

---

# Tableros y Gráficas

Por Oriol Andreu Solé Pi

Nivel Avanzado

---

La teoría de gráficas tiene un sinfín de aplicaciones en distintas ramas de las matemáticas y en muchos problemas de olimpiada, en este pequeño artículo exploraremos algunas de las formas en las que puede utilizarse para resolver problemas de tableros. Los ejemplos que discutiremos incluyen problemas que han aparecido en olimpiadas tanto nacionales como internacionales en años recientes.

## Definiciones básicas

Antes de continuar, se le recomienda al lector haber leído el capítulo 8 del libro Principio de las Casillas [1] o algún otro texto introductorio de teoría de gráficas. Comenzaremos por dar un compendio de las definiciones esenciales.

1. **Gráfica.** Una **gráfica**  $G = (V, E)$  es una colección  $V$  de **vértices** y  $E$  de **aristas**, que son parejas no ordenadas de vértices. Durante todo este texto trabajaremos únicamente con gráficas cuyo conjunto de vértices es finito. Dada una gráfica  $G$ ,  $V(G)$  y  $E(G)$  denotan al conjunto de vértices y al conjunto de aristas de  $G$ , respectivamente.
2. **Adyacencia e incidencia.** Diremos que dos vértices  $v$  y  $u$  son **adyacentes** (o vecinos) si forman una arista, si este es el caso, escribiremos  $vu$  (o  $uv$ ) para referirnos a la arista y diremos que  $v$  y  $u$  son **incidentes** a  $vu$ .
3. **Grado de un vértice.** El **grado** de un vértice  $v$ , que se denota por  $d(v)$ , es la cantidad de aristas que son incidentes a  $v$ .
4. **Subgráfica.** Dadas dos gráficas  $G$  y  $H$ , diremos que  $H$  es **subgráfica** de  $G$  si  $V(H) \subset V(G)$  y  $E(H) \subset E(G)$ .

5. **Camino.** Un **camino** de longitud  $k$  es una secuencia  $v_0, v_1, v_2, \dots, v_k$  de vértices distintos tal que  $v_i$  es adyacente a  $v_{i+1}$  para toda  $i \in \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$ .

6. **Ciclo.** Un **ciclo** de longitud  $k$  es una secuencia  $v_0, v_1, v_2, \dots, v_k$  de vértices en la que los únicos iguales son el primero y el último tal  $v_i$  es adyacente a  $v_{i+1}$  para toda  $i \in \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$ .

7. **Gráfica conexa.** Una gráfica es **conexa** si cualesquiera dos de sus vértices están conectados por un camino.

8. **Componente conexa.** Una **componente conexa** de una gráfica es un conjunto de vértices tal que cualesquiera dos de ellos están conectados por un camino. Una componente conexa es **maximal** si ningún vértice de la componente es adyacente a un vértice fuera de la componente. Por comodidad, a las componentes conexas maximales las llamaremos simplemente componentes conexas. Toda gráfica puede descomponerse en componentes conexas (maximales).

9. **Árboles.** Un **árbol** es una gráfica conexa sin ciclos.

10. **Árbol generador.** Dada una gráfica  $G$ , un **árbol generador** de  $G$  es una subgráfica  $T$  que, además de ser un árbol, cumple que  $V(T) = V(G)$ .

11. **Gráfica completa.** La **gráfica completa** con  $n$  vértices, que se denota por  $K_n$ , es aquella en la que cada pareja de vértices está unida por una arista.  $K_n$  tiene  $\binom{n}{2}$  aristas.

12. **Número cromático.** El **número cromático** de una gráfica  $G$ , que se denota por  $\chi(G)$ , es el menor entero positivo  $k$  tal que los vértices de  $G$  pueden colorearse con  $k$  colores sin que haya dos vértices adyacentes del mismo color.

13. **Gráfica bipartita.** Se dice que una gráfica  $G$  es **bipartita** si  $\chi(G) \leq 2$ . Los vértices de una gráfica bipartita pueden separarse en dos **clases** de modo que no haya aristas entre vértices de la misma clase.

14. **Emparejamiento.** Dada una gráfica  $G$ , un **emparejamiento** es un subconjunto de las aristas tal que cada vértice es incidente a lo más a una de ellas. Diremos que un emparejamiento **satura** a un conjunto de vértices  $S \subset V(G)$  si cada vértice de  $S$  es incidente a alguna arista del emparejamiento. Un emparejamiento es **perfecto** si satura a  $V(G)$ .

15. **Paseo Euleriano.** Un **paseo** es una secuencia  $v_0, v_1, v_2, \dots, v_k$  de vértices (no necesariamente distintos) tal que  $v_i$  es adyacente a  $v_{i+1}$  para toda  $i \in \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$ , diremos que un paseo es **cerrado** si su vértice inicial y su vértice final coinciden. Un paseo es **Euleriano** si pasa por cada arista de la gráfica exactamente una vez y usa todos los vértices de la gráfica.

## Resultados importantes

Ahora recordaremos algunos resultados que nos serán útiles más adelante.

1. **Suma de grados.** Para toda gráfica  $G$  se cumple que

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)|.$$

Como consecuencia, toda gráfica tiene una cantidad par de vértices de grado impar.

