Introducción a las Ecuaciones Funcionales

Por Carlos Jacob Rubio Barrios

Nivel Intermedio

Una *ecuación funcional* es una ecuación en donde la incógnita es una función de una o varias variables. Este tipo de ecuaciones aparecen frecuentemente en exámenes de olimpiadas de matemáticas. En este escrito abordaremos este tipo de problemas, comenzando con la definición de función.

Una *función* es una relación entre elementos de dos conjuntos X, Y, que denotamos como $f : X \to Y$, que satisface las siguientes dos condiciones.

1) Cada elemento $x \in X$ está relacionado con algún elemento $y \in Y$, que se denota como $y = f(x)$.

2) Cada elemento $x \in X$ está relacionado con exactamente un elemento de Y, esto es, si $f(x) = y$ y $f(x) = z$, entonces $y = z$.

El conjunto X se llama *dominio* de la función f; el conjunto Y se llama *contradominio o codominio* de la función f. El rango de una función $f : X \to Y$, es el conjunto de los elementos $y \in Y$ tales que $y = f(x)$ para algún $x \in X$.

Ejemplos.

1) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^2$ para todo número real x. El dominio de f es el conjunto de los números reales (denotado por $\mathbb{R}$), el contradominio de f también es el conjunto de los números reales y el rango de f es el conjunto de los números reales no negativos (observe que para cada y número real no negativo, $f(\sqrt{y}) = y$).

2) Sea $f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{Z}$ la función definida por

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x>0, \\ -1 & \text{si } x<0. \end{cases}$$

El dominio de f es el conjunto de los números reales distintos de cero, el contradominio de f es el conjunto de los números enteros y el rango de f es el conjunto $\{-1,1\}$.

A continuación, tenemos nuestro primer ejemplo de ecuación funcional.

Ejemplo 1. Determinar todas las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tales que

$$f(x-y)=f(x)+f(y)-2xy,$$

para todos los números reales x,y.

Solución. Sustituyendo $x=y=0$ en la ecuación funcional, obtenemos que $f(0)=f(0)+f(0)-0=2f(0)$, esto es, $f(0)=0$. Tratemos de utilizar esta información para eliminar el lado izquierdo de la ecuación funcional. Una manera es haciendo $x=y$. Sustituyendo en la ecuación funcional, obtenemos que $f(x-x)=f(x)+f(x)-2x^2$ para todo número real x. Luego, tenemos que $f(0)=2f(x)-2x^2$ para todo número real x. Como $f(0)=0$, la relación anterior se simplifica en $0=2f(x)-2x^2$, de donde se sigue que $f(x)=x^2$ para todo número real x. Esto muestra que si $f(x)$ es una función que es solución de la ecuación funcional, entonces $f(x)=x^2$. Para concluir que es la única solución de la ecuación funcional, lo único que falta hacer es verificar que, en efecto, satisface la ecuación funcional. Pero esto es fácil, pues $f(x-y)=(x-y)^2=x^2+y^2-2xy=f(x)+f(y)-2xy$ para cualesquiera números reales x,y. Por lo tanto, la única solución de la ecuación funcional es la función $f(x)=x^2$ para todo número real x.

Consideremos el siguiente ejemplo, un poco más complicado.

Ejemplo 2. Determinar todas las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tales que

$$f(x+y)-f(f(x)-x-y)=xf(y)-(x+y)f(y-x),$$

para todos los números reales x,y.

Solución. Como en la solución del Ejemplo 1, sustituyendo $x=y=0$ en la ecuación funcional, obtenemos que

$$f(0)=f(f(0)).$$

Si ahora sustituimos $x=0$, $y=f(0)$ en la ecuación funcional, obtenemos que

$$f(f(0))-f(0)=-f(0)^2. \tag{1}$$

Como $f(f(0)) = f(0)$, la ecuación (1) se simplifica en $f(0)^2 = 0$ y, por lo tanto, $f(0) = 0$. Luego, si $x = 0$ entonces $f(y) - f(-y) = -yf(y)$ para todo número real y, esto es, $(y+1)f(y) = f(-y)$ para todo número real y. Luego, si $y = -k$, entonces $(-k+1)f(-k) = f(k)$. Por lo tanto, para todo número real k, tenemos que

$$f(k) = (-k+1)f(-k) = (-k+1)((k+1)f(k)) = (1-k^2)f(k).$$

Si $f(k) \neq 0$, entonces $1 - k^2 = 1$, de donde se sigue que $k = 0$. Esto significa que si $k \neq 0$, entonces $f(k) = 0$. Pero ya teníamos que $f(0) = 0$. Por lo tanto, $f(x) = 0$ para todo número real x. Por último, es fácil verificar que esta funcón satisface la ecuación funcional. Luego, como en el Ejemplo 1, la ecuación funcional tiene una única solución: La función $f(x) = 0$ para todo número real x.

