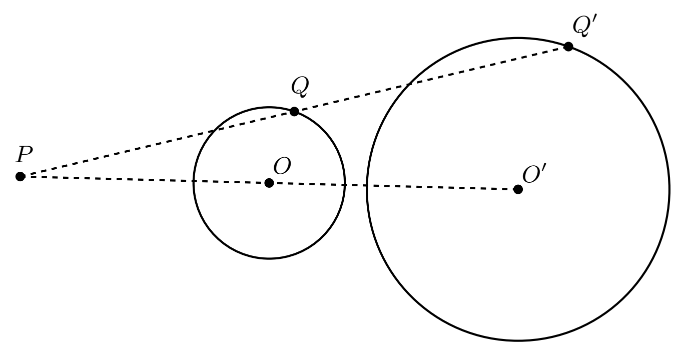
Más aún, en el ejemplo anterior sucedió algo interesante. Al aplicar la homotecia al punto I, que era el centro de cierto círculo, obtuvimos el punto O, que era centro de otro círculo. Esta situación se repite en general cuando aplicamos homotecias a un círculo.

Homotecias entre círculos

El resultado principal es el siguiente.

Teorema 3. Sea C un círculo de radio r. Al aplicar una homotecia con centro P y razón k, este círculo se convierte en un círculo de radio rk, con centro en el punto O' al que se manda P bajo esta homotecia.

Demostración. Consideremos el punto O' que se describió anteriormente. Entonces, para cualquier punto Q en el círculo, su imagen Q' satisface que $O'Q' = kPQ = kr$, por lo que Q' está en el círculo de centro O' y radio kr.

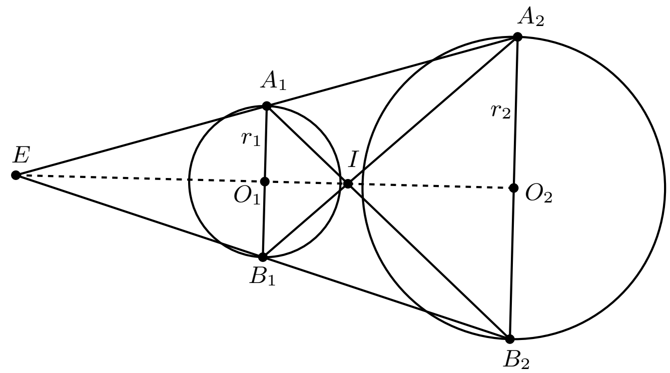


Recíprocamente, si Q está en este círculo, entonces el punto Q' en la recta PQ tal que $PQ' = \frac{1}{k}PQ$ satisface que Q es la imagen de Q' bajo la homotecia. $\square$

Ahora que sabemos que la homotecia convierte círculos en círculos, es natural hacernos la pregunta opuesta: si tenemos dos círculos dados, ¿cuándo es posible encontrar una homotecia que los relacione? Sabemos por el resultado anterior que el centro de esta homotecia, si existe, debe estar en la línea que une los centros de los círculos y, sabemos además, la razón que debe tener (salvo posiblemente el signo). Resulta ser que tal homotecia siempre existe, y no solo eso, existen dos.

Teorema 4. Dados dos círculos Γ_1 y Γ_2 con centros O_1, O_2 y radios r_1, r_2, respectivamente, con $O_1 \neq O_2$ y $r_1 \neq r_2$, existen exactamente dos homotecias que mandan Γ_1 a Γ_2, una con razón $\frac{r_2}{r_1}$ y otra con razón $-\frac{r_2}{r_1}$.

Demostración. Consideremos dos diámetros A_1B_1 y A_2B_2 de Γ_1 y Γ_2, respectivamente, de tal manera que sean perpendiculares a la recta O_1O_2 y A_1, A_2 estén del mismo lado de la recta O_1O_2.



Ahora sea E la intersección de A_1A_2 con B_1B_2 e I la interssección de A_1B_2 con A_2B_1. Afirmamos que E, I son los centros de las homotecias buscadas.