*Demostración.* Eliminar una arista reduce la suma de los grados en 2, el resultado se sigue.  $\square$

2. **Propiedades importantes de árboles.** a) Todo árbol con  $n$  vértices tiene exactamente  $n - 1$  aristas.  
 b) Todo árbol con  $n > 2$  vértices contiene al menos dos hojas, es decir, vértices de grado 1.  
 c) Toda gráfica conexa tiene un árbol generador.

*Demostración.* a) Por inducción sobre  $n$ . Eliminamos una arista arbitraria, esto divide al árbol en dos árboles más pequeños. Aplicando la hipótesis a cada uno de los dos árboles se obtiene que, entre los dos, tienen  $n - 2$  aristas, así que el árbol original tenía  $n - 1$  aristas.

b) La suma de los grados de los vértices es dos veces el número de aristas, es decir,  $2(n - 1)$ . El árbol no tiene vértices de grado 0, así que el resultado se sigue por casillas.  
 c) Consideramos un ciclo arbitrario de la gráfica y eliminamos una de sus aristas, esto resulta en una nueva gráfica que sigue siendo conexa. Podemos repetir este proceso hasta obtener una gráfica conexa y sin ciclos, es decir, un árbol.  $\square$

3. **Aristas, conexidad y ciclos.** a) Toda gráfica conexa con  $n$  vértices tiene al menos  $n - 1$  aristas.  
 b) Toda gráfica con  $n$  vértices que no contenga ciclos tiene a lo más  $n - 1$  aristas.

*Demostración.* a) Toda gráfica conexa con  $n$  vértices tiene un árbol generador y, como consecuencia, al menos  $n - 1$  aristas.

b) Si una gráfica no contiene ciclos, cada una de sus componentes conexa forma un árbol. Sumando sobre todas las componentes, se sigue que la gráfica tiene  $n - k$  aristas, donde  $k$  es el número de componentes conexas que la conforman.  $\square$

4. **Caracterización de las gráficas bipartitas.** Una gráfica es bipartita si y solo si no contiene ningún ciclo de longitud impar.

*Demostración.* Una gráfica bipartita no puede contener ciclos de longitud impar, pues se necesitarían al menos 3 colores para colorear los vértices de dicho ciclo sin que haya dos adyacentes del mismo color. Ahora, consideremos una gráfica sin ciclos de longitud impar y coloreemos de blanco un vértice arbitrario de cada una de sus componentes conexas. Los vecinos de todos los vértices blancos son coloreados de negro y, después,

los vecinos de todos los vértices negros son coloreados de blanco. Repetiremos este proceso hasta que cada vértice haya sido coloreado. Como no hay ciclos de longitud impar, no habrá ningún vértice coloreado de ambos colores ni dos vértices adyacentes del mismo color. Esto prueba que la gráfica es bipartita. (Haz un dibujo para entender mejor la prueba).  $\square$

**5. Teorema de Hall.** Dada una gráfica bipartita con clases de vértices  $A$  y  $B$ , existe un emparejamiento que satura a  $A$  si y solo si para cada  $S \subset A$  se cumple que  $S \leq |N(S)|$ , donde  $N(S) \subset B$  es el conjunto de vértices que son adyacentes con al menos un vértice de  $S$ .

**6. Teorema de Euler (para paseos Eulerianos).** Una gráfica conexa contiene un paseo Euleriano si y solo si a lo más dos de sus vértices tienen grado impar. Más aún, una gráfica contiene un paseo Euleriano cerrado si y solo si todos sus vértices tienen grado par.

Las demostraciones de los teoremas de Hall y de Euler, así como pruebas más detalladas de algunos de los resultados anteriores, pueden encontrarse en el libro Principio de las Casillas [1]. Todos los resultados que acabamos de enunciar son válidos también para multigráficas<sup>2</sup>.

## Ejemplos sencillos

Los tres ejemplos siguientes, aunque son bastante sencillos y pueden resolverse de varias maneras, ilustran algunas de las formas en las que la teoría de gráficas puede ayudarnos a atacar problemas de tableros. Le recomendamos al lector intentar cada uno de estos problemas durante al menos cinco minutos antes de leer la solución.

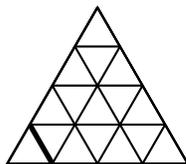
**Ejemplo 1.1.** Un caballo de ajedrez se mueve dando saltos en un tablero de  $1001 \times 1001$ . ¿Será posible que después de  $1001^2$  saltos el caballo haya visitado cada casilla una vez y se encuentre nuevamente en su posición original? (Nota: Un salto del caballo consiste en desplazarse una casilla en una coordenada y dos casillas en la otra coordenada).

**Solución.** Demostraremos que no es posible. Se construye una gráfica  $G$  cuyos vértices representan a las casillas del tablero, dos vértices estarán unidos por una arista si es posible moverse de una de las casillas correspondientes a la otra mediante un salto de caballo. Coloreando el tablero de blanco y negro alternadamente (como tablero de ajedrez), obtenemos una coloración de los vértices de  $G$  en la que no hay vértices adyacentes del mismo color, así que  $G$  es bipartita. Se sigue que  $G$  no contiene ningún ciclo de longitud impar y, en particular, no contiene un ciclo que pase por cada uno de los  $1001^2$ , es decir, el caballo no puede realizar  $1001^2$  saltos con las propiedades que se piden.

**Ejemplo 1.2.** Una hormiga puede moverse entre vértices adyacentes de un tablero triangular de lado  $n$  (dos vértices son adyacentes si están unidos por un segmento

<sup>2</sup>En una multigráfica puede haber más de una arista formada por la misma pareja de vértices.

de longitud 1). Demuestra que la hormiga puede realizar una ruta cerrada que pase exactamente una vez por cada uno de los segmentos de longitud 1. La siguiente figura muestra un tablero triangular de lado 4.