A veces tenemos más de una relación, como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3. Hallar todas las funciones $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tales que $f(0) = 1$, $f(f(n)) = n$ y $f(f(n+2)+2) = n$ para todo entero n.

Solución. Si $n = 0$, tenemos que $f(f(0)) = 0$ y, como $f(0) = 1$, resulta que $f(1) = 0$. Ahora, la relación $f(f(n+2)+2) = n$ implica que $f(f(f(n+2)+2)) = f(n)$. Por otro lado, la relación $f(f(n)) = n$ que es válida para todo entero n, implica que $f(f(f(n+2)+2)) = f(n+2)+2$. Por lo tanto, tenemos que

$$f(n+2) + 2 = f(n) \tag{2}$$

para todo entero n. Usaremos esta relación para calcular los primeros valores de $f(n)$. Ya tenemos que $f(0) = 1$ y $f(1) = 0$. Con $n = 0$, obtenemos que $f(2)+2 = f(0) = 1$, esto es, $f(2) = -1$. Con $n = 1$, obtenemos que $f(3) + 2 = f(1) = 0$, esto es, $f(3) = -2$. Con estos valores de $f(n)$ podemos conjeturar que $f(n) = 1 - n$ para todo entero n. Demostraremos por inducción, que si n es un entero mayor o igual que cero, entonces $f(n) = 1 - n$. Tenemos que $f(0) = 1$ y $f(1) = 0$. Supongamos que para algún entero $n \geq 1$ y para todo entero k tal que $0 \leq k \leq n$, se cumple que $f(k) = 1 - k$. Aplicando la relación (2) y la hipótesis de inducción, se sigue que

$$f(n+1) = f(n-1) - 2 = 1 - (n-1) - 2 = 1 - (n+1),$$

lo que completa la inducción.
De manera análoga, se puede probar por inducción el caso de los enteros negativos. Para concluir que la función $f(n) = 1 - n$ es la única solución, solo resta verificar que satisface todas las condiciones del problema, lo cual es fácil de hacer.

El siguiente ejemplo apareció en el Concurso Nacional de la 29^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas.

Ejemplo 4. (Olimpiada Mexicana de Matemáticas, 2015) Sea $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ una función tal que $f(1) = 1$ y

$$f(a + b + ab) = a + b + f(ab)$$

para cualesquiera enteros positivos a, b, donde $\mathbb{Z}^+$ denota el conjunto de los enteros positivos. Determinar el valor de $f(2015)$.

Solución. Para $b = 1$, tenemos que

$$f(2a + 1) = a + 1 + f(a), \tag{3}$$

para todo entero positivo a. En particular, $f(3) = 3$.
Para $b = 3$, tenemos que

$$f(4a + 3) = a + 3 + f(3a),$$

para todo entero positivo a. Por otro lado, usando la relación (3) tenemos también que

$$f(4a + 3) = f(2(2a + 1) + 1) = (2a + 1) + 1 + f(2a + 1) = 3a + 3 + f(a),$$

para todo entero positivo a. Luego, $a + 3 + f(3a) = 3a + 3 + f(a)$ para todo entero positivo a, esto es,

$$f(3a) = 2a + f(a), \tag{4}$$

para todo entero positivo a.
Calculemos ahora $f(6a+3)$ de dos maneras. Usando primero la relación (4) y después la relación (3), tenemos que

$$f(6a + 3) = f(3(2a + 1)) = 2(2a + 1) + f(2a + 1) = 5a + 3 + f(a),$$

para todo entero positivo a.
Usando ahora la relación (3), tenemos que

$$f(6a + 3) = f(2(3a + 1) + 1)) = (3a + 1) + 1 + f(3a + 1) = 3a + 2 + f(3a + 1),$$

para todo entero positivo a. Luego, $5a + 3 + f(a) = 3a + 2 + f(3a + 1)$ para todo entero positivo a, esto es,

$$f(3a + 1) = 2a + 1 + f(a), \tag{5}$$

para todo entero positivo a. En particular, $f(4) = 2 + 1 + f(1) = 4$.
Análogamente, calculemos $f(6a+1)$ de dos maneras. Usando la relación (5), tenemos que

$$f(6a + 1) = f(3(2a) + 1) = 2(2a) + 1 + f(2a) = 4a + 1 + f(2a),$$

para todo entero positivo a.
Ahora, usando primero la relación (3) y después la relación (4), tenemos que

$$\begin{aligned} f(6a + 1) &= f(2(3a) + 1) = 3a + 1 + f(3a) = 3a + 1 + 2a + f(a) \\ &= 5a + 1 + f(a), \end{aligned}$$

para todo entero positivo a. Luego, $4a+1+f(2a) = 5a+1+f(a)$ para todo entero positivo a, esto es,