Es fácil ver que el cuadrilátero $A_1B_1B_2A_2$ es un trapecio isósceles y O_1O_2 es la mediatriz común de sus bases, por lo que los puntos E, I están sobre la recta O_1O_2. Veamos ahora que los triángulos EO_2A_2 y EO_1A_1 son semejantes puesto que O_1A_1 y O_2A_2 son paralelas. Entonces, $\frac{EO_2}{EO_1} = \frac{O_2A_2}{O_1A_1} = \frac{r_2}{r_1}$, por lo que la homotecia de centro E y razón $\frac{r_2}{r_1}$ manda O_1 a O_2 y, por lo tanto, manda Γ_1 al círculo de centro O_2 y radio $\frac{r_2}{r_1} \cdot r_1 = r_2$, que es Γ_2. Análogamente, se demuestra que la homotecia con centro I y razón $-\frac{r_2}{r_1}$ manda Γ_1 a Γ_2.

Finalmente, para ver que estas homotecias son las únicas, observemos que cualquier homotecia que mande Γ_1 a Γ_2 debe mandar A_1 a uno de los puntos A_2 o B_2, pues el segmento O_2A_1' debe ser paralelo a O_1A_1. En el primer caso, se sigue que esta debe ser la homotecia desde E y, en el segundo caso, debe ser la homotecia desde I. $\square$

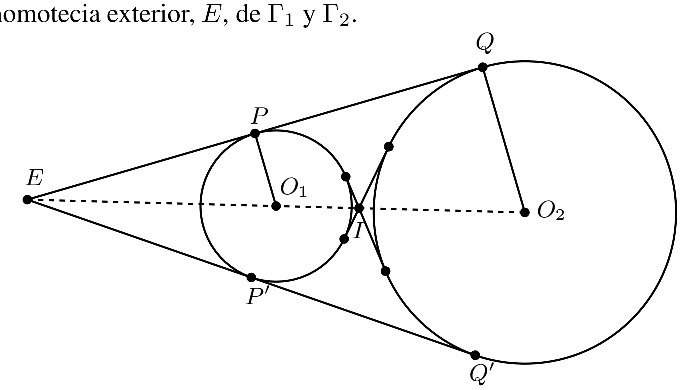
A los puntos I y E se les conoce como **centros de homotecia** de Γ_1 y Γ_2, I interior y E exterior. Un nombre menos común para ellos es **insimilicentro** y **exsimilicentro** respectivamente, derivados de los nombres en inglés *insimilicenter* y *exsimilicenter*.

Los casos donde $r_1 \neq r_2$, son un poco distintos. Cuando $r_1 = r_2$ tenemos un centro de homotecia interior, pero no uno exterior, pues las rectas A_1A_2 y B_1B_2 son paralelas. Cuando $O_1 = O_2$ ambos centros coinciden con el centro común de ambas circunferencias. Checar los detalles de estos dos casos queda como ejercicio.

Un último punto a notar es que en la demostración anterior realmente no necesitamos que los diámetros sean perpendiculares a O_1O_2, basta con que sean paralelos entre sí. Utilizando esto podemos obtener el siguiente resultado útil.

Teorema 5. Sean Γ_1 y Γ_2 circunferencias. Entonces, las tangentes comunes exteriores de Γ_1 y Γ_2 (si existen) pasan por el centro de homotecia exterior de Γ_1 y Γ_2. Similarmente, las tangentes comunes interiores de Γ_1 y Γ_2 (si existen) pasan por el centro de homotecia interior.

Demostración. Consideremos una tangente común exterior a Γ_1 y Γ_2 que las toca en P y Q, respectivamente y, sean O_1, O_2, los centros de Γ_1 y Γ_2, respectivamente. Entonces, O_1P y O_2Q son radios paralelos de Γ_1 y Γ_2, por lo que PQ contiene al centro de homotecia exterior, E, de Γ_1 y Γ_2.