**Solución.** Podemos ver al tablero triangular como una gráfica cuyos vértices son los vértices del tablero y cuyas aristas corresponden a los segmentos de longitud 1. En esta gráfica, todo vértice tiene grado 6, 4 o 2, por lo que existe un paseo Euleriano cerrado, que se traduce en una ruta cerrada que pasa por cada segmento exactamente una vez.

**Ejemplo 1.3.** Un tablero de  $n \times n$  se cubre con fichas de dominó de modo que cada ficha cubre exactamente dos casillas y cada casilla es cubierta por exactamente dos fichas. Demuestra que  $n$  es par.

**Solución.** Se construye una gráfica con un vértice por cada casilla y, por cada dominó, añadimos una arista entre las dos casillas que cubre (es posible que haya dos aristas uniendo la misma pareja de vértices). Como cada casilla está cubierta por dos dominós, cada vértice de la gráfica tiene grado 2. Probaremos que  $G$  está compuesta por ciclos (posiblemente de longitud 2) que no comparten vértices.

$G$  tiene  $n^2$  vértices y  $2n^2/2 = n^2$  aristas, por lo que contiene al menos un ciclo y, como cada vértice tiene grado 2, los vértices del ciclo son incidentes únicamente a las aristas del ciclo. Ahora, podemos ignorar los vértices de este ciclo y repetir este argumento con los vértices restantes. Como  $G$  es finita, este proceso debe concluir tras un número finito de iteraciones, con lo que se obtiene una descomposición de  $G$  en ciclos que no comparten vértices.

Todo ciclo en  $G$  es de longitud par (¿por qué?). Esta observación, junto con el hecho de que  $G$  puede descomponerse en ciclos ajenos, implica que el número de vértices, que es  $n^2$ , es par y el resultado se sigue.

**Observación.** Construir una gráfica que tenga un vértice por cada casilla del tablero, como se hizo en las soluciones de los ejemplos 1.1 y 1.3, es una de las maneras más comunes de atacar problemas de tableros con teoría de gráficas.

### Ejemplos variados

En su mayoría, los ejemplos que aparecen en esta sección provienen olimpiadas nacionales e internacionales. Por simplicidad, a partir de aquí evitaremos hacer distinción

entre los vértices de una gráfica y los objetos que representan.

**Ejemplo 2.1. (ELMOSL 2010)** Hay una torre de ajedrez en alguna casilla de un tablero de  $n \times m$ . La torre tiene permitido moverse con la condición de que después de cada movimiento vertical debe realizar uno horizontal y después de cada movimiento horizontal uno vertical. ¿Para que parejas de enteros  $(m, n)$  es posible, tras haber realizado de secuencia permitida de movimientos, que la torre haya estado en cada casilla del tablero exactamente una vez? (Nota: un movimiento de la torre de ajedrez consiste en desplazarse de una casilla a otra que se encuentre en la misma fila o columna).

**Solución.** Sea  $G$  una gráfica bipartita que en una de las clases tiene un vértice por cada columna mientras que en la otra clase tiene un vértice por cada fila, cada pareja de vértices en clases distintas estará unida por una arista, cada una de las  $mn$  aristas de  $G$  representa una casilla del tablero. Una secuencia de movimientos permitidos de la torre corresponde a un paseo en  $G$ , más aún, la torre habrá estado exactamente una vez en cada casilla si y solo si el paseo es Euleriano. Se sigue que la torre puede llevar a cabo una secuencia de movimientos como la que se pide si y solo si hay a lo más dos vértices de grado impar en  $G$ . Observemos que  $G$  tiene  $n$  vértices de grado  $m$  y  $m$  vértices de grado  $n$ , así que las parejas buscadas son las que están formadas por dos números pares o un número cualquiera y un 2.

Para resolver el ejemplo anterior se construyó una gráfica bipartita con un vértice por cada fila y otro por cada columna, esta es otra de las técnicas que debemos recordar a la hora de atacar problemas de tableros. Los dos ejemplos siguientes se resolverán utilizando el teorema de Hall.

**Ejemplo 2.2.** Sean  $m$  y  $n$  enteros positivos con  $n > m$ . Se tiene un tablero de  $n \times n$  con un entero entre 1 y  $n$  escrito en cada una de las casillas de las primeras  $m$  columnas. Se sabe que cualesquiera dos casillas en la misma fila o columna tienen números distintos. Demuestra que es posible escribir un entero entre 1 y  $n$  en cada una de las casillas vacías de modo que se siga cumpliendo la propiedad anterior.

**Solución.** Probaremos que es posible escribir un entero entre 1 y  $n$  en cada casilla de la columna  $m + 1$  de modo que no haya dos casillas en la misma fila o columna con el mismo número. Sea  $G$  una gráfica bipartita con  $2n$  vértices que en una de las clases tiene un vértice por cada fila mientras que en la otra tiene un vértice por cada entero entre 1 y  $n$ , una fila y un número serán adyacentes si la fila no contiene ninguna casilla marcada con ese número; notemos que todo vértice de  $G$  tiene grado  $n - m$ . Sea  $S$  un subconjunto arbitrario de las filas, hay un total de  $|S|(n - m)$  aristas incidentes a elementos de  $S$  y estas aristas deben ser incidentes al menos a  $|S|(n - m)/(n - m) = |S|$  vértices de la clase opuesta (pues cada vértice es incidente a  $n - m$  aristas), se sigue, por el teorema de Hall, que  $G$  tiene un emparejamiento que satura a la clase de las filas. Este emparejamiento, que de hecho es perfecto, nos indica cómo asignar números a las casillas de la columna  $m + 1$  de modo que se cumpla la propiedad deseada. Para terminar, repetimos este argumento con las columnas  $m + 2, m + 3, \dots, n$ .