$$f(2a) = a + f(a), \tag{6}$$

para todo entero positivo a. En particular, $f(2) = 1 + f(1) = 2$.
Como $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 3$ y $f(4) = 4$, estamos tentados a pensar que $f(n) = n$ para todo entero positivo n. Es fácil verificar que esta función satisface las condiciones del problema.
Demostraremos, por inducción, que $f(n) = n$ para todo entero positivo n. La base de inducción es $f(1) = 1$, la cual es cierta por hipótesis. Supongamos que para algún entero $n \geq 1$ y para todo entero k tal que $1 \leq k < n$, se cumple que $f(k) = k$.
Si n es par, entonces $n = 2m$ para algún entero positivo $m < n$. Luego, aplicando la relación (6) y la hipótesis de inducción, obtenemos que

$$f(n) = f(2m) = m + f(m) = m + m = 2m = n.$$

Ahora, si n es impar, entonces $n = 2m+1$ para algún entero positivo $m < n$. Luego, aplicando la relación (3) y la hipótesis de inducción, obtenemos que

$$f(n) = f(2m+1) = m + 1 + f(m) = m + 1 + m = 2m + 1 = n.$$

Por lo tanto, $f(n) = n$, lo que completa la inducción. En particular, $f(2015) = 2015$. De paso hemos demostrado que la única función que satisface las condiciones del problema es la función $f(n) = n$ para todo entero positivo n.

En el ejemplo anterior fue muy útil calcular las imágenes de algunos valores del dominio de la función, lo cual sirvió para poder conjeturar. Veamos un ejemplo donde puede no ser tan inmediato establecer una conjetura.

Ejemplo 5. Hallar todas las funciones $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tales que $f(1) = 1$ y

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy(x+y)$$

para cualesquiera enteros x, y.

Solución. Comencemos por calcular las imágenes de algunos enteros. Tenemos que

$$\begin{aligned}
f(2) &= f(1) + f(1) + 2 = 1 + 1 + 2 = 4,\\
f(3) &= f(1) + f(2) + 2 \cdot 3 = 1 + 4 + 6 = 11,\\
f(4) &= f(2) + f(2) + 4 \cdot 4 = 4 + 4 + 16 = 24,\\
f(5) &= f(2) + f(3) + 6 \cdot 5 = 4 + 11 + 30 = 45,\\
f(6) &= f(3) + f(3) + 9 \cdot 6 = 11 + 11 + 54 = 76.
\end{aligned}$$

Observando que

$$\begin{aligned}
f(2) &= 1 + (2\cdot 1 + 1) = f(1) + 2(1) + 1,\\
f(3) &= 4 + (2\cdot 3 + 1) = f(2) + 2(1+2) + 1,\\
f(4) &= 11 + (2\cdot 6 + 1) = f(3) + 2(1+2+3) + 1,\\
f(5) &= 21 + (2\cdot 10 + 1) = f(4) + 2(1+2+3+4) + 1,\\
f(6) &= 45 + (2\cdot 15 + 1) = f(5) + 2(1+2+3+4+5) + 1,
\end{aligned}$$

conjeturamos que

$$f(n) = f(n-1) + 2(1+2+\cdots+(n-1)) + 1 = f(n-1) + n(n-1) + 1,$$

para todo entero $n \geq 2$. Ahora, tratemos de hallar una fórmula cerrada para $f(n)$ a partir de esta fórmula recursiva de f. Aplicando repetidamente esta fórmula recursiva de f, obtenemos que

$$\begin{aligned}
f(n) &= f(n-1) + (n-1)n + 1\\
&= f(n-2) + (n-2)(n-1) + (n-1)n + 2\\
&= f(n-3) + (n-3)(n-2) + (n-2)(n-1) + (n-1)n + 3\\
&\;\vdots\\
&= f(1) + (1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \cdots + (n-1)n) + (n-1).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la conjetura es

$$\begin{aligned}
f(n) &= 1 + \sum_{i=1}^{n-1} i(i+1) + (n-1) = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} i + (n-1)\\
&= 1 + \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n^2\right) + \left(\frac{n(n+1)}{2} - n\right) + n - 1\\
&= \frac{n^3+2n}{3}, \qquad (7)
\end{aligned}$$

para todo entero $n \geq 2$. Se deja de ejercicio a lector demostrar por inducción en n, que la relación (7) es verdadera para todo entero $n \geq 2$.

Calculemos ahora $f(0)$. Como $0 = -1 + 1$, haciendo $x = -1$, $y = 1$ en la ecuación funcional, obtenemos que $f(0) = f(-1) + f(1)$. Para calcular el valor de $f(-1)$, hagamos $x = -1$, $y = 2$ en la ecuación funcional. Así, $f(1) = f(-1) + f(2) + (-2)(-1+2)$, esto es, $1 = f(-1) + 4 - 2 = f(-1) + 2$, de donde obtenemos que $f(-1) = -1$ y, en consecuencia, $f(0) = f(-1) + f(1) = 0$. Es fácil ver que la relación (7) también se verifica para $n = 0$ y $n = 1$. Usaremos el hecho de que $f(0) = 0$ para determinar $f(n)$ para todo entero $n < 0$. Usando la identidad, $0 = -n + n$ válida para todo entero n, tenemos que $f(0) = f(n) + f(-n)$ para todo entero n, esto es, $f(n) = -f(-n)$ para todo entero n, ya que $f(0) = 0$. Luego, si $n < 0$, entonces $-n > 0$ y, aplicando la relación (7) válida para todo entero no negativo, obtenemos que $f(n) = -f(-n) = -\left(\frac{(-n)^3+2(-n)}{3}\right) = \frac{n^3+2n}{3}$ para todo entero $n < 0$.