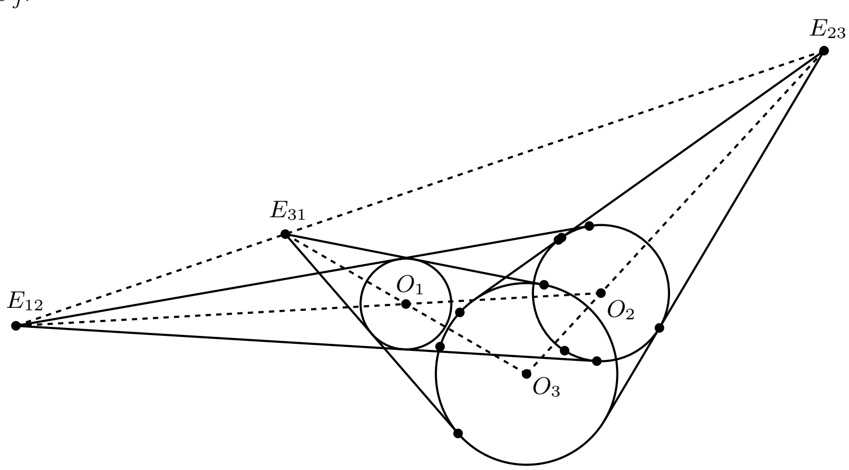


Análogamente obtenemos el resultado para las tangentes interiores. □

Finalmente, tenemos el siguiente teorema que relaciona los centros de homotecia de varias parejas de círculos.

Teorema [Monge]. Sean Γ_1, Γ_2 y Γ_3 circunferencias con centros y radios distintos. Entonces, los centros de homotecia exteriores de las parejas de circunferencias (Γ_1, Γ_2), (Γ_2, Γ_3) y (Γ_3, Γ_1) son colineales.

Demostración. Sean O_i y r_i ($i = 1, 2, 3$), los centros y radios de Γ_1, Γ_2 y Γ_3 respectivamente. Sea E_{ij} el centro de homotecia exterior de Γ_i y Γ_j, el cual está en la recta O_iO_j.



Entonces,

$$\frac{O_1E_{12}}{E_{12}O_2} \cdot \frac{O_2E_{23}}{E_{23}O_3} \cdot \frac{O_3E_{31}}{E_{31}O_1} = \left(-\frac{r_1}{r_2}\right)\left(-\frac{r_2}{r_3}\right)\left(-\frac{r_3}{r_1}\right) = -1.$$

Por el teorema de Menelao, concluimos que E_{12}, E_{23} y E_{31} son colineales. $\square$

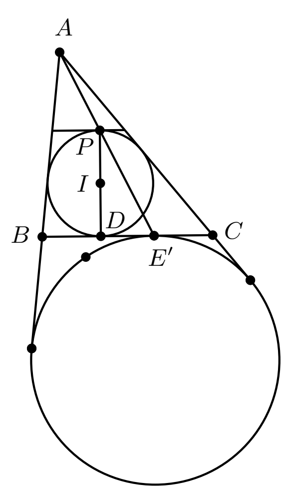
El teorema anterior tiene una versión que involucra también a los centros de homotecia interiores. La demostración es análoga a la del teorema anterior, por lo que la omitimos.

Teorema [Monge-dÁlembert]. Sean Γ_1, Γ_2 y Γ_3 circunferencias con centros y radios distintos. Entonces, el centro de homotecia interior de Γ_1 y Γ_2, el centro de homotecia interior de Γ_1 y Γ_3, y el centro de homotecia exterior de Γ_2 y Γ_3 son colineales.

Ahora que tenemos estas herramientas potentes de homotecia en círculos, podemos usarlas para resolver problemas. Comenzamos con uno de los resultados más populares dentro de la geometría de olimpiada.

Ejemplo 2. Sea ABC un triángulo con incentro I. El incírculo y el excírculo opuesto a A son tangentes a BC en los puntos D y E, respectivamente. P es un punto en el incírculo tal que DP es un diámetro del mismo. Demostrar que los puntos A, P y E son colineales.

Solución. La observación crucial es que A es el centro de homotecia exterior del incírculo del triángulo ABC y su excírculo opuesto a A, pues es la intersección de sus tangentes interiores comunes.



Sea E' la imagen de P bajo esta homotecia y consideremos la tangente al incírculo en P. Esta es perpendicular a IP, por lo que es paralela a BC, y al aplicar la homotecia se vuelve una recta paralela a BC, que debe ser tangente al excírculo del triángulo ABC

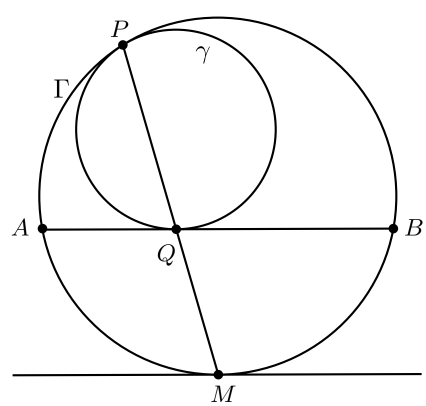
en E'. Como la recta BC es paralela a esta recta y tangente al excírculo, concluimos que la homotecia debe llevar la tangente al incírculo en P a BC, por lo que $E' = E$ y A, P y E son colineales.

