Propiedades Básicas de las Medianas

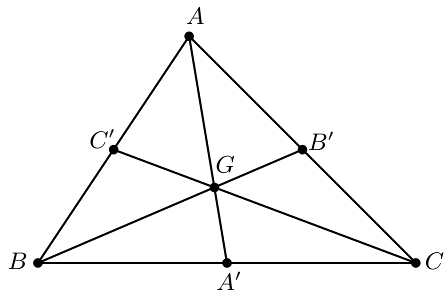
Por José Antonio Gómez Ortega y Víctor Hugo Almendra Hernández

Nivel Intermedio

La configuración de un triángulo y sus medianas está presente en una diversidad de problemas de geometría. Esta configuración ha servido de inspiración para el planteamineto de problemas de olimpiadas de matemáticas. Veremos aquí propiedades básicas de las medianas, al igual que algunos de los problemas típicos del tema.

Sean ABC un triángulo y A', B', C' los puntos medios de BC, CA y AB, respectivamente. Los segmentos AA', BB' y CC' son conocidos como *las medianas* del triángulo ABC. Estos tres segmentos son concurrentes. Para ver esto, sea G la intersección de BB' y CC'. Como $\frac{AB'}{B'C} = \frac{AC'}{C'B}$, por el Teorema de Tales[2], tenemos que $B'C'$ es paralela a BC y $B'C' = \frac{1}{2}BC$. Luego, los triángulos GBC y $GB'C'$ son semejantes en razón $2:1$. Esto nos dice que $BG = 2GB'$ y $CG = 2GC'$, por lo que las medianas BB' y CC' se cortan en el punto G que las divide en razón $2:1$. De igual forma, la otra mediana AA' cortará a la mediana BB' en un punto que las divide en razón $2:1$. Como en BB' solamente hay un punto con tal propiedad, resulta que AA' también pasa por G y, por lo tanto, AA', BB' y CC' son concurrentes en el punto G. Este punto G se conoce como el *centroide*, *baricentro*, *gravicentro* o *centro de gravedad* del triángulo ABC.

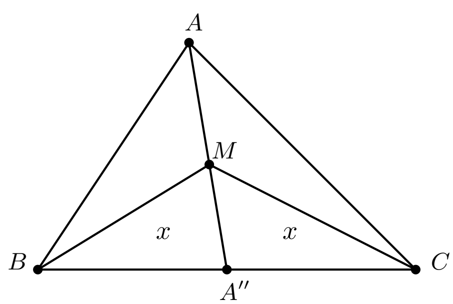
[2] *Teorema de Tales.* Si C' y B' se encuentran en los lados AB y CA del triángulo ABC, respectivamente, entonces las tres afirmaciones siguientes son equivalentes.
(i) ABC y $AC'B'$ son semejantes, (ii) $\frac{AC'}{C'B} = \frac{AB'}{B'C}$, (iii) $B'C'$ es paralela a BC.



Las medianas de un triángulo dividen a este en 6 triángulos de la misma área. En efecto, por ser A' punto medio de BC, las longitudes de las bases de los triángulos GBA' y $GA'C$ son iguales y, como los triángulos también tienen la misma altura, resulta que sus áreas[3] (GBA') y $(GA'C)$ son iguales, las denotaremos con x. De igual manera tenemos que $(GCB') = (GB'A) = y$, $(GAC') = (GC'B) = z$. Con el mismo razonamiento tenemos que $(ABA') = (AA'C)$, luego $x + 2z = x + 2y$, por lo que $y = z$. Como también $(CBB') = (B'BA)$, tenemos que $x = z$, por tanto $x = y = z$.

Proposición 1. Un punto M dentro de un triángulo ABC tiene la propiedad de que $(ABM) = (ACM)$ si y solo si M se encuentra en la mediana AA'.

Demostración. Sea A'' el punto donde la recta por A y M corta a BC.



Supongamos que se cumple la igualdad de áreas $(ABM) = (ACM)$. Como los triángulos ABM y ACM tienen a AM como base común, las alturas desde B y C sobre AM son iguales. Además, como MA'' es común a los triángulos $A''BM$ y $A''MC$, tenemos que sus áreas $(BA''M)$ y $(A''CM)$ son iguales, por lo que $BA'' = A''C$, de donde se sigue que A'' es punto medio de BC. Luego, M se encuentra en la mediana AA'.
El recíproco se sigue de que $(BA'M) = (A'MC)$ y $(BA'A) = (A'AC)$. $\square$

Corolario 2. Un punto M dentro de un triángulo ABC tiene la propiedad de que

[3]Como siempre, usaremos la notación (ABC) para denotar el área del triángulo ABC.

la razón de las distancias a los lados AB y AC es inversamente proporcional a las longitudes de los lados AB y AC, si y solo si M está en la mediana AA'.