Por lo tanto, $f(n) = \frac{n^3+2n}{3}$ para todo entero n. Por último, es fácil verificar que esta función satisface la ecuación funcional, de manera que es la única solución.

El siguiente ejemplo apareció en la 28^a Olimpiada Internacional de Matemáticas.

Ejemplo 6. (Olimpiada Internacional, 1987) Demostrar que no existe una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que

$$f(f(n)) = n + 1987$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ es el conjunto de los números naturales.

Solución. Supongamos, por contradicción, que existe una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $f(f(n)) = n + 1987$ para todo número natural n. Por un lado, tenemos que

$$f(f(f(n))) = f(n + 1987)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y, por otro lado, tenemos que

$$f(f(f(n))) = f(n) + 1987$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego,

$$f(n + 1987) = f(n) + 1987 \tag{8}$$

para todo número natural n.
Más aún, tenemos el siguiente resultado.

Lema. $f(n + 1987m) = f(n) + 1987m$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$.

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$. Si $m = 0$, el resultado es inmediato. Supongamos que el resultado es cierto para algún número natural m. Entonces, aplicando primero la relación (8) y después la hipótesis de inducción, obtenemos que

$$\begin{aligned} f(n + 1987(m + 1)) &= f((n + 1987m) + 1987) = f(n + 1897m) + 1987 \\ &= f(n) + 1987m + 1987 = f(n) + 1987(m + 1), \end{aligned}$$

lo que completa la inducción. □

Ahora, sea r un número natural tal que $r \leq 1986$. Como $f(r)$ y 1987 son números naturales, el Algoritmo de la división garantiza la existencia de números naturales k y ℓ tales que $f(r) = 1987k + \ell$ con $\ell \leq 1986$. Luego, tenemos que

$$r + 1987 = f(f(r)) = f(\ell + 1987k) = f(\ell) + 1987k,$$

donde la última igualdad se sigue por el lema anterior.
Por lo tanto, $r+1987 = f(\ell)+1987k$, esto es, $r-f(\ell) = 1987(k-1)$. Como $r \leq 1986$ y $f(\ell) \geq 0$, tenemos que $r - f(\ell) \leq 1986$, lo que significa que $1987(k - 1) \leq 1986$. Como k es un número natural, es fácil ver que esta desigualdad se satisface si y solo si $k = 0$ o $k = 1$.

1) Si $k=0$, entonces $f(r)=\ell$ y $f(\ell)=f(f(r))=r+1987$, lo cual implica que $r\neq\ell$.

2) Si $k=1$, entonces $f(r)=1987+\ell$ y $f(\ell)=r$, lo cual implica que $r\neq\ell$.

Hemos demostrado así, que para cada número natural $r\leq 1986$, existe un número natural $\ell\leq 1986$, con $\ell\neq r$, tal que $f(r)=\ell$ y $f(\ell)=r+1987$, o $f(\ell)=r$ y $f(r)=\ell+1987$. Observemos que ambos casos no pueden suceder simultáneamente. En efecto, si para algún r número natural menor que 1987 existen números naturales $\ell_1\leq 1986$ y $\ell_2\leq 1986$ tales que $f(r)=\ell_1$ y $f(r)=\ell_2+1987$, entonces $\ell_1=\ell_2+1987$, esto es, $\ell_1-\ell_2=1987$, lo cual es imposible. De esta manera, el conjunto $\{0,1,2,\ldots,1986\}$ se ha dividido en parejas (r,ℓ), lo que es una contradicción, ya que dicho conjunto tiene una cantidad impar de elementos.

Cuando comenzamos a trabajar con una ecuación funcional, siempre es una buena idea considerar valores pequeños, como $x=0$, $x=1$, y ver qué sucede. Sin embargo, esto puede no ser suficiente para resolver todo el problema. A veces será necesario considerar valores más grandes. Podemos pensar en la ecuación funcional como un sistema gigante de ecuaciones e intentar encontrar una forma de hacer que algunas cosas se cancelen.

Ejemplo 7. (Corea, 2000) Determinar todas las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tales que

$$f(x^2-y^2)=(x-y)(f(x)+f(y))$$

para todos los números reales x,y.