Este resultado tiene una versión análoga si consideramos un diámetro del excírculo en vez del incírculo: La recta AD pasa por el punto diametralmente opuesto a E en el excírculo. Una consecuencia interesante de este resultado es la siguiente: Si X es el pie de la altura desde A, entonces EI pasa por el punto medio de AX. Esto pasa ya que I es el punto medio de DP y las rectas AX y PD son paralelas.

Un caso muy especial en el que aparecen homotecias es cuando dos circunferencias son tangentes. Entonces, el punto de tangencia es uno de los centros de homotecia entre estas dos circunferencias, pues satisface que la razón entre las distancias de este a los centros, es igual a la razón entre sus radios. Entonces, cuando trazamos dos rectas por estos puntos de tangencia, estas determinan cuerdas paralelas en los dos círculos. El "límite" cuando acercamos estas rectas nos da el siguiente resultado interesante.

Ejemplo 3. Sean Γ una circunferencia y γ otra circunferencia contenida en Γ y tangente interiormente a Γ en un punto P. Una cuerda AB de Γ es tangente a γ en Q. Demostrar que PQ pasa por el punto medio del arco $\widehat{AB}$ de Γ que no contiene a P.

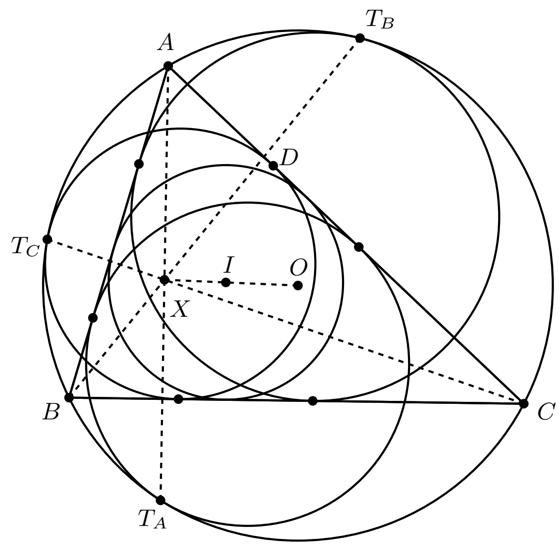
Solución. Observemos que P es el centro de homotecia exterior de γ y Γ, por lo que esta homotecia lleva Q a la segunda intersección M de PQ con Γ. Por lo tanto, esta homotecia lleva la tangente a γ en Q a la tangente a Γ en M, por lo que esta segunda tangente es paralela a la tangente a γ en Q, que es AB. Como la tangente a Γ en M es paralela a AB, concluimos que M es el punto medio del arco $\widehat{AB}$ que no contiene a P.



En el siguiente ejemplo demostramos una concurrencia relacionada con ciertos círculos tangentes al circuncírculo de un triángulo.

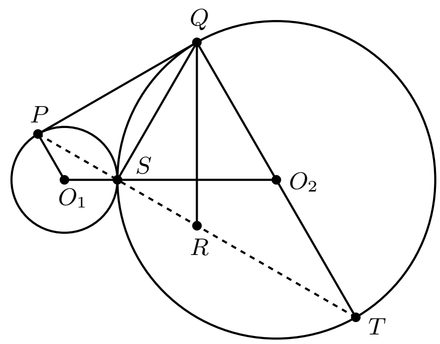
Ejemplo 4. Sean ABC un triángulo, O e I su circuncentro e incentro respectivamente, y Γ su circuncírculo. Una circunferencia Γ_A es tangente a AB y a AC, y es tangente interiormente a Γ en un punto T_A. Análogamente definimos los puntos T_B y T_C. Demostrar que las rectas AT_A, BT_B, CT_C y OI concurren.