Demostración. Si la distancia de M al lado AB es m y la distancia de M al lado AC es n, tenemos que M está en la mediana AA' si y solo si $(ABM) = (ACM)$, esto es, si y solo si $mAB = nAC$, lo cual ocurre si y solo si $\frac{m}{n} = \frac{AC}{AB}$. □

Ejercicio 1. Demostrar que el centroide G es el único punto dentro de ABC que tiene la propiedad de que los triángulos BCG, CAG y ABG tienen la misma área.

Ejercicio 2. Encuentra todos los puntos P en el plano del triángulo ABC que cumplan:
(i) Las áreas de los triángulos ABP y CAP son iguales (recuerde que los puntos de la mediana AA' lo cumplen).
(ii) las áreas de los triángulos ABP, BCP y CAP son iguales.

Proposición 3. Si se tienen puntos M en el lado BC del triángulo ABC, P en el lado AB y Q en el lado AC de modo que AM, CP y BQ concurren, muestre que M es el punto medio de BC si y solo si PQ es paralela a BC.

Demostración. Como tenemos tres cevianas que concurren, el teorema de Ceva, garantiza que,

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1.$$

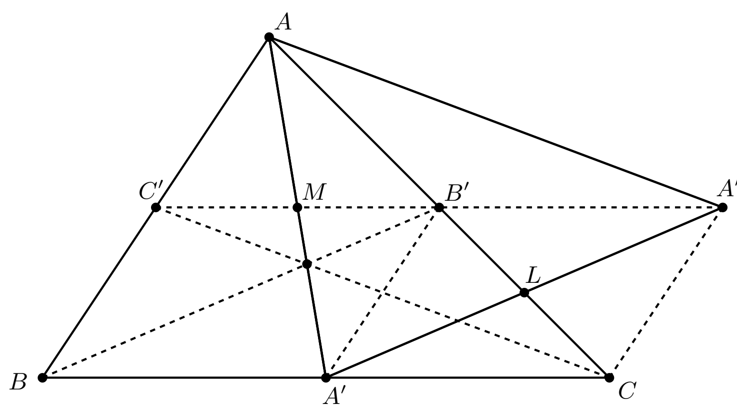
Si M es el punto medio de BC, se cumple que $\frac{BM}{MC} = 1$, de donde $\frac{AP}{PB} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1$, por lo que $\frac{AP}{PB} = \frac{QA}{CQ}$. Luego, por el teorema de Tales se sigue que PQ es paralela a BC. Ahora, si tenemos que PQ paralela a BC, por el teorema de Tales tendemos que $\frac{AP}{PB} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1$. Al dividir la ecuación que nos da Ceva entre esta última, concluimos que $\frac{BM}{MC} = 1$, es decir, M es el punto medio de BC. □

Proposición 4. Los puntos L, M y N, están respectivamente en los lados BC, CA y AB del triángulo ABC, de manera que AL, BM y CN son concurrentes en un punto P. Se tiene que $\frac{AP}{PL} = \frac{BP}{PM} = \frac{CP}{PN}$ si y solo si P es el centroide del triángulo ABC.

Demostración. Notemos que $\frac{BP}{PM} = \frac{CP}{PN}$ garantiza que los triángulos BPC y MPN son semejantes, luego MN y BC son paralelas. Análogamente, NL y CA son paralelas al igual que LM y AB. Luego, $BLMN$ y $MNLC$ son paralelogramos por lo que $BL = MN = LC$ y entonces L es el punto medio de BC. Análogamente, M y N son los puntos medios de CA y AB, por lo que P es el centroide del triángulo ABC. □

Entre los problemas típicos de la geometría del triángulo, se encuentran los que se refieren a construir un triángulo con regla y compás, cuando tres elementos del triángulo están dados. Por ejemplo, si nos dan tres números positivos, ¿se puede construir un triángulo de manera que las longitudes de las medianas sean iguales a los tres números dados?