Acabamos de demostrar algo interesante y que también nos será útil en el siguiente ejemplo: Cualquier gráfica bipartita regular<sup>3</sup> tiene un emparejamiento perfecto.

**Ejemplo 2.3. (IMOSL 2012)** Las filas y columnas de un tablero de tamaño  $3n \times 3n$  son enumeradas  $1, 2, \dots, 3n$ . Cada casilla  $(x, y)$  es coloreada de rojo, azul o verde dependiendo de si el residuo que deja  $x + y$  al dividirse entre 3 es 0, 1 o 2. En cada casilla se coloca una ficha de color rojo, azul o verde de modo que se haya  $3n^2$  fichas de cada color. Supongamos que es posible permutar las fichas de manera que cada una de ellas se encuentra a distancia a lo más  $d$  de su posición original y cada ficha roja fue remplazada por una azul, cada azul por una verde y cada verde por una roja. Demuestra que es posible permutar las fichas de modo que cada una de ellas se encuentra a distancia a lo más  $d + 2$  de su posición original y cada casilla contiene una ficha de su color.

**Solución.** Sin pérdida de generalidad, basta con demostrar que las fichas rojas pueden moverse a casillas rojas distintas de modo que cada ficha es desplazada a lo más  $d + 2$  (se puede repetir este procedimiento con cada uno de los colores para concluir). Dicho de otro modo, debemos probar que es posible emparejar a las  $3n^2$  fichas rojas con las  $3n^2$  casillas rojas de modo que cada ficha roja se encuentre a distancia a lo más  $d + 2$  de su pareja.

Para encontrar el emparejamiento, se construye una gráfica bipartita que en una de las clases tiene un vértice por cada ficha roja, mientras que en la otra tiene un vértice por cada casilla roja.

Dividimos al tablero en  $3n^2$  triminós horizontales de  $3 \times 1$ , notemos cada triminó contiene exactamente una casilla roja. Sea  $\pi$  la permutación que mueve cada ficha a lo más  $d$  y sustituye a las fichas rojas por azules, las azules por verdes y las verdes por rojas. Una casilla roja  $C$  y una ficha roja  $F$  estarán conectadas por una arista por cada ficha del conjunto  $\{F, \pi(F), \pi^{-1}(F)\}$ <sup>4</sup> que originalmente se encuentre en el triminó que contiene a  $C$  (puede haber hasta tres aristas entre  $F$  y  $C$ ). Cualquier arista en esta gráfica une una ficha roja con una casilla roja que se encuentra a distancia a lo más  $d + 2$ . Probaremos que  $G$  es regular.

Cada ficha roja es incidente a 3 aristas. Cada casilla roja pertenece a algún triminó y es incidente a una arista por cada una de las tres fichas en el triminó. Entonces, todo vértice de  $G$  tiene grado 3 y, al igual que en el ejemplo anterior, podemos utilizar el teorema de Hall para concluir que la gráfica tiene un emparejamiento perfecto, que es justo lo que buscábamos.

**Ejemplo 2.4. (USAMO 2007)** Un *animal* de tamaño  $n$  es una figura conectada formada por  $n$  casillas de un tablero infinito. Un *dinosaurio* es un animal de tamaño al menos 2020. Diremos que un dinosaurio es *primitivo*, si las casillas que lo conforman no pueden partirse en dos o más dinosaurios. Encuentra el mayor número de casillas por las que puede estar compuesto un dinosaurio primitivo.

<sup>3</sup>Una gráfica es regular si todos sus vértices tienen el mismo grado.

<sup>4</sup> $\pi(F)$  denota a la ficha que es sustituida por  $F$  al hacer la permutación, mientras que  $\pi^{-1}(F)$  denota a la ficha que sustituye a  $F$ .

**Solución.** Sea  $D$  un dinosaurio compuesto por  $n > 8077$  casillas, probaremos que  $D$  puede partirse en dos o más dinosaurios. Sea  $G$  una gráfica cuyos vértices representan a las casillas de  $D$ , dos vértices serán adyacentes si las casillas correspondientes son adyacentes. La gráfica es conexa, así que podemos tomar un árbol generador  $H$  de  $G$ . Notemos que todo vértice de  $H$  tiene grado a lo más 4. La clave es el siguiente resultado de teoría de gráficas.

**Proposición.** Sea  $T$  un árbol con  $n$  vértices y grado máximo  $\Delta > 1$  entre todos sus vértices. Para cada vértice  $v \in V(T)$ , sea  $T_v$  la gráfica que se obtiene a partir de  $T$  al eliminar a  $v$  y todas sus aristas y sean  $V_{v,1}, V_{v,2}, V_{v,3}, \dots, V_{v,k}$  las componentes conexas de  $T_v$ . Se define  $f(v) = \max\{|V_{v,1}|, |V_{v,2}|, \dots, |V_{v,k}|\}$ . Existe un vértice  $u \in V(T)$  tal que  $\lceil \frac{1}{\Delta}(n-1) \rceil \leq f(u) \leq \lceil \frac{\Delta-1}{\Delta}(n-1) \rceil$ .

