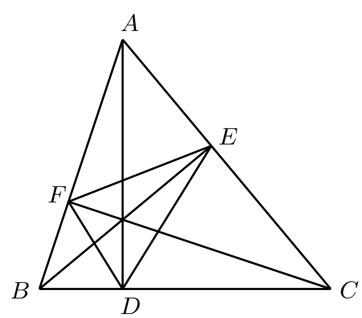
El triángulo órtico, el ortocentro y una cascada de curiosidades

Por José Antonio Gómez Ortega

Nivel Avanzado

Para un triángulo ABC su **triángulo órtico** es el que tiene por vértices a los pies de las alturas de ABC, esto es, si AD, BE y CF son las alturas del triángulo ABC con D, E y F sobre las rectas BC, CA y AB, respectivamente, entonces su triángulo órtico es DEF.



Algunas propiedades del triángulo órtico

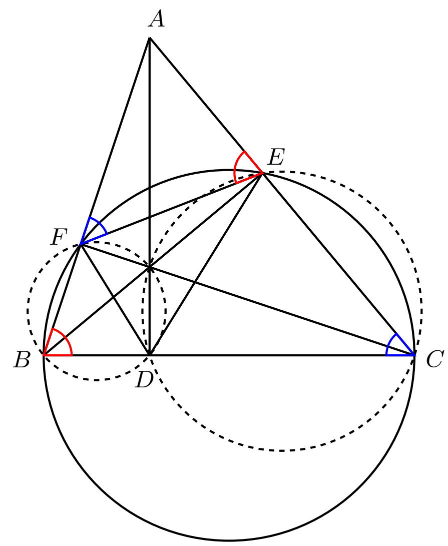
A continuación veremos una serie de propiedades que involucran al triángulo órtico de un triángulo.

Propiedad 1. Sea ABC un triángulo con ortocentro H. Los triángulos ABC, HBC, HCA y HAB tienen a DEF como triángulo órtico.

Demostración. Solamente hay que verificar en cada triángulo que los pies de las alturas son D, E y F. En el triángulo HBC los pies de las alturas desde B y C son, respectivamente, F y E, por lo que el triángulo órtico de HBC es DFE. Análogamente, para HCA y HAB sus triángulos órticos son EDF y FED, respectivamente. □

Propiedad 2. Sea ABC un triángulo y sea DEF su triángulo órtico. Entonces, los triángulos ABC, AEF, DBF y DEC son semejantes entre sí.

Demostración. Como el cuadrilátero $BCEF$ es cíclico, tenemos que $\angle AEF = \angle ABC$ y $\angle EFA = \angle ACB$, lo cual implica que los triángulos ABC y AEF son semejantes.



De manera análoga se prueba la semejanza de los triángulos ABC y DBF, así como la semejanza de los triángulos ABC y DEC. □

Propiedad 3. Sea ABC un triángulo con ortocentro H y sea DEF su triángulo órtico. Si el triángulo ABC es acutángulo, entonces H es el incentro de DEF. Si ABC es obtusángulo, entonces H es un excentro de DEF. En general, A, B, C y H son, en algún orden, los excentros e incentro del triángulo DEF.

Demostración. Como los cuadriláteros $HDCE$, $BCEF$ y $HFBD$ son cíclicos, tenemos que DH es bisectriz del ángulo $\angle D$. Además, tenemos que A, B, C y H cumplen que cada uno de ellos es el ortocentro de los otros tres. □

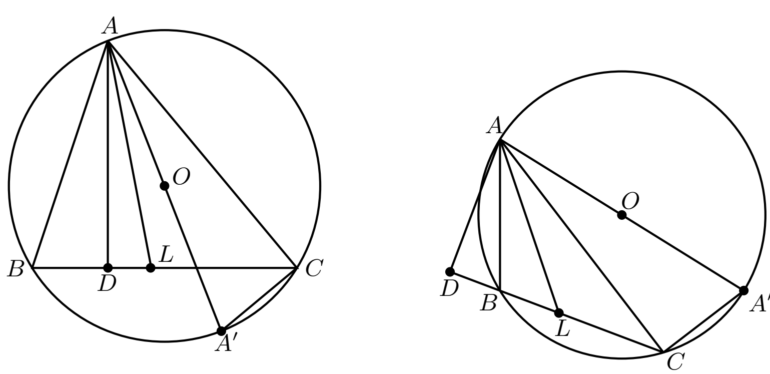
Propiedad 4. (Euler) Sean ABC un triángulo y DEF su triángulo órtico. El circuncentro del triángulo DEF es el centro de la circunferencia de los nueve puntos y es el punto medio de HO, donde H y O son el ortocentro y circuncentro del triángulo ABC, respectivamente.

Demostración. Existen varias pruebas de esta afirmación, la que se presenta a continuación usa potencia de un punto con respecto a una circunferencia y ejes radicales. Como $BCEF$ es un cuadrilátero cíclico, la potencia de A con respecto a la circunferencia circunscrita a tal cuadrilátero es $AF\cdot AB = AE\cdot AC$. Luego, $AF\cdot AC' = AE\cdot AB'$ donde B' y C' son los puntos medios de CA y AB, respectivamente. Por lo tanto, F, C', E y B' se encuentran sobre una misma circunferencia, digamos $\mathcal{C}_A$. Análogamente, D, A', F y C' están sobre una circunferencia $\mathcal{C}_B$ y también D, A', E y B' están sobre una circunferencia $\mathcal{C}_C$. Si dos de estas tres circunferencias coinciden, entonces las tres coinciden. Pero si no, los ejes radicales por pares de estas tres circunferencias son los lados del triángulo ABC. Luego, los tres ejes no son concurrentes, lo que es una contradicción. Por lo tanto, los seis puntos D, E, F, A', B' y C' se encuentran sobre una circunferencia $\mathcal{N}$. Aplicando lo anterior al triángulo HBC, se tiene también que los puntos medios de HB y HC son también parte la circunferencia $\mathcal{N}$. Una vez más aplicando el razonamiento a HCA, se obtiene que el punto medio de HA está sobre la circunferencia $\mathcal{N}$, luego en tal circunferencia están los siguientes 9 puntos: los pies de las alturas, los puntos medios de los lados y los puntos medios de los segmentos HA, HB y HC. Euler también notó que el ortocentro H, el centroide G y el circuncentro O de un triángulo ABC son colineales y que $HG = 2GO$. Para el triángulo medial $A'B'C'$ se tiene que su ortocentro es O, su centroide es G y su circuncentro es otro punto que está alineado con O y G, que usualmente se denota por N y, como cumple $OG = 2GN$, no es difícil concluir que N es el punto medio de HO. □