Para contestar esta pregunta, haremos la construcción siguiente en un triángulo ABC. Prolongamos la recta que une los puntos medios C' y B' hasta un punto A'' de manera que $A''B' = B'C' = \frac{1}{2}BC$. Resulta entonces que $BA'A''B'$ es un paralelogramo, por lo que $A'A'' = BB'$. Como también $A'CA''B'$ es un paralelogramo, tenemos que $A''C = A'B' = \frac{1}{2}AB$. Luego, $AC' = A''C = \frac{1}{2}AB$ y son paralelas por lo que $AC'CA''$ es otro paralelogramo y entonces $AA'' = CC'$. Todo lo anterior se puede resumir diciendo que $AA'A''$ es un triángulo donde sus lados AA', $A'A''$ y $A''A$ son iguales a las medianas del triángulo ABC.



Ahora podemos hacer la siguiente observación: como $A'CA''B'$ es un paralelogramo, sus diagonales se bisecan, esto es, L el punto de intersección de las diagonales $B'C$ y $A'A''$ es punto medio de estas. Por tanto AL es mediana del triángulo $AA'A''$.
También por ser $AC'A'B'$ un paralelogramo, M la intersección de las diagonales AA' y $B'C'$ es punto medio de ellas y, por tanto, $A''M$ es mediana del triángulo $AA'A''$.
Como AL y $A''M$ se cortan en B', resulta que B' es el centroide del triángulo $AA'A''$.
En resumen tenemos que, si tres números m_a, m_b y m_c, representan las longitudes de los lados de un triángulo, entonces puede formarse otro triángulo ABC cuyas medianas tengan longitudes m_a, m_b y m_c. Las longitudes de los lados del triángulo ABC se pueden obtener al multiplicar por $\frac{4}{3}$ las longitudes de las medianas del triángulo de lados m_a, m_b y m_c, ya que hemos observado que $AL = \frac{3}{4}b$.

Algo que también se puede calcular de manera sencilla, es el área del triángulo $AA'A''$. Es fácil ver que si h_a es la altura sobre el lado a del triángulo ABC, el área del triángulo $AA'A''$ es

$$(AA'A'') = \frac{1}{2}A''M \cdot h_a = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}BC\right)h_a = \frac{3}{4}\left(\frac{a \cdot h_a}{2}\right) = \frac{3}{4}(ABC).$$

Ejemplo 1. Si a, b y c son las longitudes de los lados de un triángulo ABC y m_a, m_b y m_c son las longitudes de sus medianas, demostrar que

$$\frac{3}{4}(a+b+c) < m_a + m_b + m_c < a+b+c.$$

Solución. En la figura anterior observemos que $m_a = AA' < AB' + B'A' = \frac{1}{2}(b+c)$. De manera análoga, tenemos que $m_b < \frac{1}{2}(c+a)$ y $m_c < \frac{1}{2}(a+b)$. Luego,

$$m_a + m_b + m_c < a + b + c.$$

Ahora, en el triángulo $AA'A''$ podemos aplicar esta última desigualdad y concluir que

$$\frac{3}{4}(a+b+c) < m_a + m_b + m_c.$$

Es común encontrar en la geometría, problemas que requieren conocer las longitudes de elementos de un triángulo, de modo que es necesario saber calcular ciertos valores a partir de los datos que proporciona el problema. Por ejemplo, pueden deducirse fácilmente los valores de las longitudes de las medianas en términos de las longitudes de los lados. La deducción se sustenta en la ley del paralelogramo.[4]
Aplicando esta ley al paralelogramo $AC'A'B'$ obtenemos que

$$m_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 2\left(\frac{b}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{b^2+c^2}{2}.$$

Luego, la longitud de la mediana m_a cumple que $m_a^2 = \frac{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}{4}$.

Ejercicio 3. Si dos medianas de un triángulo son iguales, demostrar que el triángulo es isósceles.

Ejercicio 4. En un triángulo ABC, demostrar que $m_a^2+m_b^2+m_c^2 = \frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)$.