*Demostración.* Por casillas, la desigualdad de la izquierda se cumple para todo vértice de  $T$ , así que basta con probar que existe un vértice que cumple la desigualdad de la derecha. De entre todos los elementos de  $V(T)$ , consideremos un vértice  $u$  para el cual  $f(u)$  alcanza su valor mínimo y supongamos que  $f(u) \geq \lceil \frac{\Delta-1}{\Delta}(n-1) \rceil + 1$ . Sea  $i$  tal que  $f(u) = |V_{u,i}|$  y sea  $u'$  el único vértice de  $V_{u,i}$  que es adyacente a  $u$ . La componente conexa de  $T_{u'}$  que contiene a  $u$  tiene cardinalidad  $n - |V_{u,i}| \leq \frac{1}{\Delta}(n-1) < f(u)$ , mientras que cada una de las otras componentes conexas de  $T_{u'}$  está contenida en  $V_{u,i} \setminus \{u'\}$  y, por lo tanto, tiene cardinalidad a lo más  $f(u) - 1$ . Se sigue que  $f(u') < f(u)$ , lo que contradice la minimalidad de  $f(u)$ . (Haz un dibujo para entender mejor la prueba.)  $\square$

Aplicando la proposición anterior a  $H$ , obtenemos que hay un vértice  $u \in V(H)$  tal que  $\frac{1}{4}(n-1) \leq f(u) < \frac{3}{4}(n-1) + 1$ , así que tanto  $f(u)$  como  $n - f(u)$  son al menos  $\frac{1}{4}(n-1) > 2019$ . Sea  $i$  tal que  $f(u) = |H_{u,i}|$ , entonces  $H_{u,i}$  y  $V(H) \setminus H_{u,i}$  inducen una partición de  $H$  en dos subgráficas conexas con al menos 2020 vértices cada una. Como  $H$  es un árbol generador de  $G$ , se sigue que las casillas de  $D$  pueden partirse en dos dinosaurios.

Lo anterior demuestra que todo dinosaurio primitivo está compuesto por a lo más 8077 casillas, se deja como ejercicio al lector construir un dinosaurio primitivo de tamaño 8077.

La proposición que acabamos de utilizar es interesante por sí misma y vale la pena recordarla, pues nos permite probar fácilmente que toda gráfica con  $n$  vértices y grado máximo  $\Delta$  puede partirse en dos gráficas conexas con al menos  $\lceil \frac{n-1}{\Delta} \rceil$  vértices cada una, como se hizo en el ejemplo anterior para  $\Delta = 4$ .

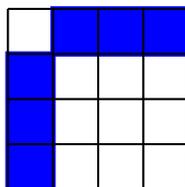
Ahora veremos dos ejemplos en los que se debe acotar el número de aristas de una gráfica utilizando información sobre sus componentes conexas.

**Ejemplo 2.5.** Se seleccionan algunas casillas de un tablero de  $n \times n$  y en cada una de ellas se hace un corte a través de alguna de sus dos diagonales. Suponiendo que los cortes no dividen al tablero en dos o más fragmentos, demuestra que al menos  $2n - 1$  casillas no fueron seleccionadas.

**Solución.** Supongamos que se seleccionan y cortan  $k$  casillas de modo que el tablero no queda dividido. Consideremos los  $(n + 1)^2$  vértices del tablero, diremos que uno de estos vértices es exterior si se encuentra en la orilla del tablero. Se construye una gráfica con un vértice por cada vértice del tablero en la que dos vértices son adyacentes si el segmento que los une es una diagonal a través de la cual se hizo un corte, de este modo, hay una arista por cada una de las  $k$  casillas seleccionadas. Como los  $k$  cortes no dividen al tablero, es fácil ver que la gráfica no tiene ciclos y que cualesquiera dos vértices en la orilla pertenecen a componentes conexas distintas pues, de lo contrario, el ciclo o el camino que une los vértices dividiría al tablero. Se sigue que la gráfica está compuesta por  $r \geq 4n$  componentes conexas, cada una de las cuales es un árbol. Sumando sobre todas las componentes conexas obtenemos que la gráfica tiene  $k = (n + 1)^2 - r \leq (n - 1)^2$  aristas y, entonces, hay al menos  $n^2 - k \geq n^2 - (n - 1)^2 = 2n - 1$  casillas que no fueron seleccionadas.

**Ejemplo 2.6. (EGMO 2016)** Se dice que dos casillas distintas de un tablero de  $4n \times 4n$  son *amigas* si pertenecen a la misma fila o a la misma columna. Algunas de las casillas del tablero se colorean de azul. ¿Cuál es la menor cantidad de casillas que pueden haberse coloreado si cada casilla del tablero es amiga de al menos dos casillas azules?

**Solución.** La respuesta es  $6n$ . Una manera de colorear  $6n$  casillas es copiar el siguiente patrón en cada uno de los  $n$  subtableros de  $4 \times 4$  que se encuentran en la diagonal principal.