Propiedad 5. Sean ABC un triángulo y DEF su triángulo órtico. Las perpendiculares desde A, B y C a los lados EF, FD y DE, respectivamente, concurren en el circuncentro del triángulo ABC.

Demostración. Comenzamos demostrando los siguientes dos resultados.

Lema 1. La bisectriz interna del ángulo $\angle BAC$ del triángulo ABC, es también la bisectriz del ángulo que forman la altura AD y el diámetro AA' del circuncírculo de ABC.



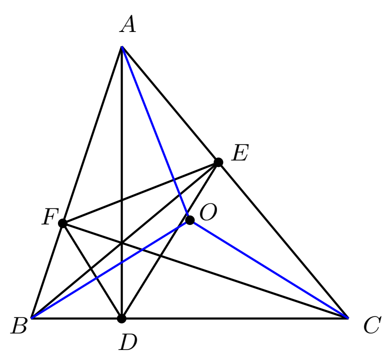
Demostración. Sea L el pie de la bisectriz del ángulo $\angle BAC$ sobre el segmento BC. En los triángulos rectángulos ABD y $AA'C$, tenemos que $\angle DBA = \angle CA'A$. Luego, estos triángulos son semejantes, por lo que $\angle BAD = \angle A'AC$. Por lo tanto, AL es bisectriz del ángulo $\angle DAA'$ si y solo si AL es bisectriz del ángulo $\angle BAC$. $\square$

Lema 2. Con la notación del Lema 1, tenemos que $\angle DAA' = |\angle B - \angle C|$.
Demostración. Supongamos que $\angle B \geq \angle C$. Como $\angle DAO + 2(90° - \angle B) = \angle A$, tenemos que $\angle DAO = \angle A + 2\angle B - (\angle A + \angle B + \angle C) = \angle B - \angle C$.
De manera análoga se prueba el caso $\angle B \leq \angle C$. $\square$

Continuemos con la demostración de la Propiedad 5. La perpendicular desde A a EF es la altura AD' desde A en el triángulo AEF, pero este triángulo es semejante al triángulo ABC. Luego, el ángulo entre la altura AD' con el lado AE es igual al ángulo entre la altura AD y el lado AB del triángulo ABC. Ahora, usando el Lema 1, se sigue que AD' deberá pasar por O, el circuncentro del triángulo ABC. $\square$

Propiedad 6. El área del triángulo ABC es igual a Rs, donde R es el circunradio del triángulo ABC y s es el semiperímetro de su triángulo órtico DEF.

Demostración.



Tenemos que

$$(ABC) = (OEAF) + (OFBD) + (ODCE) = \frac{R}{2} \cdot EF + \frac{R}{2} \cdot FD + \frac{R}{2} \cdot DE$$
$$= \frac{R}{2}(EF + FD + DE) = Rs.$$

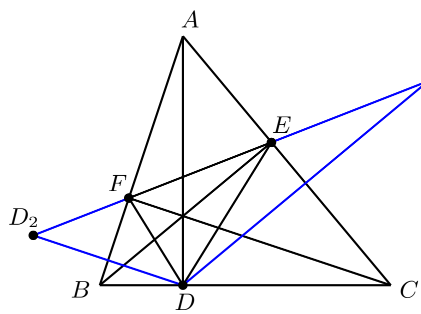
$\square$

Propiedad 7. Sean ABC un triángulo y DEF su triángulo órtico. El triángulo formado por las tangentes al circuncírculo del triángulo ABC en los vértices, es semejante al triángulo DEF.

Demostración. La tangente por A al circuncírculo del triángulo ABC, es perpendicular al radio AO. Por otro lado por la Propiedad 5, este radio es también perpendicular a EF. Luego, la tangente en A y EF son paralelas. Análogamente, las tangentes en B y C son paralelas a FD y DE, respectivamente. El resultado es inmediato. $\square$

Propiedad 8. Sean ABC un triángulo y DEF su triángulo órtico. Si D_1 y D_2 son las reflexiones de D sobre CA y AB, respectivamente, entonces D_1, D_2, E y F son colineales.

Demostración. Por la Propiedad 2, tenemos que $\angle AEF = \angle DEC$ y por ser D_1 el reflejado de D, tenemos que $\angle DEC = \angle CED_1$. Estas dos igualdades implican que $\angle AEF = \angle CED_1$, lo que significa que D_1, E y F son colineales.



Análogamente, obtenemos que D_2, E y F también son colineales. $\square$

Propiedad 9. Sean ABC un triángulo y DEF su triángulo órtico. Si D_1 y D_2 son las reflexiones de D sobre CA y AB, respectivamente, entonces:

a) D_1D_2 es igual al perímetro de DEF.

b) $D_1D_2 = 2AD \operatorname{sen} A$.

c) $D_1D_2 = \frac{8(ABC)^2}{abc}$.