Ejercicio 5. Si G es el centroide del triángulo ABC, demostrar que

$$AG^2 + BG^2 + CG^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{3}.$$

Ejemplo 2. Sean ABC un triángulo con $c > b$, y m_b, m_c las medianas desde los vértices B y C, respectivamente. Demostrar que

$$\frac{1}{2}(c-b) < m_b - m_c < \frac{3}{2}(c-b).$$

Solución. Las longitudes de las medianas del triángulo ABC satisfacen que

$$4m_b^2 + b^2 = 2(c^2+a^2),$$
$$4m_c^2 + c^2 = 2(a^2+b^2).$$

Por lo tanto,

$$m_b^2 - m_c^2 = \frac{2(c^2+a^2) - b^2 - 2(a^2+b^2) + c^2}{4} = \frac{3}{4}(c^2-b^2).$$

[4]**Ley del paralelogramo.** *En un paralelogramo de lados a, b y diagonales x, y, se tiene que* $x^2+y^2 = 2(a^2+b^2)$.

Luego,

$$(m_b + m_c)\,(m_b - m_c) = \frac{3(c+b)}{2} \cdot \frac{(c-b)}{2},$$

por lo que[5]

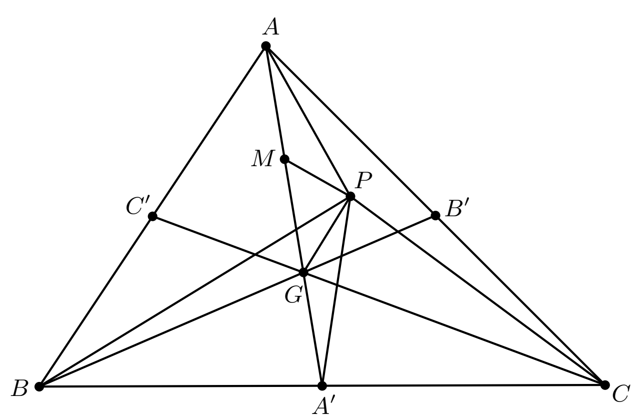
$$\frac{1}{2}(c-b) < m_b - m_c \Leftrightarrow m_b + m_c < \frac{3(b+c)}{2},$$

donde la última desigualdad se sigue de aplicar la desigualdad del triángulo a los triángulos ABB' y CAC', que garantiza respectivamente que $m_b < \frac{1}{2}b + c$ y $m_c < \frac{1}{2}c + b$,, de donde, $m_b + m_b < \frac{3}{2}(b+c)$.
La desigualdad $m_b - m_c < \frac{3}{2}(c-b)$, se sigue de aplicar la primera desigualdad, $\frac{1}{2}(c-b) < m_b - m_c$, al triángulo de lados m_a, m_b, m_c. Recordemos que en este triángulo las medianas tienen longitudes $\frac{3}{4}a$, $\frac{3}{4}b$ y $\frac{3}{4}c$, respectivamente. Además si $c > b$ tenemos que $m_b > m_c$ y entonces, $\frac{1}{2}\,(m_b - m_c) < \frac{3}{4}c - \frac{3}{4}b$, de donde, $m_b - m_c < \frac{3}{2}(c-b)$.

Ejemplo 3. Si P es un punto del plano del triángulo ABC y G es su centroide, entonces $AP^2 + BP^2 + CP^2 = AG^2 + BG^2 + CG^2 + 3PG^2$.

Solución. Sea M el punto medio de AG. Para los triángulos PBC, PAG y PMA', tenemos que PA', PM y PG son las respectivas medianas desde P, por lo que

$$2(PA')^2 = BP^2 + CP^2 - \frac{1}{2}BC^2,$$
$$2(PM)^2 = AP^2 + PG^2 - \frac{1}{2}AG^2,$$
$$2(PG)^2 = PM^2 + PA'^2 - \frac{1}{2}MA'^2.$$



[5]Para la conclusión utilizamos el siguiente resultado.
Lema. Si a, b, c, d son números positivos con $ab = cd$, entonces $a < c$ si y solo si $b > d$.
Demostración. Supongamos que $a < c$ y que $b \leq d$, entonces al multiplicar estas desigualdades de números positivos tenemos que $ab < cd$, lo que es una contradicción. El recíproco es análogo.