Solución. Sea γ el incírculo de ABC. Observemos que A es el centro de homotecia exterior de los círculos γ y Γ_A, mientras que T_A es el centro de homotecia exterior de Γ_A y Γ. Por el Teorema de Monge, estos dos puntos y el centro de homotecia exterior de γ y Γ son colineales. Por lo tanto, las rectas AT_A, BT_B y CT_C pasan todas por este centro de homotecia y, OI también pasa por esta recta, pues O e I son los centros de Γ y γ, respectivamente. Por lo tanto, las cuatro rectas concurren en el centro de homotecia exterior del incírculo y el circuncírculo.



Ejemplo 5 (Olimpiada Mexicana de Matemáticas, 2016). Sean C_1 y C_2 dos circunferencias tangentes externamente en S de tal forma que el radio de C_2 es el triple del radio de C_1. Una recta tangente a ambos círculos toca a C_1 en $P \neq S$ y a C_2 en $Q \neq S$. Sea T un punto en C_2 tal que QT es diámetro de C_2. La bisectriz del ángulo $\angle SQT$ corta a ST en R. Demostrar que $QR = RT$.

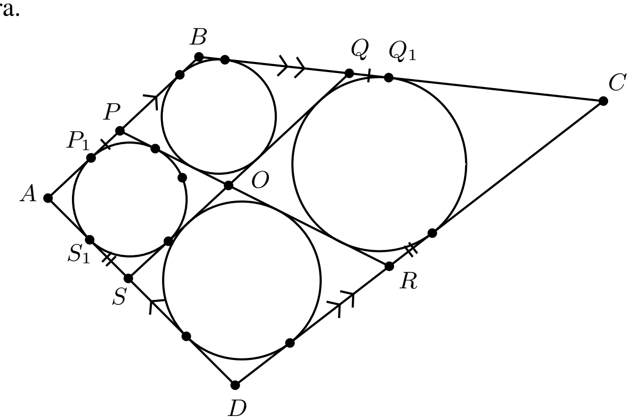
Solución. Sean O_1 y O_2 los centros de C_1 y C_2, de radios r_1 y $r_2 = 3r_1$, respectivamente. Notemos que O_1P y O_2Q son ambas perpendiculares a PQ y, por lo tanto, son paralelas. Sea P' la imagen de T bajo la homotecia con razón negativa que manda C_2 a C_1. Claramente, S es el centro de esta homotecia y esta también manda TO_2S a $P'O_1S$. Por el Teorema 1, P' se encuentra en la recta por O_1 paralela a O_2T, es decir, en O_1P. Claramente, P es una de estas dos intersecciones de O_1P con C_1 y, la otra intersección, digamos P'', se encuentra del lado contrario a P con respecto de la recta O_1O_2, esto es, del mismo lado de T. Pero si P' fuera P'', la recta $P'T$ no pasaría por S. Luego, la única posibilidad es $P' = P$.



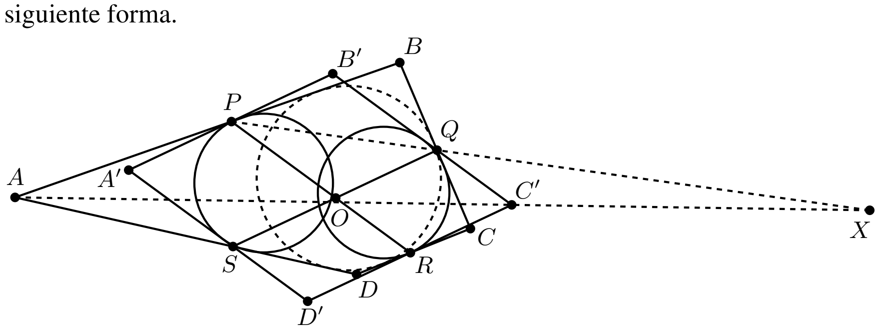
Luego, por el Teorema 4, $\frac{PS}{ST} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{3}$. Hagamos $PS = x$ y $ST = 3x$. Además, P, S, T son colineales y, por lo tanto, $\angle PSQ = 180° - \angle QST = 90°$. Más aún, por la tangencia de PQ a C_2, tenemos que $\angle PQS = \angle QTS$. Luego, los triángulos PQS y QTS son semejantes, de donde $\frac{PS}{QS} = \frac{QS}{ST}$, esto es, $QS^2 = PS \cdot ST = 3x^2$, por lo que $QS = \sqrt{3}x$. Finalmente, tenemos que $\angle QTS = \tan^{-1}\left(\frac{QS}{ST}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 30°$. Luego, $\angle SQT = 90° - \angle QTS = 60°$ y así $\angle RQT = \frac{1}{2}\angle SQT = 30°$, lo que significa que el triángulo RQT es isósceles con $QR = RT$.