Demostración.

a) Se sigue de que $D_1E = DE$ y $FD_2 = DF$.

b) Notemos que la circunferencia de centro A y radio AD pasa por D_1 y D_2. Además, tenemos que $\angle D_2AD_1 = 2\angle A$. Luego, $\operatorname{sen} \angle A = \frac{\frac{D_1D_2}{2}}{AD}$.

c) Tenemos que $D_1D_2 = 2AD \operatorname{sen} A = 2\frac{a \cdot AD}{a}\frac{bc \cdot \operatorname{sen} A}{bc} = \frac{8(ABC)^2}{abc}$.

$\square$

Propiedad 10. Sean ABC un triángulo y DEF su triángulo órtico. Los perímetros de ABC y DEF están relacionados de la siguiente manera

$$p(DEF) = \frac{r}{R}p(ABC),$$

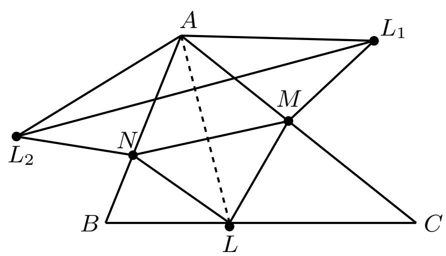
donde r y R son el inradio y circunradio del triángulo ABC, respectivamente.

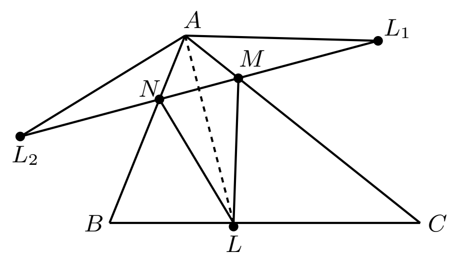
Demostración. Por la Propiedad 6, tenemos que $p(DEF) = \frac{2(ABC)}{R} = \frac{rp(ABC)}{R}$. $\square$

Propiedad 11. (Fagnano) De los triángulos inscritos dentro de un triángulo acutángulo, el órtico es el de menor perímetro.

Demostración (Fejer). Sea LMN un triángulo inscrito en un triángulo ABC. Sean L_1 y L_2 las reflexiones de L sobre los lados CA y AB, respectivamente. Es claro que $LM = ML_1$ y $L_2N = NL$. Por lo que el perímetro del triángulo LMN es

$$LM + MN + NL = L_2N + NM + ML_1 \geq L_1L_2.$$





De lo anterior podemos asegurar que una vez fijado el punto L, los puntos M y N que hacen mínimo el perímetro de LMN son las intersecciones de L_1L_2 con CA y AB, respectivamente. Ahora veamos cuál es la mejor opción para el punto L. Ya sabemos que el perímetro del triángulo LMN es L_1L_2, así que el punto L deberá hacer esta cantidad mínima.
Es claro que $AL = AL_1 = AL_2$ y que AC y AB son bisectrices de los ángulos $\angle LAL_1$ y $\angle L_2AL$, respectivamente, por lo que $\angle L_2AL_1 = 2\angle BAC = 2\alpha$ es un ángulo fijo. La ley de los cosenos aplicada en el triángulo AL_2L_1 nos garantiza que:

$$(L_1L_2)^2 = (AL_1)^2 + (AL_2)^2 - 2AL_1 \cdot AL_2 \cos 2\alpha = 2AL^2(1 - \cos 2\alpha).$$

Así, L_1L_2 es mínimo cuando AL es la altura desde A del triángulo ABC. No es difícil ver que cuando AL es altura, los puntos M y N son los pies de las otras alturas[2]. Luego, el triángulo de perímetro mínimo es el órtico. $\square$

Propiedad 12. Sean ABC un triángulo y DEF su triángulo órtico. Si D', E' y F' son los puntos medios de EF, FD y DE, respectivamente y, si L, M y N son los pies de las perpendiculares desde D', E' y F' sobre BC, CA y AB, respectivamente, entonces

a) $D'L$, $E'M$ y $F'N$ son concurrentes.

b) AD', BE' y CF' son concurrentes.

[2] Los triángulos AL_2L_1 y ALL_1 son isósceles. Si $\beta = \angle AML_2 = \angle L_1MC$, tenemos que $\angle ML_1L = 90° - \beta$ y, como $\angle ALL_1 = \angle LCA = \angle C$, tenemos que $\angle C = (90° - \angle A) + (90° - \beta) = 180° - \angle A - \beta$, luego $\beta = 180° - \angle A - \angle C = \angle B$. Ahora podemos ver que el cuadrilátero $ABLM$ es cíclico y, como AL es perpendicular a BL, tenemos que BM es perpendicular a MA y, por consiguiente, BM es altura. Análogamente se prueba que CN es altura.

Demostración.

a) Bastará mostrar que $D'L$, $E'M$ y $F'N$ son bisectrices de los ángulos del triángulo $D'E'F'$. Esto es consecuencia de que las alturas AD, BE y CF son paralelas a $D'L$, $E'M$ y $F'N$, respectivamente y, que el triángulo $D'E'F'$ tiene lados paralelos a los del triángulo DEF.

b) Si L es el punto donde AD' corta a BC, tenemos por el teorema generalizado de la bisectriz que, $\frac{BL}{LC} = \frac{AB \operatorname{sen} \angle FAL}{CA \operatorname{sen} \angle LAC}$. Este mismo teorema aplicado en el triángulo AFE, nos garantiza que $1 = \frac{FD'}{D'E} = \frac{AF \operatorname{sen} \angle FAL}{EA \operatorname{sen} \angle LAC}$. Las dos igualdades implican que $\frac{BL}{LC} = \frac{AB \cdot EA}{CA \cdot AF}$. Análogamente, obtenemos que $\frac{CM}{MA} = \frac{BC \cdot FB}{AB \cdot BD}$ y $\frac{AN}{NB} = \frac{CA \cdot DC}{BC \cdot CE}$. El resultado se sigue por el teorema de Ceva. $\square$

Observación. La demostración de la Propiedad 12 funciona para ver que AD', BE' y CF' son concurrentes en el caso en que tanto AD, BE, CF como DD', EE', FF' son dos ternas de cevianas que concurren.