Como $MA' = \frac{2}{3}AA' = AG$, tenemos de la última ecuación que

$$4PG^2 = 2PM^2 + 2PA'^2 - AG^2.$$

De esta última igualdad y las dos primeras identidades, resulta que

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 - 3PG^2 = \frac{3}{2}AG^2 + \frac{1}{2}BC^2.$$

De manera similar se pueden obtener las siguientes dos igualdades

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 - 3PG^2 = \frac{3}{2}BG^2 + \frac{1}{2}CA^2,$$
$$PA^2 + PB^2 + PC^2 - 3PG^2 = \frac{3}{2}CG^2 + \frac{1}{2}AB^2.$$

Al sumar las tres identidades anteriores, obtenemos que

$$\begin{aligned} 3(PA^2 + PB^2 + PC^2 - 3PG^2) &= \frac{3}{2}\left(AG^2 + BG^2 + CG^2\right) + \frac{1}{2}(BC^2 + CA^2 + AB^2) \\ &= 3(AG^2 + BG^2 + CG^2), \end{aligned}$$

donde hemos usado la identidad del Ejercicio 5: $3(AG^2+BG^2+CG^2) = a^2+b^2+c^2$.
Por lo tanto, $PA^2 + PB^2 + PC^2 = AG^2 + BG^2 + CG^2 + 3PG^2$.

Ejemplo 4. Sean ABC un triángulo con centroide G, M un punto en AB y N un punto en AC. Demostrar que la recta MN pasa por G si y solo si

$$(AMN) = (BMN) + (CMN).$$

Solución. Sean X, Y, Z, los pies de las perpendiculares desde A, B, C, respectivamente, a la recta MN. Notemos que $(AMN) = \frac{MN \cdot AX}{2}$, $(BMN) = \frac{MN \cdot BY}{2}$ y $(CMN) = \frac{MN \cdot CZ}{2}$.
Luego, tenemos que $(AMN) = (BMN) + (CMN)$ si y solo si $AX = BY + CZ$.
Bastará probar que MN pasa por G si y solo si $AX = BY + CZ$.
Sea P el pie de la perpendicular desde el punto medio D de BC a la recta MN. Como BY, PD, CZ son paralelas y D es el punto medio de BC, podemos concluir que $PD = \frac{BY+CZ}{2}$. Ahora, si MN pasa por G, tenemos que

$$2 = \frac{AG}{GD} = \frac{AX}{PD} = \frac{AX}{\frac{BY+CZ}{2}},$$

esto es, $AX = BY + CZ$.
Ahora, si $AX = BY + CZ$ y S es la intersección de AD con MN, tenemos que

$$2 = \frac{BY + CZ}{\frac{BY+CZ}{2}} = \frac{AX}{PD} = \frac{AS}{SD},$$

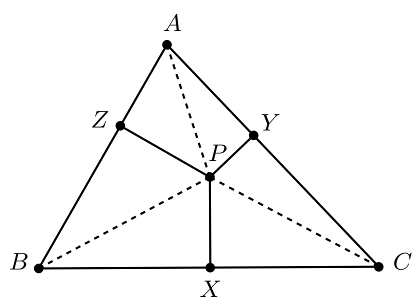
por lo que $AS = 2SD$. Finalmente, como AD es mediana y el único punto que corta a la mediana en razón 2 a 1 es el centroide, se sigue que $S = G$.

Ejercicio 6. En un triángulo ABC, con centroide G, circuncentro O y circunradio R, demostrar que

$$OG^2 = R^2 - \frac{1}{9}\left(a^2 + b^2 + c^2\right).$$

Ejemplo 5. Demostrar que el punto en el interior del triángulo ABC que maximiza el producto de las distancias a los lados BC, CA y AB, es el centroide G.

Solución. Sea $f(P)$ el producto de las distancias de un punto P a los lados del triángulo ABC. Queremos encontrar P tal que $f(P)$ sea máximo. Sean X, Y, Z los pies de las perpendiculares desde P a BC, CA y AB, respectivamente.



Notemos que

$$abc \cdot f(P) = (a \cdot PX)(b \cdot PY)(c \cdot PZ).$$

Por la desigualdad MA-MG, tenemos que,

$$\sqrt[3]{(a \cdot PX)(b \cdot PY)(c \cdot PZ)} \leq \frac{(a \cdot PX) + (b \cdot PY) + (c \cdot PZ)}{3}.$$