Solución. Sea z un número real positivo arbitrario. Sustituyendo $x=\sqrt{z}$, $y=0$ en la ecuación funcional, obtenemos que

$$f(z)=\sqrt{z}(f(\sqrt{z})+f(0)).$$

Si ahora sustituimos $x=0$, $y=\sqrt{z}$ en la ecuación funcional, obtenemos que

$$f(-z)=-\sqrt{z}(f(0)+f(\sqrt{z})).$$

Comparando estas relaciones, obtenemos que $f(z)=-f(-z)$.
Si ahora sustituimos $y=-z$ y usamos que $f(-z)=-f(z)$, resulta que

$$f(x^2-z^2)=(x+z)(f(x)+f(-z))=(x+z)(f(x)-f(z)),$$

para todo número real x. Sin embargo, si $y=z$, tenemos también que

$$f(x^2-z^2)=(x-z)(f(x)+f(z))$$

para todo número real x.
Por lo tanto, $(x-z)(f(x)+f(z))=(x+z)(f(x)-f(z))$ para todo $x\in\mathbb{R}$, de donde se sigue que $xf(z)=zf(x)$ para todo número real x, esto es, $f(x)=\frac{f(z)}{z}x$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Como $\frac{f(z)}{z}$ es una constante, $f(x)$ tiene la forma Cx con C una constante. Es fácil verificar que si C es cualquier número real, la función $f(x) = Cx$ para todo $x \in \mathbb{R}$, satisface la ecuación funcional. Por lo tanto, las soluciones de la ecuación funcional son todas las funciones de esta forma.

Ejemplo 8. Determinar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(xf(y) - yf(x)) = f(xy) - xy,$$

para cualesquiera números reales x, y.

Solución. Sustituyendo $y = 0$ en la ecuación funcional, obtenemos que $f(xf(0)) = f(0)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Si $f(0) \neq 0$, para cada número real r podemos encontrar un número real x tal que $xf(0) = r$ (de hecho, $x = \frac{r}{f(0)}$), lo cual significa que $xf(0)$ toma todos los valores reales posibles y, en consecuencia, $f(r) = f(0)$ para todo número real r. Sustituyendo en la ecuación funcional, obtenemos que $f(0) = f(0) - xy$ para cualesquiera x, y, esto es, $xy = 0$ para cualesquiera x, y, lo cual evidentemente es falso. Por lo tanto, $f(0) = 0$.
Si ahora sustituimos $y = x$ en la ecuación funcional, obtenemos que $f(0) = f(x^2) - x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$, esto es, $f(x^2) = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (pues $f(0) = 0$). Esto significa que $f(x) = x$ para todo número real $x \geq 0$, pues para cada número real $r \geq 0$ existe un número real y tal que $y^2 = r$.
Ahora, sean x, y números reales menores que cero. Como $xy > 0$, tenemos entonces que $f(xy) = xy$. Luego, la ecuación funcional en este caso es $f(xf(y) - yf(x)) = 0$. Si $xf(y) - yf(x) > 0$, entonces $f(xf(y) - yf(x)) = xf(y) - yf(x)$ y, en consecuencia, $xf(y) - yf(x) = 0$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $xf(y) - yf(x) \leq 0$. De manera análoga, obtenemos que $yf(x) - xf(y) \leq 0$, esto es, $-(xf(y) - yf(x)) \leq 0$. Luego, la única posibilidad es que $xf(y) - yf(x) = 0$. En conclusión, $\frac{f(x)}{x} = \frac{f(y)}{y}$ para cualesquiera números $x < 0$, $y < 0$. Esto significa que $\frac{f(x)}{x}$ es constante para todo $x < 0$, esto es, $f(x) = cx$ para todo $x < 0$ con c una constante. Si $c = 1$, tenemos que $f(x) = x$ para todo $x < 0$ y, es fácil ver que la función $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ satisface la ecuación funcional.
Supongamos que $c \neq 1$ y sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < 0 < y$. Por lo demostrado antes, tenemos que $f(x) = cx$, $f(y) = y$ y $f(xy) = cxy$. Sustituyendo estos valores en la ecuación funcional, obtenemos que

$$f((1-c)xy) = f(xy - cxy) = f(xf(y) - yf(x)) = f(xy) - xy = (c-1)xy.$$

Sustituyendo $x = -1$, $y = 1$, obtenemos que $f(c-1) = -(c-1)$. Como $f(x) = x$ para todo $x \geq 0$ y $c \neq 1$, necesariamente $c - 1 < 0$. Luego, $f(c-1) = c(c-1)$. Por lo tanto, $c(c-1) = -(c-1)$, esto es, $c = -1$. Esto significa que $f(x) = -x$ para todo $x < 0$. Como $f(x) = x$ para todo $x \geq 0$, concluimos que $f(x) = |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$ es otra solución, solo debemos verificar que esta función satisface la ecuación funcional. Los detalles de este aserto se dejan de ejercicio al lector.
En conclusión, las funciones $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y $f(x) = |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$ son las únicas soluciones.

Ejemplo 9. (Estados Unidos, 2014) Determinar todas las funciones $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ tales que

$$xf(2f(y)-x)+y^2f(2x-f(y))=\frac{f(x)^2}{x}+f(yf(y))$$

para todos los enteros x,y con $x\neq 0$.