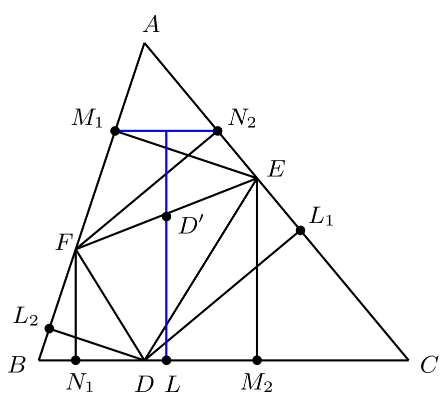
Propiedad 13. (Circunferencia de Taylor) Sean ABC un triángulo y DEF su triángulo órtico. Sean L_1 y L_2 las proyecciones de D sobre CA y AB, respectivamente; M_1 y M_2 las proyecciones de E sobre AB y BC, respectivamente; N_1 y N_2 las proyecciones de F sobre BC y CA, respectivamente. Entonces,

a) $M_1N_2 \parallel BC$, $N_1L_2 \parallel CA$ y $L_1M_2 \parallel AB$.

b) Los puntos L_1, L_2, M_1, M_2, N_1 y N_2 están sobre una misma circunferencia, llamada **circunferencia de Taylor**. Su centro es el incentro del triángulo medial del triángulo órtico DEF.

Demostración.

a) Como $BCEF$ y FEN_2M_1 son cuadriláteros cíclicos, tenemos que BC y M_1N_2 son paralelas. De manera análoga se prueba que $N_1L_2 \parallel CA$ y $L_1M_2 \parallel AB$.



b) Como FEN_2M_1 está inscrito en una circunferencia de diámetro EF, la mediatriz de M_1N_2 pasa por D' el punto medio de EF. Pero M_1N_2 es paralela a BC, por lo que la mediatriz de M_1N_2 corta a BC perpendicularmente en L, el mismo punto del problema anterior. Luego, las mediatrices de M_1N_2, L_1M_2 y N_1L_2 son concurrentes en el mismo punto de la parte a) del problema anterior, denotémoslo por I'. Notemos que $D'L$ es también mediatriz de N_1M_2, pues EFN_1M_2 es un trapecio con $FN_1 \parallel EM_2 \parallel D'L$ y D' es punto medio de EF. Luego, N_1 y M_2 son equidistantes desde el punto I', lo que significa que los puntos L_1, L_2, M_1, M_2 y N_1, N_2 están en una circunferencia de centro I'. De la demostración de la Propiedad 12-a), concluimos que el punto I' es el incentro del triángulo medial de DEF, esto es, I' es el incentro del triángulo $D'E'F'$. □

Propiedad 14. En un triángulo acutángulo ABC, si D, E, F, P, Q, R son los pies de las perpendiculares desde A, B, C, A, B, C sobre BC, CA, AB, EF, FD, DE, respectivamente, entonces se cumple que $(ABC)(PQR) = (DEF)^2$, donde (XYZ) denota el área del triángulo XYZ.

Demostración. Comenzamos demostrando el siguiente resultado.

Lema. Si L, M y N son puntos sobre los lados BC, CA y AB de un triángulo ABC tales que $\frac{BL}{LC} = p$, $\frac{CM}{MA} = q$ y $\frac{AN}{NB} = r$, entonces

$$(LMN) = (ABC) \cdot \frac{1 + pqr}{(p+1)(q+1)(r+1)}.$$

Demostración. Si $\frac{BL}{LC} = p$, entonces $\frac{BC}{LC} = \frac{BL}{LC} + \frac{LC}{LC} = p + 1$, por lo que $LC = \frac{1}{p+1}BC$ y, por consiguiente, $BL = BC - LC = (1 - \frac{1}{p+1})BC$.
Análogamente, obtenemos que $MA = \frac{1}{q+1}CA$, $CM = (1 - \frac{1}{q+1})CA$, $NB = \frac{1}{r+1}AB$ y $AN = (1 - \frac{1}{r+1})AB$.
Si hacemos $x = \frac{1}{p+1}$, $y = \frac{1}{q+1}$ y $z = \frac{1}{r+1}$, obtenemos que $\frac{(ANM)}{(ABC)} = y(1-z)$, $\frac{(BLN)}{(ABC)} = x(1-y)$ y $\frac{(CML)}{(ABC)} = z(1-x)$, lo cual implica que

$$\begin{aligned}
(LMN) =& (ABC) - (ANM) - (BLN) - (CML) \\
=& (ABC)[1 - y(1-z) - x(1-y) - z(1-x)] \\
=& (ABC)[1 - (x+y+z) + (xy+yz+zx)] \\
=& (ABC)[xyz + (1-x)(1-y)(1-z)] \\
=& (ABC) \cdot \frac{1+pqr}{(p+1)(q+1)(r+1)}.
\end{aligned}$$

□

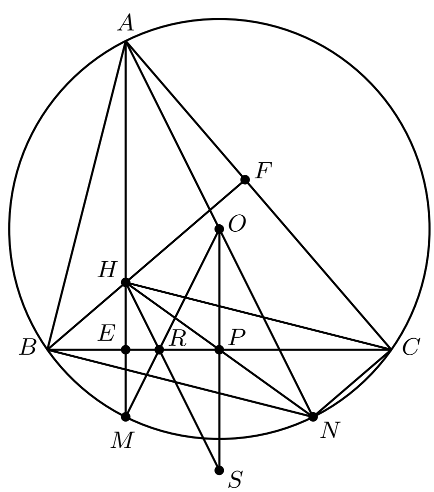
Continuemos con la demostración de la Propiedad 14. Como los triángulos ABC y AEF son semejantes, tenemos que $\frac{BD}{DC} = \frac{EP}{PF} = p$. Análogamente, tenemos que $\frac{CE}{EA} = \frac{FQ}{QD} = q$ y $\frac{AF}{FB} = \frac{DR}{RE} = r$. Por el lema anterior, tenemos que $(DEF) = (ABC) \cdot \frac{1+pqr}{(p+1)(q+1)(r+1)}$ y $(PQR) = (DEF) \cdot \frac{1+pqr}{(p+1)(q+1)(r+1)}$. Estas dos últimas igualdades implican que $(ABC)(PQR) = (DEF)^2$. □

Problemas de Olimpiadas de Matemáticas

A continuación veremos algunos ejemplos de problemas de olimpiadas de matemáticas que involucran al triángulo órtico.