Por lo tanto,

$$f(P) \leq \frac{((a \cdot PX) + (b \cdot PY) + (c \cdot PZ))^3}{27abc}.$$

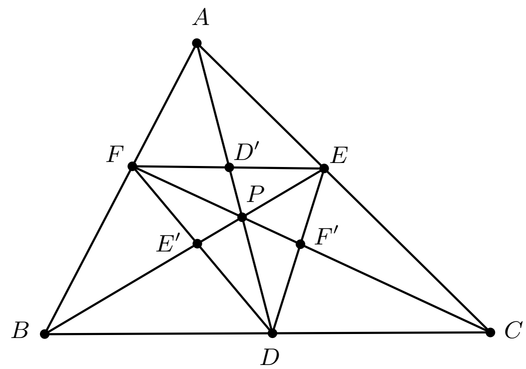
Como la igualdad se da cuando se da la igualdad entre la media aritmética y la media geométrica, concluimos que para maximizar $f(P)$, debe suceder que $a \cdot PX = b \cdot PY = c \cdot PZ$. Notemos que $a \cdot PX$ es dos veces el área del triángulo BCP, con lo que llegamos a que el punto P con el que $f(P)$ se maximiza cumple que las áreas de los triángulos BCP, CAP y ABP son iguales. Pero el Ejercicio 1 nos dice que el único punto que cumple esto es el gravicentro, luego $P = G$.

Ejemplo 6. Para un punto P dentro de un triángulo ABC, se consideran los triángulos cevianos DEF partiendo del triángulo ABC y $D'E'F'$ partiendo del triángulo DEF. Demostrar que las cantidades

$$f(P) = \frac{AP}{PD} + \frac{BP}{PE} + \frac{CP}{PF}, \quad g(P) = \frac{DP}{PD'} + \frac{EP}{PE'} + \frac{FP}{PF'},$$

alcanzan su valor mínimo en el mismo punto P.

Solución. Demostraremos que $f(P)$ es mínimo cuando $P = G$. Sean x, y, z las áreas de los triángulos BCP, CAP, ABP, respectivamente. Como los triángulos CAP y CPD tienen misma altura respcto a C, la razón entre sus áreas es $\frac{AP}{PD}$. Análogamente, la razón entre las áreas de los triángulos ABP y BPD es $\frac{AP}{PD}$, con lo que podemos concluir que $\frac{AP}{PD} = \frac{y+z}{x}$.



De forma análoga obtenemos que $\frac{BP}{PE} = \frac{z+x}{y}$ y $\frac{PC}{PF} = \frac{x+y}{z}$.
Luego,

$$f(P) = \frac{AP}{PD} + \frac{BP}{PE} + \frac{CP}{PF} = \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + \frac{x+y}{z}.$$

Por la desigualdad MA-MG tenemos que

$$\frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + \frac{x+y}{z} = \frac{y}{x} + \frac{z}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} \geq 6,$$

con la igualdad si y solo si los seis sumandos son iguales, lo que implica que $x = y = z$. Pero sabemos que el único punto que cumple esto es G, el gravicentro del triángulo ABC. Análogamente, vemos que $g(P)$ alcanza su mínimo cuando P es el gravicentro del triángulo DEF. Como en un triángulo su gravicentro coincide con el gravicentro de su triángulo medial, concluimos que ambas funciones alcanzan su mínimo en el mismo punto P, el gravicentro común de los triángulos ABC y DEF.

Ejemplo 7. Sea ABC un triángulo con gravicentro G. Demostrar que el triángulo pedal[6] de G tiene lados proporcionales a $a \cdot m_a$, $b \cdot m_b$ y $c \cdot m_c$.

Solución. Sean $\alpha = \angle BAC$ y D, E, F los pies de las perpendiculares desde G a BC, CA y AB, respectivamente. Por la ley de senos en el triángulo AFE, tenemos que $\frac{FE}{\operatorname{sen}\alpha} = 2r$, donde r es el radio de la circunferencia circunscrita a dicho triángulo. Notemos que como $AFGE$ tiene $\angle GFA = \angle AEG = 90°$, entonces es cíclico y su

[6]Si ABC es un triángulo y P es un punto del plano de ABC, el *triángulo pedal* de P es el triángulo cuyos vértices son los pies de las perpendiculares desde P hacia los lados del triángulo ABC.

circunferencia circunscrita tiene diámetro AG. Como G corta a las medianas en razón 2 a 1, $AG = \frac{2}{3}m_a$. Con esto tenemos que

$$\frac{FE}{\operatorname{sen}\alpha} = 2r = AG = \frac{2}{3}m_a.$$

Luego, $FE = \frac{2\cdot\operatorname{sen}\alpha\cdot m_a}{3}$.
Por otro lado, por la ley de senos en el triángulo ABC, $\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = 2R$, donde R es el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC. Entonces, $\operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{2R}$ y sustituyendo esto en la ecuación previa, tenemos que $FE = \frac{2\cdot a\cdot m_a}{3\cdot 2R} = \frac{am_a}{3R}$.
De manera análoga se llega a que $FD = \frac{bm_b}{3R}$ y $DE = \frac{cm_c}{3R}$.
Así, el triángulo pedal de G tiene lados proporcionales a $a\cdot m_a$, $b\cdot m_b$ y $c\cdot m_c$.