Para probar que  $6n$  efectivamente es el mínimo, consideremos una coloración arbitraria que cumpla la condición requerida. Ahora, construimos una gráfica bipartita  $G$  que en una de las clases tiene un vértice por cada columna y en la otra tiene un vértice por cada fila. Una fila y una columna serán adyacentes si la casilla en su intersección está coloreada de azul. Que cada casilla sea amiga de dos casillas azules es equivalente a que para cada pareja de vértices  $(u, v)$  en clases distintas, existan al menos dos aristas distintas de  $uv$  que son incidentes a  $u$  o a  $v$ .

Si hay un vértice de grado 0 en  $G$ , entonces cada vértice en la clase opuesta debe tener grado al menos 2 y el número de casillas azules será al menos  $8n$ . Supongamos que no hay vértices de grado 0 y consideremos una componente conexa arbitraria de  $G$ . Como no hay vértices de grado 0, esta componente contiene dos vértices adyacentes  $u$  y  $v$  que claramente se encuentran en clases distintas y, entonces, hay al menos dos aristas distintas de  $uv$  que son incidentes a  $u$  o a  $v$ . Esto implica que la componente contiene al menos otros dos vértices. Por lo anterior, podemos suponer que cada componente conexa de  $G$  contiene al menos 4 vértices.

$G$  está compuesta por no más de  $8n/4 = 2n$  componentes conexas y en cada una de

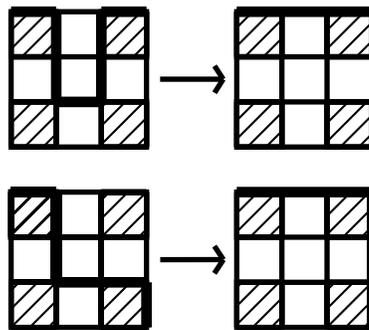
ellas la cantidad de aristas es al menos la cantidad de vértices menos 1. Sumando sobre todas las componentes conexas obtenemos que  $G$  tiene al menos  $8n - 2n = 6n$  aristas, es decir, hay al menos  $6n$  casillas azules, como deseábamos probar.

Los últimos dos ejemplos, aunque no corresponden a una técnica o teorema en particular, ilustrarán varias ideas interesantes que no hemos utilizado todavía.

**Ejemplo 2.7. (ARMO 1997)** Sean  $n$  y  $m$  enteros positivos impares. Un tablero de  $n \times m$  se cubre con dominós de modo que la única casilla que queda sin cubrir es una de las esquinas (cada una de las otras casillas está cubierta por exactamente un dominó y los dominós no se salen del tablero). Un movimiento consiste en deslizar un dominó hacia el hueco que hay en el tablero. Demuestra que es posible, mediante una secuencia finita de movimientos, hacer que el hueco termine en cualquiera de las esquinas del tablero.

**Solución.** Asignamos coordenadas al tablero de la manera usual. Sea  $C$  el conjunto de casillas con ambas coordenadas impares, nótese que las equinas del tablero pertenecen a  $C$ . Se construye una gráfica dirigida<sup>5</sup>  $D$  cuyos vértices representan a las casillas de  $C$ , habrá una flecha desde la casilla  $u$  a la  $v$  si hay exactamente una casilla del tablero entre  $u$  y  $v$  y, además, el dominó que cubre a  $v$  también cubre a la casilla entre  $u$  y  $v$ . A cada casilla de  $C$  que no sea la esquina vacía llega exactamente una flecha. Probaremos por contradicción que  $D$  no contiene ningún ciclo.

Supongamos que hay un ciclo en  $D$ . Las aristas del ciclo corresponden a un ciclo de dominós que encierra una región del tablero, cada cambio de dirección en el ciclo de dominós ocurre en una casilla de  $C$ . Consideremos el polígono ortogonal<sup>6</sup>  $P$  formado por la unión de las casillas en el ciclo de dominós y en la región encerrada, cada esquina de este polígono es una casilla de  $C$ . Siempre y cuando  $P$  no sea un rectángulo, tendrá un vértice donde el ángulo interno es de  $270^\circ$ , así que podemos aplicarle alguna de las dos modificaciones siguientes, dependiendo del caso.



<sup>5</sup>En una gráfica dirigida, en lugar de aristas se tienen flechas, que son parejas ordenadas de vértices.

<sup>6</sup>Un polígono es *ortogonal* si cualesquiera dos de sus lados son paralelos o perpendiculares entre sí.

Esto resulta en un nuevo polígono ortogonal que está compuesto por 2 o 4 casillas más que el original, está contenido en el tablero y cuyas esquinas son casillas de  $C$ . Si repetimos este proceso suficientes veces, como la cantidad de casillas que forman al polígono está acotada por  $nm$ , eventualmente obtendremos un rectángulo que está compuesto por una cantidad impar de casillas, pues sus esquinas son elementos de  $C$ . Se sigue que el polígono original  $P$  está compuesto por una cantidad impar de casillas y, por lo tanto, no puede teselarse con dominós, lo cual es una contradicción.

Ahora, sean  $c$  una casilla arbitraria de  $C$  y  $c = c_0, c_1, c_2, \dots, c_m$  la cadena más larga de elementos distintos de  $C$  tal que hay una flecha desde  $c_i$  a  $c_{i-1}$  para toda  $1 \leq i \leq m$ . Supongamos que  $c_m$  no es la esquina vacía, entonces existe exactamente una casilla  $c_{m+1}$  tal que de  $c_{m+1}$  a  $c_m$  hay una flecha. Por la maximalidad de la cadena, tenemos que  $c_{m+1} = c_j$  para algún  $0 \leq j \leq m$ , pero esto es una contradicción, pues  $D$  no contiene ningún ciclo. Se sigue que  $c_m$  es la esquina vacía, es decir, para toda casilla de  $c$  hay una secuencia de flechas que va desde la esquina vacía hasta  $c$ , esto se traduce en una secuencia de movimientos con los cuales podemos llevar el hueco hasta la casilla  $c$ . En particular, podemos llevar el hueco a cualquiera de las esquinas del tablero.