Ejemplo 1. (XII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas, 1997). En un triángulo ABC sean AE y BF dos alturas y sea H el ortocentro. La recta simétrica de AE respecto de la bisectriz (interior) del ángulo en A y la recta simétrica de BF respecto de la bisectriz del ángulo en B, se intersecan en un punto O. Las rectas AE y AO cortan por segunda vez a la circunferencia circunscrita del triángulo ABC en los puntos M y N, respectivamente. Sean P la intersección de BC con HN, R la intersección de BC con OM y S la intersección de HR con OP. Demostrar que $AHSO$ es un paralelogramo.

Solución. Como $\alpha = \angle BAH = \angle OAC$ y $\angle ABC = \angle ANC$, tenemos que el triángulo ABE es semejante al triángulo ANC. Así que $\angle ACN = 90°$, de donde AN es un diámetro del circuncírculo del triángulo ABC. Análogamente, obtenemos que la simétrica de BF respecto a la bisectriz de B, es un diámetro por lo que el punto de intersección O es el circuncentro. Como BH y NC son perpendiculares a CA, tenemos que BH y NC son paralelas. También como BN y CH son perpendiculares a AB, tenemos que HC y BN son paralelas y, por consiguiente, el cuadrilátero $HBNC$ es un paralelogramo.



Ahora, como las diagonales de un paralelogramo se intersecan en su punto medio, tenemos que $BP = PC$, lo cual implica que OP es la mediatriz de BC. Luego, OP es perpendicular a BC y AH es paralela a OP. Sea $\beta = \angle MAN$. Como, $\angle HBE = \angle EBM = \alpha + \beta$, los triángulos rectángulos BEH y BEM son congruentes, por lo que $HE = EM$. Luego, son congruentes HER y MER, lo mismo que OPR y SPR. Luego, $OP = PS$. Es conocido que $AH = 2OP$, por lo que $AH = OS$. Esto último y el que AH sea paralela a OS nos garantizan que $AHSO$ es un paralelogramo.

Ejemplo 2. (XIV Olimpiada iberoamericana de matemáticas, 1999). Un triángulo acutángulo ABC está inscrito en una circunferencia de centro O. Las alturas son AD, BE y CF. La recta EF corta a la circunferencia en P y Q.

a) Prueba que OA es perpendicular a PQ.

b) Si M es el punto medio de BC, muestra que $AP^2 = 2AD \cdot OM$.

Solución.

a) Se sigue de la Propiedad 5.

b) Sea T la intersección de PQ con el diámetro AA'. En el triángulo rectángulo APA', tenemos que PT es altura, por lo que los triángulos rectángulos APA' y ATP son semejantes. Luego, $\frac{AP}{AT} = \frac{AA'}{AP}$, por lo que,

$$AP^2 = 2R \cdot AT. \tag{1}$$

Como los triángulos ABC y AEF son semejantes y AT es altura en AEF, tenemos que

$$\frac{AT}{AD} = \frac{AF}{AC} = \cos \angle A. \tag{2}$$

Pero en el triángulo OBM, tenemos que $\angle BOM = \angle A$. Luego,

$$\cos \angle A = \frac{OM}{R}. \tag{3}$$

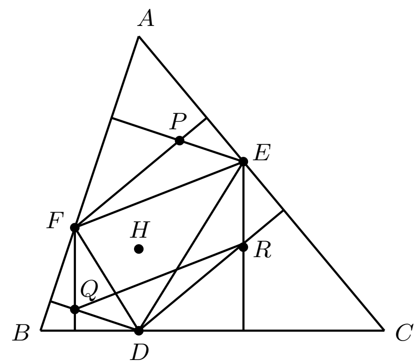
Por lo tanto, de (1), (2) y (3), se sigue que

$$AP^2 = 2R \cdot AT = 2R \cdot AD \cos \angle A = 2AD \cdot OM.$$

Ejemplo 3. (Lista corta de la 4ª Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe, 2002). Sea ABC un triángulo acutángulo y sean D, E y F los pies de las alturas desde A, B y C, respectivamente. Si P, Q y R son los ortocentros de los triángulos AFE, BDF y CED, respectivamente, demuestra que el ortocentro del triángulo PQR es el circuncentro del triángulo ABC.

Solución. Sea O el circuncentro del triángulo ABC. Demostraremos que AP, BQ y CR son las alturas del triángulo PQR y que concurren en O. Para ver que AP es perpendicular a QR, bastará ver QR es paralela a EF. Pero tanto ER como FQ son perpendiculares a BC, por lo que ER y FQ son paralelas. Si probamos que $ER = FQ$, tendremos que $EFQR$ es un paralelogramo, por lo que EF será paralela a QR.
Como $AFDC$ es cíclico, tenemos que $\angle BDF = \angle BAC$. Por lo tanto, los triángulos BDF y BAC son semejantes. Si H es el ortocentro del triángulo ABC, los segmentos FQ y CH se corresponden en los triángulos semejantes BDF y BAC, por lo que $\frac{FQ}{CH} = \frac{BF}{BC}$, esto es, $FQ = \frac{BF \cdot CH}{BC}$. Análogamente, son semejantes los triángulos CDE y CAB, de donde obtenemos que $ER = \frac{EC \cdot BH}{BC}$. Para ver que $ER = FQ$, solo

faltaría ver que $BF \cdot CH = EC \cdot BH$, pero esto es equivalente a $\frac{BF}{BH} = \frac{EC}{CH}$, que se sigue de la semejanza de los triángulos BHF y CHE.