Ejemplo 6 (Lista corta, Olimpiada Internacional, 2015). Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo y sean P, Q, R, y S puntos en los lados AB, BC, CD, y DA, respectivamente. Los segmentos PR y QS se cortan en O. Supongamos que cada uno de los cuadriláteros $APOS, BQOP, CROQ$ y $DSOR$ tiene un incírculo. Demostrar que las rectas AC, PQ y RS son concurrentes o bien paralelas entre sí.

Solución. Denotemos por γ_A, γ_B, γ_C y γ_D a los incírculos de los cuadriláteros $APOS$, $BQOP$, $CROQ$ y $DSOR$, respectivamente.
Comenzamos demostrando que el cuadrilátero $ABCD$ también tiene un incírculo, que será denotado por Ω. Denotemos a los puntos de tangencia como se muestra en la siguiente figura.



Es un hecho conocido que $QQ_1 = OO_1$ (si $BC \parallel PR$, esto es obvio; en otro caso, uno puede considerar a las dos circunferencias involucradas como el incírculo y el excírculo de un triángulo formado por las rectas OQ, PR y BC). Similarmente, tenemos que $OO_1 = PP_1$. Luego, $QQ_1 = PP_1$. Las otras igualdades de segmentos marcadas en la figura pueden demostrarse de forma similar. Estas igualdades, junto con $AP_1 = AS_1$ y sus análogas, muestran que $AB + CD = AD + BC$, por lo que $ABCD$ tiene un incírculo, como se quería.
Ahora, dibujemos las rectas paralelas a QS por P y R, y también dibujemos las rectas paralelas a PR por Q y S. Estas rectas forman un paralelogramo; denotamos sus vértices por A_1, B_1, C_1 y D_1, como se muestra en la figura de abajo. Como el cuadrilátero $APOS$ tiene un incírculo, tenemos que $AP - AS = OP - OS = A'S - A'P$. Es bien conocido que en este caso también existe una circunferencia ω_A tangente a los cuatro rayos AP, AS, $A'P$ y $A'S$. Vale la pena mencionar que, en este caso cuando, digamos, las rectas AB y $A'B'$ coinciden, la circunferencia ω_A es solamente tangente a AB en P. Definimos las circunferencias ω_B, ω_C, y ω_D de forma similar. Supongamos que las circunferencias ω_A y ω_C son de diferente radio. Sea X el centro de la homotecia de razón positiva que manda ω_A a ω_C. Ahora, por el teorema de Monge aplicado a los círculos ω_A, Ω y ω_C, tenemos que los puntos A, C, y X son colineales. Aplicando el mismo teorema a los círculos ω_A, ω_B y ω_C, obtenemos que también los puntos P, Q y X son colineales. Similarmente, los puntos R, S, y X son colineales, como se deseaba. Si el radio de los círculos ω_A y ω_C es el mismo, pero estos no coinciden, entonces la versión degenerada del mismo teorema muestra que las rectas AC, PQ y RS son paralelas a la línea por los centros de ω_A y ω_C.
Finalmente, dedicamos algunas palabras al caso en que ω_A y ω_C coinciden (y por lo tanto también coinciden con Ω, ω_B y ω_D). Puede ser manejado como un caso límite de la siguiente forma.