Solución. Demostraremos primero que $f(0)=0$. Supongamos, por contradicción, que $f(0)\neq 0$. Sustituyendo $x=2f(0)$, $y=0$ en la ecuación funcional, obtenemos que

$$2f(0)^2=\frac{f(2f(0))^2}{2f(0)}+f(0),$$

esto es, $(4f(0)-2)f(0)^2=f(2f(0))^2$, lo cual significa que $4f(0)-2$ es un cuadrado. Sin embargo, $4f(0)-2\equiv 2 \pmod 4$, lo cual es una contradicción ya que todo cuadrado es congruente con 0 o 1 módulo 4. Por lo tanto, $f(0)=0$.
Sustituyendo ahora $y=0$ en la ecuación funcional y simplificando con $f(0)=0$, obtenemos que $xf(-x)=\frac{f(x)^2}{x}$. Si $x\neq 0$, esta igualdad es equivalente a la igualdad

$$x^2f(-x)=f(x)^2.$$

Intercambiando x por $-x$, obtenemos también que

$$x^2f(x)=f(-x)^2$$

para todo entero $x\neq 0$.
De estas dos últimas relaciones, obtenemos que $x^2f(x)=\frac{f(x)^4}{x^4}$ para todo entero $x\neq 0$, esto es, $x^6f(x)=f(x)^4$ que es equivalente a $f(x)(x^6-f(x)^3)=0$. De aquí que $f(x)=0$ o $f(x)=x^2$ para todo entero x.
Es fácil ver que cada una de las funciones $f(x)=0$ para todo entero x y $f(x)=x^2$ para todo entero x, satisfacen el problema. Demostraremos que si $f(t)=0$ para algún entero $t\neq 0$, entonces $f(x)=0$ para todo entero x. Supongamos que $f(y)=0$ con $y\neq 0$. Sustituyendo en la ecuación funcional, obtenemos que

$$xf(-x)+y^2f(2x)=\frac{f(x)^2}{x}.$$

Sin embargo, como $x^2f(-x)=f(x)^2$, la ecuación anterior se puede reescribir como

$$\frac{f(x)^2}{x}+y^2f(2x)=\frac{f(x)^2}{x},$$

de donde se sigue que $y^2f(2x)=0$. Como $y\neq 0$, necesariamente $f(2x)=0$. Esto muestra que $f(x)=0$ para todo entero par x. Supongamos que existe un entero impar m tal que $f(m)=m^2$. Sustituyendo $x=2k$ con $k\neq 0$ en la ecuación funcional, obtenemos que $y^2f(4k-f(y))=f(yf(y))$ para todo entero y. En particular, si $y=m$, entonces $m^2f(4k-m^2)=f(m^3)$. Observemos que $f(4k-m^2)\neq 0$ si y solo si $f(m^3)\neq 0$ (pues $m^2\neq 0$ al ser m impar). Supongamos que ambos $f(4k-m^2)$ y

$f(m^3)$ no son cero. Entonces, $f(4k-m^2)=(4k-m^2)^2$ y $f(m^3)=m^6$, de donde obtenemos la ecuación $m^2(4k-m^2)^2=m^6$, esto es, $4k-m^2=\pm m^2$. Es fácil ver que esta ecuación es imposible ya que $k\neq 0$ y m es impar. Por lo tanto, debemos tener que

$$m^2 f(4k-m^2)=f(m^3)=0.$$

Como m es impar, se sigue que $f(4k-m^2)=0$ y $m^2\equiv 1 \pmod 4$. Luego, $4k-m^2\equiv 3 \pmod 4$, lo que significa que $f(x)=0$ para todo entero $x\equiv 3 \pmod 4$ y $x\neq -m^2$ (pues $k\neq 0$). Por otro lado, de $x^2f(-x)=f(x)^2$ tenemos que si $f(x)=0$ y $x\neq 0$, entonces $f(-x)=0$. Como $f(4k-m^2)=0$ y $4k-m^2\neq 0$, se sigue que $f(m^2-4k)=0$. Luego, $f(x)=0$ para todo $x\equiv 1 \pmod 4$ y $x\neq m^2$ (pues $m^2-4k\equiv 1 \pmod 4$ y $k\neq 0$). Con esto hemos demostrado que $f(x)=0$ para todo entero $x\neq \pm m^2$. Como $f(m)\neq 0$ (pues $f(m)=m^2$ y m es impar), necesariamente $m=\pm m^2$. Elevando al cuadrado esta ecuación, obtenemos que $m^2=m^4$ y, dividiendo por $m\neq 0$, resulta que $m=m^3$. Como $f(m^3)=0$, se sigue que $f(m)=0$, lo que es una contradicción.
Hemos demostrado así que si $f(y)=0$ para algún entero $y\neq 0$, entonces $f(x)=0$ para todo entero x.
En conclusión, las únicas funciones que son solución de la ecuación funcional son las funciones $f(x)=0$ para todo entero x y $f(x)=x^2$ para todo entero x.