**Ejemplo 2.8. (ARMO 2018)** Se tiene un tablero de  $2020 \times 2020$ . Inicialmente, hay un saltamontes rojo en la casilla inferior derecha y un saltamontes azul en la casilla inferior izquierda. R y A juegan alternadamente por turnos y R comienza. Cada turno consiste en desplazar al saltamontes correspondiente (R mueve al saltamontes rojo mientras que A mueve al azul) 17 casillas en una coordenada y 20 en la otra, simultáneamente, para caer en una casilla vacía. Si pierde el primero en verse forzado a dejar a los saltamontes en una posición que ya había ocurrido antes, ¿quién tiene estrategia ganadora?

**Solución.** Se construye una gráfica con un vértice por cada casilla del tablero en la que dos casillas serán adyacentes si es posible llegar de una a la otra mediante un movimiento de los saltamontes.  $G$  es bipartita y conexa (¿por qué?), además, los saltamontes comienzan en clases distintas de la gráfica. Probaremos que A tiene estrategia ganadora.

**Proposición.** Se tienen una ficha roja y una ficha azul en vértices de clases distintas de una gráfica bipartita y conexa. R y A juegan alternadamente por turnos y R comienza. Cada turno consiste en mover la ficha correspondiente a una casilla adyacente vacía. Si pierde el primero en verse forzado a dejar a las fichas en una posición que ya había ocurrido antes, entonces A tiene estrategia ganadora.

*Demostración.* Sean  $r$  y  $a$  los vértices donde se encuentran la ficha roja y la ficha azul, respectivamente. Como la gráfica es conexa, existe un camino  $a = v_0, v_1, \dots, v_m = r$  que conecta a  $a$  y  $r$ . Las fichas comienzan en clases opuestas y R tira primero, por lo que cada vez que sea el turno de A, no hace falta preocuparnos por mover a la ficha azul a una casilla ocupada. Con esto en mente, probaremos que la siguiente estrategia para A le asegura ganar.

Si la ficha azul se encuentra en  $v_i$  con  $i$  par, la moverá a  $v_{i+1}$ .

Si la ficha azul se encuentra en  $v_i$  con  $i$  impar y la ficha roja no se encuentra en  $v_m = r$ , moverá la ficha azul a  $v_{i-1}$ .

Si la ficha azul se encuentra en  $v_i$  con  $i$  impar y la ficha roja se encuentra en  $v_m = r$ , moverá la ficha azul a  $v_{i+1}$ .

En resumen, esta estrategia consiste en ir moviendo la ficha azul alternadamente entre  $v_{2i}$  y  $v_{2i+1}$  hasta que  $R$  vuelva a poner la ficha roja en  $v_m$ , en este momento sucederá una de las dos cosas siguientes: si la ficha azul se encuentra en  $v_{2i+i}$ ,  $A$  la moverá a  $v_{2i+2}$  y repetirá este proceso con  $v_{2i+2}$  y  $v_{2i+3}$ , si la ficha azul se encuentra en  $v_{2i}$ ,  $R$  pierde y el juego termina. Si eventualmente la ficha azul se encontrara en  $v_m$  y nos vieramos forzados a moverla más allá de de este vértice, se daría alguna de las dos situaciones siguientes:  $m$  es par y en el turno anterior de  $A$  se tuvo que mover la ficha azul de  $v_{m-1}$  a  $v_m$  porque la ficha roja se encontraba en  $v_m$ , lo cual es imposible porque antes de cada turno de  $A$  las fichas se encuentran en la misma clase, o  $m$  es impar y tanto la ficha la ficha roja como la azul se encuentra en  $v_m$ , que también es imposible. Nos falta probar que  $A$  no perderá y que el juego eventualmente termina.

Claramente esta estrategia nos asegurará no repetir posiciones en las que la ficha roja se encuentra en  $v_m$ . Además, tampoco repetiremos posiciones mientras la ficha azul vaya alternando entre  $v_{2i}$  y  $v_{2i+1}$ , pues para cada vértice  $u$  por el que pasa la ficha roja la estrategia de  $A$  asegura que ocurran las posiciones roja:  $u$ , azul:  $v_{2i}$  y roja:  $u$ , azul:  $v_{2i+1}$ , así que  $R$  no puede volver a mover la ficha roja al vértice  $u$  hasta que la ficha azul haya pasado a moverse entre  $v_{2i+2}$  y  $v_{2i+3}$ . Por último, observemos que no pueden transcurrir más de  $|V(G)|^2$  turnos sin que se repita una posición, así que el juego eventualmente termina. Esto demuestra que la estrategia descrita es ganadora.  $\square$

Para concluir, dejamos una lista de 10 problemas para que practique el lector.