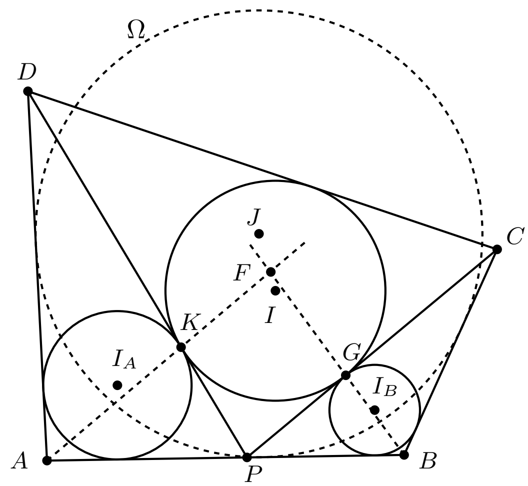


Fijemos las posiciones de A, P, O y S (por lo tanto también fijamos los círculos ω_A, γ_A, γ_B y γ_D). Ahora variamos el círculo γ_C inscrito en el triángulo QOR. Para cada una de sus posiciones, uno puede reconstruir las rectas BC y CD como las tangentes exteriores comunes a γ_B, γ_C y γ_C, γ_D diferentes de PR y QS, respectivamente. Después de tal variación, la circunferencia cambia, por lo que el resultado obtenido arriba puede ser aplicado.

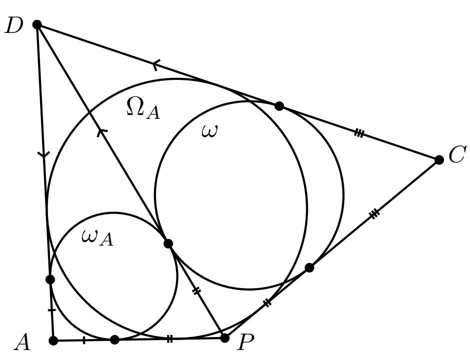
Ejemplo 7 (Lista corta, Olimpiada Internacional, 2007). El punto P está en el lado AB de un cuadrilátero convexo $ABCD$. Sea ω el incírculo del triángulo CPD y sea

I su incentro. Supongamos que ω es tangente a los incírculos de los triángulos APD y BPC en los puntos K y L, respectivamente. Sea E el punto de intersección de las rectas AC y BD, y sea F el punto de intersección de las rectas AK y BL. Demostrar que los puntos E, I y F son colineales.

Solución. Sea Ω la circunferencia tangente al segmento AB y a los rayos AD y BC; sea J su centro. Probaremos que los puntos E y F están en la recta IJ.



Denotemos a los incírculos de los triángulos ADP y BCP por ω_A y ω_B, respectivamente. Consideremos el centro de homotecia interior h_1 de ω y Ω. Consideremos también las siguientes homotecias: aquella que lleva ω a ω_A (con escala negativa y centro K), y otra que lleva ω_A a Ω (con escala positiva y centro A). Por el teorema de Monge-dÁlembert, el centro de h_1 yace en la recta AK. Análogamente, este yace en BL, así que este centro es F. Entonces, F está en la recta formada por los centros de ω y Ω, esto es, está en IJ (si $I = J$, entonces $F = I$ también, y la afirmación es obvia). Consideremos el cuadrilátero $APCD$ y marquemos los segmentos iguales de las tangentes a ω y ω_A como se muestra en la figura.



Como ω y ω_A tienen un punto de tangencia común con PD, podemos notar fácilmente que $AD + PC = AP + CD$. Por lo tanto, el cuadrilátero $APCD$ tiene un incírculo; análogamente, también tiene un incírculo el cuadrilátero $BCDP$. Sean Ω_A y Ω_B estos incírculos.
Ahora consideremos el centro de homotecia exterior h_2 de ω y Ω. Consideremos también las siguientes homotecias: aquella que lleva ω a Ω_A (con escala positiva y centro C), y aquella que lleva Ω_A a Ω (con escala positiva y centro A). Por el teorema de Monge, el centro de h_2 está en AC. Por razones análogas, también está en BD, por lo que este centro es E. Por lo tanto, E también está en la recta IJ, lo que prueba la afirmación.

Ejercicios

Concluimos el escrito con una lista de ejercicios que dejamos para que resuelva el lector.

1) (Reino Unido, 2014) Sean ABC un triángulo y P un punto en su interior. La recta AP corta al circuncírculo de ABC nuevamente en A'. Los puntos B' y C' se definen análogamente. Sea O_A el circuncentro de BCP. Los circuncentros O_B y O_C se definen análogamente. Sea O'_A el circuncentro de $B'C'P$. Los circuncentros O'_B y O'_C se definen análogamente. Demuestra que las rectas $O_AO'_A$, $O_BO'_B$ y $O_CO'_C$ concurren.