En la solución del ejemplo anterior, obtuvimos que $f(x)=0$ o $f(x)=x^2$ para todo entero x. En general, esto no significa que $f(x)=0$ para todo entero x o $f(x)=x^2$ para todo entero x. Por ejemplo, si S es cualquier subconjunto de enteros y $S\neq\mathbb{Z}$, la función

$$f_S(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x\in S,\\ \\ x^2 & \text{si } x\notin S,\end{cases}$$

satisface la primera afirmación y no satisface la segunda. En principio, la ecuación funcional del ejemplo anterior podría tener una infinidad de soluciones (una función por cada subconjunto S de enteros). Este error a menudo se olvida y le ha sido dado un nombre especial en la comunidad olímpica como *la trampa puntual*. En una ecuación funcional que está sujeta a la trampa puntual, usar contradicción es usualmente útil (como lo hicimos en el ejemplo anterior), para determinar el conjunto correcto de soluciones a partir de la (posible) infinidad de soluciones puntuales. Los Ejercicios 9 y 10 al final de este breve escrito, son ejemplos de ecuaciones funcionales en donde aparece la trampa puntual.

Concluimos este escrito con un problema de la olimpiada matemática de China.

Ejemplo 10. (China, 2007) Determinar todas las funciones $f:\mathbb{Q}^+\to\mathbb{Q}^+$ tales que

$$f(a)+f(b)+2abf(ab)=\frac{f(ab)}{f(a+b)},$$

para todos $a,b\in\mathbb{Q}^+$, donde $\mathbb{Q}^+$ denota el conjunto de los números racionales positivos.

Solución. Haciendo $a = b = 1$ en la ecuación funcional, obtenemos que $4f(1) = \frac{f(1)}{f(2)}$, lo cual implica que $f(2) = \frac{1}{4}$ pues $f(1) \neq 0$. Si ahora sustituimos $a = b = 2$ en la ecuación funcional, obtenemos que $2f(2) + 8f(4) = 1$, de donde se sigue que $f(4) = \frac{1}{16}$.
Sustituyendo $b = 1$ en la ecuación funcional, obtenemos que $(1 + 2a)f(a) + f(1) = \frac{f(a)}{f(a+1)}$, lo cual implica la fórmula recursiva

$$f(a+1) = \frac{f(a)}{(1+2a)f(a) + f(1)}. \tag{9}$$

Usando esta fórmula recursiva, obtenemos que $f(3) = \frac{1}{5+4f(1)}$ y $f(4) = \frac{1}{7+5f(1)+4f(1)^2}$. Como $f(4) = \frac{1}{16}$, se sigue que $4f(1)^2 - 5f(1) - 9 = 0$, cuyas soluciones son $f(1) = 1$ o $f(1) = -\frac{9}{4}$. Al ser $f(1) > 0$, la única posibilidad es $f(1) = 1$. Por lo tanto, $f(3) = \frac{1}{9}$ y la relación (9) se simplifica como

$$f(a+1) = \frac{f(a)}{(1+2a)f(a) + 1}.$$

Lema 1. $f(n) = \dfrac{1}{n^2}$ para todo entero positivo n.

Demostración. La prueba la haremos por inducción en n. El resultado es cierto para $n = 1, 2, 3, 4$. Supongamos que la fórmula es cierta para cierto $n = k \geq 1$. Entonces, aplicando la relación (9), resulta que

$$f(k+1) = \frac{\frac{1}{k^2}}{\frac{1+2k}{k^2} + 1} = \frac{1}{1 + 2k + k^2} = \frac{1}{(k+1)^2},$$

lo que prueba el resultado para $n = k + 1$ y concluye la inducción. □

Lema 2. $f(a+n) = \dfrac{f(a)}{(n^2 + 2na)f(a) + 1}$ para todo entero positivo n y todo número racional positivo a.

Demostración. Procederemos por inducción en n. El resultado es cierto para $n = 1$. Supongamos que la igualdad es cierta para cierto $n = k \geq 1$. Aplicando primero la relación (9) y después la hipótesis de inducción, obtenemos que

$$\begin{aligned} f(a+k+1) &= \frac{f(a+k)}{(1 + 2(a+k))f(a+k) + 1} = \frac{\frac{f(a)}{(k^2+2ka)f(a)+1}}{\frac{(1+2(a+k))f(a)}{(k^2+2ka)f(a)+1} + 1} \\ &= \frac{f(a)}{(1 + 2(a+k))f(a) + (k^2 + 2ka)f(a) + 1} \\ &= \frac{f(a)}{((k+1)^2 + 2a(k+1))f(a) + 1}, \end{aligned}$$

lo que prueba el resultado para $n = k + 1$ y concluye la inducción. □

Lema 3. $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = n^2$ para todo entero positivo n.