Ejercicios

1) Sean P y Q tales que $PG = GQ$, donde G es el centroide de ABC. Demuestra que $AP^2 + BP^2 + CP^2 = AQ^2 + BQ^2 + CQ^2$.

2) Si N es el punto medio de la mediana AA' del triángulo ABC y BN interseca a CA en M, muestra que $AM = \frac{1}{3}AC$.

3) Si A', B' y C' son los puntos medios de los lados BC, CA y AB del triángulo ABC, muestra que el centroide del triángulo $A'B'C'$ coincide con el del triángulo ABC.

4) Demuestra que la longitud m_a de la mediana AA' de un triángulo ABC cumple que $m_a > \frac{AB+CA-BC}{2}$.

5) La longitud m_a de la mediana AA' de un triángulo ABC cumple que $m_a > \frac{1}{2}BC$. Muestra que $\angle BAC < 90°$.

6) Si AA' es una mediana del triángulo ABC y si $AB < AC$, demuestra que $\angle BAA' > \angle A'AC$.

7) Demuestra que los centroides de los cuatro triángulos determinados por los vértices de un cuadrilátero, al tomarse de tres en tres, forman un cuadrilátero semejante al cuadrilátero dado.

8) Demuestra que los tres segmentos que unen puntos medios de aristas opuestas de un tetraedro, son concurrentes.

9) Sean L, M y N los pies de las perpendiculares desde el centroide del triángulo ABC a los lados BC, CA y AB. Demuestra que $(LMN) = \frac{4(ABC)^3(a^2+b^2+c^2)}{9a^2b^2c^2}$.

10) Para cada punto M del plano del triángulo ABC, sea $E(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2$. Muestra que $E(M)$ alcanza un mínimo en el centroide $M = G$ del triángulo ABC y expresa $E(G)$ en términos de los lados del triángulo ABC.

11) Si G, H, O, I son el centroide, ortocentro, circuncentro e incentro de un triángulo ABC, respectivamente, demuestra que este es equilátero si alguna de las siguientes igualdades es cierta:
(a) $G = H$. (b) $G = O$. (c) $G = I$.

12) (Hungría, 1997). Sean R el circunradio, H el ortocentro y G el centroide de un triángulo ABC. Sea F el punto medio de GH. Muestra que $AF^2 + BF^2 + CF^2 = 3R^2$.

13) ¿En qué punto P del plano, donde se encuentra el triángulo ABC, se tiene que la suma, $AP^2 + BP^2 + CP^2$, es mínima?

14) Sean a, b y c son las longitudes de los lados de un triángulo y sean m_a, m_b y m_c las longitudes de las medianas y R el circunradio. Muestra que
(a) $\frac{a^2+b^2}{m_c} + \frac{b^2+c^2}{m_a} + \frac{c^2+a^2}{m_b} \leq 12R$.
(b) $m_a(bc - a^2) + m_b(ca - b^2) + m_c(ab - c^2) \geq 0$.

15) (a) Encuentra el lugar geométrico del centroide G cuando A recorre el circuncírculo del triángulo ABC.

(b) Encuentra el lugar geométrico del centroide de un triángulo ABC, cuando A, B, C se mueven sobre una misma circunferencia.

(c) Encuentra el lugar geométrico del ortocentro de un triángulo ABC, cuando A, B, C se mueven sobre una misma circunferencia.

16) Las medianas de un triángulo ABC, dividen a este en seis triángulos. Muestra que los centroides de los seis triángulos forman un hexágono de lados paralelos a los lados del triángulo ABC.

Bibliografía

1) R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas, Instituto de Matemáticas, UNAM, 2004.

2) H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer. *Geometry Revisited.* The Mathematical Association of America, 1967.