2) (Olimpiada Mexicana de Matemáticas, 2014) Sean Γ_1 una circunferencia y P un punto fuera de Γ_1. Las tangentes desde P a Γ_1 tocan a la circunferencia en los puntos A y B. Considera M el punto medio del segmento PA y Γ_2 la circunferencia que pasa por los puntos P, A y B. La recta BM interseca de nuevo a Γ_2 en el punto C, la recta CA interseca de nuevo a Γ_1 en el punto D, el segmento DB interseca de nuevo a Γ_2 en el punto E y la recta PE interseca a Γ_1 en el punto F (con E entre P y F). Demuestra que las rectas AF, BP y CE concurren.

3) (Olimpiada Mexicana de Matemáticas, 2015) Sea I el incentro de un triángulo acutángulo ABC. La recta AI corta por segunda vez al circuncírculo del triángulo BIC en E. Sean D el pie de la altura desde A sobre BC y J la reflexión de I con respecto a BC. Demuestra que los puntos D, J y E son colineales.

4) (Olimpiada Centroamericana, 2005) En el triángulo ABC sean P, Q y R los puntos de tangencia del incírculo en los lados AB, BC y AC, respectivamente. Sean L, M y N los pies de las alturas del triángulo PQR en PQ, QR y PR, respectivamente.

   a) Demuestra que las rectas AN, BL y CM se cortan en el mismo punto.

   b) Demuestra que este punto común está en la recta que pasa por el ortocentro y el circuncentro del triángulo PQR.

5) (Olimpiada Europea Femenil, 2016) Dos circunferencias ω_1 y ω_2 del mismo radio se cortan en dos puntos distintos X_1 y X_2. Sea ω una circunferencia tangente exteriormente a ω_1 en T_1 y tangente exteriormente a ω_2 en T_2. Demuestra que X_1T_1 y X_2T_2 se cortan en un punto sobre ω.

6) (Lista corta para la Olimpiada Internacional, 2006). Sea $ABCD$ un trapecio con lados paralelos $AB > CD$. Los puntos K y L se encuentran en los segmentos AB y CD respectivamente de tal forma que $\frac{AK}{KB} = \frac{DL}{LC}$. Supón que existen puntos P y Q en el segmento KL tales que

$$\angle APB = \angle BCD \quad \text{y} \quad \angle CQD = \angle ABC.$$

Demuestra que los puntos P, Q, B y C son concíclicos.

7) (Lista corta para la Olimpiada Internacional, 2007). Sea $ABCD$ un trapecio con lados paralelos AD y BC cuyas diagonales se cortan en P. Sea Q un punto ubicado entre las rectas paralelas BC y AD tal que P y Q están en distintos lados de la recta CD y $\angle AQD = \angle CQB$. Demuestra que $\angle BQP = \angle DAQ$.

8) (Brasil, 2014). Sea ABC un triángulo con incentro I e incírculo ω. La circunferencia ω_A es tangente exteriormente a ω y tangente a los lados AB y AC en A_1 y A_2, respectivamente. Sea r_A la recta A_1A_2. Análogamente se definen r_B y r_C. Sea XYZ el triángulo formado por r_A, r_B y r_C. Demuestra que el incentro de XYZ, el circuncentro de XYZ e I son colineales.

9) (Olimpiada Internacional, 2008). Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo con $BA \neq BC$. Sean ω_1 y ω_2 los incírculos de ABC y ADC, respectivamente. Supón que existe una circunferencia ω que es tangente al rayo BA más allá de A, al rayo BC más allá de C y a las rectas AD y CD. Demuestra que las tangentes comunes exteriores a ω_1 y ω_2 se cortan en ω.

Bibliografía

1) R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas, Instituto de Matemáticas, UNAM, 2004.

2) E. Chen. *Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads.* The Mathematical Association of America, Problem Book Series, 2016.

3) S. Lozanovski. *A Beautiful Journey Trough Olympiad Geometry.* `https://www.olympiadgeometry.com`

4) V. Prasolov. *Problems in Plane and Solid Geometry.*