Demostración. Sustituyendo $a = n$ y $b = \frac{1}{n}$ en la ecuación funcional, obtenemos que

$$f(n) + f\left(\frac{1}{n}\right) + 2f(1) = \frac{f(1)}{f\left(n + \frac{1}{n}\right)}.$$

Como $f(1) = 1$ y, por el Lema 1, $f(n) = \frac{1}{n^2}$, obtenemos que

$$f\left(n + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\frac{1}{n^2} + f\left(\frac{1}{n}\right) + 2}.$$

Ahora, aplicando el Lema 2 con $a = \frac{1}{n}$, tenemos que

$$f\left(\frac{1}{n} + n\right) = \frac{f(\frac{1}{n})}{(n^2+2)f(\frac{1}{n}) + 1}.$$

Eliminando $f(\frac{1}{n} + n)$ de estas ecuaciones y simplificando, resulta que

$$f\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n^2} - n^2\right) f\left(\frac{1}{n}\right) - 1 = 0,$$

esto es, $(f(\frac{1}{n}) + \frac{1}{n^2})(f(\frac{1}{n}) - n^2) = 0$. Como $f(\frac{1}{n}) > 0$, se sigue que $f(\frac{1}{n}) = n^2$. $\square$

Lema 4. $f\left(\dfrac{m}{n}\right) = \dfrac{n^2}{m^2}$ para todos los enteros positivos m y n.

Demostración. La prueba la haremos por inducción en m. El caso $m = 1$ es cierto por el Lema 3. Supongamos que el resultado es cierto para $m = k \geq 1$. Sustituyendo $a = \frac{k}{n}$ y $b = \frac{1}{n}$ en la ecuación funcional, obtenemos que

$$f\left(\frac{k}{n}\right) + f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{2k}{n^2} f\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{f\left(\frac{k}{n^2}\right)}{f\left(\frac{k+1}{n}\right)}.$$

Aplicando ahora la hipótesis de inducción, resulta que

$$\frac{n^2}{k^2} + n^2 + \frac{2k}{n^2}\frac{n^4}{k^2} = \frac{\frac{n^4}{k^2}}{f(\frac{k+1}{n})}.$$

Por lo tanto,

$$f\left(\frac{k+1}{n}\right) = \frac{\frac{n^4}{k^2}}{n^2(\frac{1}{k^2} + 1 + \frac{2}{k})} = \frac{n^2}{1 + k^2 + 2k} = \frac{n^2}{(k+1)^2},$$

lo que prueba el resultado para $m = k + 1$ y concluye la inducción. $\square$

Como cada número racional positivo q es de la forma $\frac{m}{n}$ con m y n enteros positivos, tenemos la única solución $f(q) = \frac{1}{q^2}$ para todo $q \in \mathbb{Q}^+$. Finalmente, es fácil verificar que esta función satisface la ecuación funcional:

$$f(a) + f(b) + 2abf(ab) = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{2ab}{a^2b^2} = \frac{(a+b)^2}{a^2b^2} = \frac{f(ab)}{f(a+b)}.$$

A continuación dejamos unos ejercicios para que practique el lector.

Ejercicios

1) Determina todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que
$$2f(x+y) + 6y^3 = f(x+2y) + x^3$$
para cualesquiera números reales x, y.

2) Determina todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que
$$f(x-y) = f(x)f(y)$$
para todos los números reales x, y.

3) Determina todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que
$$f(f(x+y)) = x + f(y)$$
para todos los números reales x, y.

4) Determina todas las funciones $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ que satisfacen las siguientes dos condiciones:
   a) $f(x+1) = f(x) + 1$ para todo $x \in \mathbb{Q}$.
   b) $f(x^3) = f(x)^3$ para todo $x \in \mathbb{Q}$.

5) Determina todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que
$$f(x^3) + f(y^3) = (x+y)(f(x^2) + f(y^2) - f(xy))$$
para todos los números reales x, y.

6) Determina todas las funciones $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ tales que $f(1) = 1$ y
$$f(a+b) = f(a) + f(b) + ab$$
para todos $a, b \in \mathbb{Z}^+$.

7) Determina todas las funciones $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ tales que
$$f\left(x + \frac{y}{x}\right) = f(x) + \frac{f(y)}{f(x)} + 2y$$
para todos los números racionales positivos x, y.

8) Determina todas las funciones $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(a+b+c)+f(a)+f(b)+f(c)=f(a+b)+f(b+c)+f(c+a)+f(0)$$

para todos los números racionales a, b y c.

9) (Irán, 1999) Determina todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(f(x)+y)=f(x^2-y)+4f(x)y$$

para todos los números reales x, y.

10) (Japón, Final, 2004) Determina todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(xf(x)+f(y))=f(x)^2+y$$

para todos los números reales x, y.

Bibliografía

1) J. A. Gómez Ortega, C. J. Rubio Barrios, R. Valdez Delgado. *Concursos Nacionales de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas: 1987-2016*. Colección Papirhos, Instituto de Matemáticas, UNAM, 2019.

2) `https://artofproblemsolving.com/`