Por último, nos falta ver que AP, BQ y CR pasan por O. Como AP es altura del triángulo AFE, tenemos que $\angle PAC = 90° - \angle ABC$, donde la última igualdad se sigue de que $BFEC$ es cíclico. Por otro lado, el triángulo AOC es isósceles y $180° - \angle AOC = 2\angle OAC$. Luego, $\angle OAC = 90° - \angle ABC = \angle PAC$, lo cual implica que AP y AO son la misma recta. Esto muestra que AP pasa por O. De manera análoga se prueba que BQ y CR pasan por O.
Otra manera de ver que $EFQR$ es un paraleogramo es como sigue: FQ y HD son paralelas, ya que son perpendiculares a BC. También HF y QD son paralelas, por ser perpendiculares a AB. Luego, $HFQD$ es un paralelogramo, por lo que $FQ = HD$. Análogamente, obtenemos que $EHDR$ es un paralelogramo, por lo que $ER = HD$. Por lo tanto, $EFQR$ es un paralelogramo.

Ejemplo 4. (7ª Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe, 2005). En el triángulo ABC sean P, Q y R los puntos de tangencia del incírculo con los lados AB, BC y CA, respectivamente. Sean L, M y N los pies de las alturas del triángulo PQR sobre PQ, QR y RP, respectivamente.

a) Muestra que las rectas AN, BL y CM se cortan en el mismo punto.

b) Muestra que este punto común está en la recta que pasa por el ortocentro y el circuncentro del triángulo PQR.

Solución.

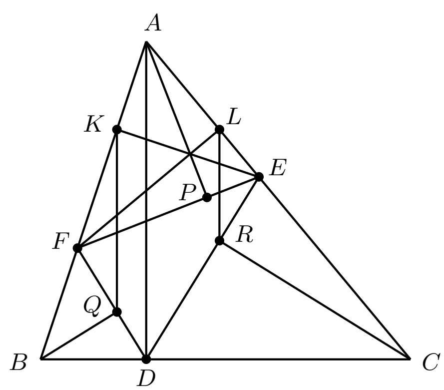
a) Una primera forma de ver la concurrencia es notando que los triángulos ABC y NLM son de lados paralelos (por ejemplo AB y QR son antiparalelas con respecto a PQ y RP, lo mismo que LN y RQ). Luego, son homotéticos, por lo que AN, BL y CM son concurrentes.
Otra forma de probar la concurrencia es la siguiente: Sean N', L' y M' las intersecciones de AN, BL y CM con BC, CA y AB, respectivamente. El teorema generalizado de la bisectriz, aplicado a AN' en el triángulo ABC y a AN en el triángulo APR nos garantiza que $\frac{BN'}{N'C} = \frac{AB \operatorname{sen} \angle PAN}{CA \operatorname{sen} \angle NAR}$ y $\frac{PN}{NR} = \frac{AP \operatorname{sen} \angle PAN}{RA \operatorname{sen} \angle NAR}$. Luego, las dos igualdades anteriores implican que $\frac{BN'}{N'C} = \frac{AB}{CA}\frac{RA}{AP}\frac{PN}{NR}$. En forma

análoga, obtenemos que $\frac{CL'}{L'A} = \frac{BC}{AB}\frac{PB}{BQ}\frac{QL}{LP}$ y $\frac{AM'}{M'B} = \frac{CA}{BC}\frac{QC}{RC}\frac{RM}{MQ}$. Por lo tanto, $\frac{BN'}{N'C}\frac{CL'}{L'A}\frac{AM'}{M'B} = 1$ y, por el teorema de Ceva, concluimos que AN, BL y CM son concurrentes.

b) Primero recordemos que ABC y NLM son triángulos de lados paralelos, luego son homotéticos desde el punto común de AN, BL y CM. Este punto común K es también el centro de homotecia de los incírculos de los triángulos ABC y NLM. Sabemos que si I y I_1 son los incentros de tales circunferencias, entonces K, I e I_1 son colineales. Pero el incentro del triángulo ABC es el circuncentro O_t del triángulo PQR y, el incentro H_t del triángulo LMN, es el ortocentro del triángulo PQR. Por lo tanto, estos tres puntos $I = O_t$, $I_1 = H_t$ y K son colineales.

Ejemplo 5. (Lista corta de la 46ª Olimpiada Internacional de Matemáticas, 2005). En un triángulo acutángulo ABC, sean D, E, F, P, Q y R los pies de las perpendiculares desde A, B, C, A, B y C sobre BC, CA, AB, EF, FD y DE, respectivamente. Demuestra que $p(ABC)p(PQR) \geq p(DEF)^2$, donde $p(T)$ denota el perímetro del triángulo T.

Solución. Como ABC es acutángulo, los pies de las perpendiculares son puntos interiores de los lados. Es conocido que ABC y AEF son semejantes, luego los pies de las alturas en este último triángulo también son interiores a sus lados, en particular P está sobre EF. De manera análoga, Q y R son interiores a los lados de DEF.



Si K y L son los pies de las perpendiculares desde E y F sobre AB y CA, respectivamente, entonces los triángulos AKL y ABC son semejantes, por lo que KL y BC son paralelas.
Ahora, EK y BQ son alturas correspondientes en los triángulos semejantes AEF y DBF. Luego, los pies de estas dividen al lado opuesto correspondiente en la misma razón: $\frac{AK}{KF} = \frac{DQ}{QF}$. Esto implica que KQ y AD son paralelas. Análogamente, obtenemos que LR y AD son paralelas. Como KL es paralela a BC, también es perpendicular a AD y, por consiguiente, $QR \geq KL$.