### Problemas

- 1) Inicialmente hay una ficha en una esquina de un tablero de  $n \times n$ . En cada paso movemos la ficha a cualquiera de las casillas adyacentes (dos casillas son adyacentes si comparten un lado). ¿Será posible que después de  $n^2$  pasos la ficha haya visitado cada casilla una vez y se encuentre nuevamente en su posición original?
- 2) **(OMM 2013)** Se construye un cubo de  $n \times n \times n$  utilizando  $n^3$  cubos de  $1 \times 1 \times 1$ . Algunos de los cubos unitarios se colorean de negro y el resto de blanco de modo que cada tira de  $n \times 1 \times 1$ ,  $1 \times n \times 1$  o  $1 \times 1 \times n$  contiene exactamente dos cubos negros que, además, están separados por una cantidad par de cubos unitarios (posiblemente 0). Demuestra que es posible recolorar algunos de los cubos negros de color gris de modo que cada tira de  $n \times 1 \times 1$ ,  $1 \times n \times 1$  o  $1 \times 1 \times n$  contenga exactamente un cubo gris.
- 3) En cada fila y cada columna de un tablero de  $n \times n$  hay una cantidad par de casillas coloreadas de negro. En alguna casilla negra hay una torre de ajedrez que solo tiene permitido moverse entre las casillas negras. Si se sabe que la torre puede llegar a cualquier casilla negra mediante una serie de movimientos permitidos, demuestra que la torre puede realizar un recorrido cerrado que pase por cada casilla negra exactamente una vez.

- 4) **(OIM 2016)** Determina la mayor cantidad posible de alfiles que se pueden acomodar en casillas distintas de un tablero de ajedrez (de  $8 \times 8$ ) de modo que cada alfil sea amenazado por a lo más uno de los otros alfiles. Nota: dos alfiles se amenazan si se encuentran en la misma diagonal.
- 5) **(OMM 2016)** Los números del 1 al  $n^2$  se escriben en orden en un tablero de  $n \times n$ , de modo que la primera fila contiene los números del 1 al  $n$ , la segunda del  $n + 1$  al  $2n$  y así sucesivamente. Un movimiento permitido consiste en tomar dos casillas adyacentes y sumar o restar el mismo entero a los números escritos en dichas casillas.  
Encuentra todos los valores de  $n$  para los cuales es posible, mediante una secuencia finita de movimientos permitidos, que todas las casillas tengan escrito el número 0 y, en estos casos, determina la menor cantidad de movimientos con los que es posible lograr esto.
- 6) **(IR3rd 2013)** Dados dos enteros positivos  $k$  y  $n$  con  $k < n$ , determina la mayor cantidad posible de torres que se pueden acomodar en casillas distintas de un tablero de  $n \times n$  de modo que cada torre sea amenazada por a lo más  $2k$  de las otras torres.
- 7) **(ARMO 2005)** Una cantidad finita casillas de un tablero infinito se colorean de negro y el resto del tablero se colorea de blanco de modo que cada casilla negra es adyacente a una cantidad par de casillas blancas (0, 2 o 4). demuestramos que es posible colorear las casillas blancas de amarillo y rosa de modo que cada casilla negra sea adyacente a la misma cantidad de casillas amarillas que rosas.
- 8) **(IMOSL 2006)** Un  $n$ -triángulo perforado es un tablero triangular de lado  $n$  al cual se le han recortado  $n$  casillas triangulares que apuntan hacia arriba (hay dos tipos de casillas: las que apuntan hacia arriba, al igual que el tablero, y las que apuntan hacia abajo). Un diamante es un rombo unitario con ángulos de  $60$  y  $120$ . Prueba que un  $n$ -triángulo perforado se puede teselar con diamantes si y solo si se cumple la siguiente condición: cada subtablero triangular de lado  $k$  que apunte hacia arriba contiene a lo más  $k$  casillas recortadas, para todo  $1 \leq k \leq n$ .
- 9) Una hormiga se mueve entre casillas adyacentes de un tablero de  $n \times n$  (con  $n \geq 2$ ). La ruta de la hormiga forma una trayectoria cerrada que pasa por cada casilla del tablero exactamente una vez. Demuestra que existen dos casillas adyacentes que al ser eliminadas dividen a la ruta de la hormiga en dos tramos de longitud al menos  $\frac{n^2}{4} - 1$ .
- 10) **(IMOSL 2016)** Dado un entero positivo  $n$ , encuentra el menor entero positivo  $k$  con la siguiente propiedad: es posible marcar  $k$  casillas de un tablero de  $2n \times 2n$  de modo que exista una única manera de teselar el tablero con dominós que contengan a lo más una casilla marcada cada uno.

**Siglas de las fuentes de los problemas**

**OMM:** Olimpiada Mexicana de Matemáticas, Concurso Nacional.

**IMOSL:** IMO Shortlist.

**EGMO:** European Girls' Mathematical Olympiad.

**ARMO:** All-Russian Math Olympiad.

**OIM:** Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas.

**USAMO:** United States of America Mathematical Olympiad.

**ELMOSL:** ELMO Shortlist (concurso de E.U.).

**IR3rd:** Iranian Mathematical Olympiad, Third round.

**Bibliografía**

- 1) J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado R. Vázquez Padilla. *Principio de las cosas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas, Instituto de Matemáticas, UNAM.
- 2) P. Soberón Bravo. *Combinatoria para Olimpiadas Internacionales*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas, Instituto de Matemáticas, UNAM, primera edición, 2010.
- 3) A. Tang. *IMO Training 2008: Graph Theory, Canada IMO Training 2008 Summer Camp*. <https://sites.google.com/site/imocanada/2008-summer-camp>.
- 4) Art of Problem Solving: <https://artofproblemsolving.com/>