De la semejanza de los triángulos AKL, AEF y ABC, se sigue que

$$\frac{KL}{EF} = \frac{AK}{AE} = \cos\angle A = \frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC}.$$

Luego, $QR \geq \frac{EF^2}{BC}$. De manera análoga obtenemos que $PQ \geq \frac{DE^2}{AB}$ y $RP \geq \frac{FD^2}{CA}$. Por lo tanto, será suficiente demostrar que

$$(AB + BC + CA)\left(\frac{DE^2}{AB} + \frac{EF^2}{BC} + \frac{FD^2}{CA}\right) \geq (DE + EF + FD)^2,$$

pero esto se deduce inmediatamente de la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Ejemplo 6. (China, 1999). Sea ABC un triángulo con $\angle B < \angle C$. Sea D un punto sobre el lado BC tal que $\angle ADB$ es obtuso y sea H_1 el ortocentro del triángulo ABD. Supón que H es un punto dentro del triángulo ABC y que está sobre el circuncírculo del triángulo ABD. Demuestra que H es el ortocentro del triángulo ABC si y solo si HC y H_1D son paralelas y H_1 está sobre el circuncírculo del triángulo ABC.

Solución. Si H_1 es el ortocentro del triángulo ABD, entonces D es el ortocentro del triángulo ABH_1. Luego, $\angle H_1AD = \angle DBH_1$. Como H es el ortocentro del triángulo ABC, tenemos que $\angle CAH = \angle HBC$ y, como $ABDH$ es cíclico, resulta que $\angle HAD = \angle HBD$. Luego,

$$\angle CAH_1 = \angle CAH = \angle HBC = \angle HAD = \angle H_1AD = \angle DBH_1 = \angle CBH_1,$$

por lo que $CABH_1$ es cíclico. Finalmente, tenemos que HC y H_1D son paralelas por ser ambas perpendiculares a AB.
Recíprocamente, supongamos que H_1, el ortocentro del triángulo ABD, está sobre el circuncírculo del triángulo ABC. Entonces, H_1 es la intersección de la altura AD_1 de ABC con el circuncírculo de ABC. Notemos que BD_1 es altura del triángulo ABH_1 y esta corta al circuncírculo en C. Luego, $DD_1 = D_1C$. Si K es la intersección de CH con la altura AH_1, tenemos que CKD_1 y DH_1D_1 son triángulos rectángulos congruentes, por lo que K es el ortocentro del triángulo ABC. Ahora, como

$$D_1K \cdot D_1A = H_1D_1 \cdot D_1A = CD_1 \cdot D_1B = D_1D \cdot D_1B,$$

tenemos que A, K, D, B están sobre una misma circunferencia. Por lo tanto, K está en el circuncírculo del triángulo ABD y sobre la recta CH, lo mismo que H, de donde se sigue que $K = H$.

Ejemplo 7. (Ucrania, 1999). Sean AD, BE y CF las alturas de un triángulo acutángulo ABC y sea X un punto arbitrario dentro del triángulo DEF. Sean M, N, P, Q, R y S los pies de las perpendiculares desde X sobre las rectas AD, BC, BE, CA, CF y AB, respectivamente. Demuestra que MN, PQ y RS son concurrentes.

Solución. Es inmediato que los cuadriláteros $XMDN$, $XPEQ$ y $XRFS$ son rectángulos. Sean D_1, E_1 y F_1, respectivamente, sus centros. Recordemos que las bisectrices internas del triángulo órtico DEF son las alturas del triángulo ABC. Luego, las bisectrices del triángulo $D_1E_1F_1$ son paralelas a las alturas del triángulo ABC (note que DEF y $D_1E_1F_1$ son homotéticos desde X). Notemos que MN es la reflexión de DX en la bisectriz de D_1. El resultado se sigue de que DX, EX y FX son concurrentes y del hecho de que las reflexiones en las bisectrices de tres cevianas concurrentes de un triángulo, son también concurrentes[3].

Ejemplo 8. (Bulgaria, 2000). Una recta ℓ está trazada por el ortocentro H de un triángulo acutángulo ABC. Demuestra que las reflexiones de ℓ sobre los lados del triángulo son concurrentes.

Solución. Como ABC es acutángulo, el ortocentro H está dentro de ABC, por lo que la recta ℓ corta a dos de los lados, digamos CA y AB en Q y R, respectivamente. Si ℓ y BC son paralelas, tomemos cualquier punto P de la reflexión de ℓ en BC. Si ℓ y BC no son paralelas, tomemos por P la intersección de ℓ con la recta BC.
Sean D', E' y F' las intersecciones de las alturas AD, BE y CF con el circuncírculo, respectivamente. Las reflexiones de ℓ sobre los lados del triángulo son PD', QE' y RF'. Demostraremos que estas concurren.
Sea S la intersección de $E'Q$ y $F'R$. Tenemos que

$$\angle SE'A + \angle SF'A = \angle QE'A + \angle RF'A = \angle QHA + \angle RHA = \pi.$$

Luego, $SE'AF'$ es un cuadrilátero cíclico, por lo que S está sobre el circuncírculo del triángulo ABC.
Análogamente, si T es la intersección de $D'P$ y $E'Q$, obtenemos que T está sobre el circuncírculo del triángulo ABC. Pero entonces, $T = S$, ya que ambos son la intersección de $E'Q$ con el circuncírculo. Por lo tanto, PD', QE' y RF' son concurrentes.

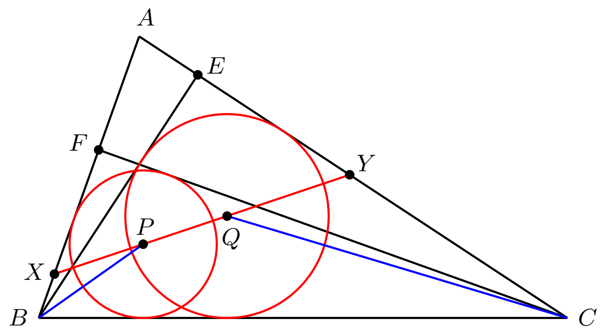
Ejemplo 9. (Taiwán, 2000). En un triángulo acutángulo ABC, $CA > BC$ y M es el punto medio de AB. Las alturas AD y BE se intersecan en H y, las rectas AB y DE, se intersecan en R. Demuestra que las dos rectas RH y CM son perpendiculares.

Solución. Sean CF la otra altura y S el pie de la perpendicular desde H sobre CM. Los puntos H, S, D, C y E están sobre una circunferencia de diámetro CH, ya que los ángulos en S, D y E son rectos. Los puntos D, E, F y M están en otra circunferencia, precisamente en la circunferencia de los nueve puntos del triángulo ABC. Los puntos M, S, H, F están en la circunferencia de diámetro MH, ya que los ángulos en S y F son rectos. Los ejes radicales (las rectas AB, SH y DE) de estas tres circunferencias tomadas por pares son concurrentes y, como AB y DE se intersecan en R, se sigue que los puntos R, H y S son colineales. Por lo tanto, la recta que determinan es perpendicular (así se eligió S) a CM.

Ejemplo 10. (San Petersburgo, 2000). Sean BE y CF las alturas de un triángulo acutángulo ABC. La recta por los incentros de los triángulos BCE y BCF, intersecan a las rectas AB y AC en X y Y, respectivamente. Demuestra que $AX = AY$.

[3]Esto se puede demostrar usando el teorema de Ceva en su forma trigonométrica.

Solución. Primero notemos que si P y Q son los centros de los circuncírculos, el cuadrilátero $BCQP$ es cíclico, pues $\angle BPC = \pi - (\angle PBC + \angle PCB) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ y $\angle BQC = \pi - (\angle QBC + \angle QCB) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.



Como CQ es bisectriz del ángulo $\angle ECB$, tenemos que $\alpha = \angle YCQ = \angle QCB = \angle XPB$, donde la última igualdad se sigue por ser cíclico $BCQP$. Análogamente, tenemos que $\beta = \angle PBX = \angle CBP = \angle YQC$. Luego, los triángulos BPX y QCY son semejantes y, por consiguiente, los ángulos suplementarios en X y Y son iguales, por lo que AXY es un triángulo isósceles.

A continuación dejamos algunos ejercicios para el lector.

Ejercicios

En todos los ejercicios, DEF es el triángulo órtico de un triángulo ABC y H es el ortocentro del triángulo ABC.

1) Si la extensión de la altura AD del triángulo ABC corta al circuncírculo en D', demuestra que $HD = DD'$.

2) Sean D', E' y F' las intersecciones del circuncírculo de ABC con AD, BE y CF, respectivamente.
   a) Demuestra que los triángulos DEF y $D'E'F'$ son homotéticos desde H.
   b) Demuestra que los circuncírculos de los triángulos DEF y ABC son homotéticos desde H. ¿Cuál es el otro centro de homotecia?

3) Demuestra que $AD \cdot HD = BD \cdot DC$.

4) Demuestra que $AH \cdot HD = BH \cdot HE = CH \cdot HF$.

5) Demuestra que los circuncírculos de los triángulos ABC, HBC, AHC y ABH tienen el mismo circunradio.

6) Sean A_1BC y A_2BC dos triángulos inscritos en una misma circunferencia y sean H_1 y H_2 los ortocentros de los triángulos A_1BC y A_2BC, respectivamente. Demuestra que H_1H_2 y A_1A_2 son paralelas y de la misma longitud.

7) Sea A' el punto medio de BC. El circuncírculo del triángulo HDA' corta a las alturas BE y CF en E' y F', respectivamente. Demuestra que E y F son los puntos medios de las alturas y que los triángulos $DE'F'$ y ABC son semejantes.

8) Sean P y Q los pies de las perpendiculares desde A y B a los lados EF y FD del triángulo órtico DEF, respectivamente. Demuestra que $EP = QD$. Usa esto para demostrar que DP, EQ y FR son concurrentes, donde R es el pie de la perpendicular desde C al lado DE.

9) Demuestra que las cuatro proyecciones de D sobre CA, CF, BE y AB son colineales.

10) Si a, b, c son las longitudes de los lados de un triángulo ABC y R es el circunradio, demuestra que:
a) $OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$, donde O es el circuncentro de ABC.
b) $GH^2 = 4R^2 - \frac{4}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$, donde G es el baricentro de ABC.
c) $AH^2 + BH^2 + CH^2 = 12R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$.

11) Sea ABC un triángulo acutángulo.
a) Si las áreas de los triángulos HBC, HCA y HAB son iguales, demuestra que el triángulo ABC es equilátero.
b) Si los perímetros de los triángulos HBC, HCA y HAB son iguales, demuestra que el triángulo ABC es equilátero.

12) Si ABC es un triángulo acutángulo, demuestra que $HD + HE + HF \leq 3r$ donde r es el inradio.

13) Determina la medida del ángulo $\angle BAC$ si $EA + AF = CE + FB$.

14) Sea O el circuncentro del triángulo ABC. Si L, M y N son las intersecciones de AO, BO y CO con los lados BC, CA y AB, respectivamente, demuestra que

$$\text{Área}(LMN) \leq \frac{1}{4}\text{Área}(ABC)$$

y que la igualdad se da si y solo si el triángulo ABC es equilátero.

Bibliografía

1) R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas, Instituto de Matemáticas, UNAM, 2004.

2) H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer. *Geometry Revisited.* The Mathematical Association of America, 1967.