Vectores y Geometría

Por Mauricio Adrián Che Moguel y Carlos Jacob Rubio Barrios

Nivel Avanzado

En este escrito veremos cómo usar vectores para resolver problemas de geometría que pueden ser difíciles de resolver usando técnicas más convencionales. Empezaremos con un breve repaso de la definición de vector y algunas de sus propiedades básicas.

Vectores

Un *vector*, denotado por $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{A}$ o $\overrightarrow{AB}$, es un par ordenado de números reales, denominados sus *coordenadas*. Así, escribimos $\overrightarrow{v} = (a, b)$ donde las coordenadas a y b son números reales. Aunque en geometría tales parejas se usan para denotar puntos en el plano, preferimos no pensar en los vectores como puntos, sino como simples parejas de números reales. Si se trabaja en el espacio tridimensional, es conveniente usar vectores espaciales, que se definen como tripletas (a, b, c) de números reales. De hecho, a menudo conviene considerar vectores n-dimensionales de la forma $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, donde hay n coordenadas y n puede ser cualquier entero positivo. No obstante, nuestro objetivo al presentar los vectores es usarlos para resolver problemas de geometría plana y por ello nos limitaremos a trabajar con vectores que tienen solo dos coordenadas.

Los vectores pueden sumarse o restarse, sumando o restando las coordenadas correspondientes. Si $\overrightarrow{v} = (a, b)$ y $\overrightarrow{w} = (c, d)$, entonces $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = (a + c, b + d)$ y $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w} = (a - c, b - d)$. También podemos multiplicar vectores por escalares, multiplicando simplemente cada coordenada por el escalar[2]. Si z es un escalar y $\overrightarrow{v} = (a, b)$ es un vector, escribimos $z\overrightarrow{v}$ para denotar al vector (za, zb).

Muchas de las reglas usuales de la artimética también se cumplen para los vectores. Por ejemplo, las leyes asociativa y conmutativa son válidas para la suma de vectores y

[2] Un *escalar* es simplemente un número real.

dos leyes distributivas se cumplen para la suma y multiplicación por un escalar. Estas dos leyes distributivas son $(y+z)\overrightarrow{v} = y\overrightarrow{v} + z\overrightarrow{v}$ y $z(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = z\overrightarrow{v} + z\overrightarrow{w}$, donde y, z son escalares y $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ son vectores. También, el vector $\overrightarrow{0} = (0,0)$, llamado *vector cero*, se comporta de manera muy parecida a como lo hace el número 0 en aritmética: Si $\overrightarrow{v}$ es cualquier vector y z es cualquier escalar, entonces $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{v}$ y $z\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$.

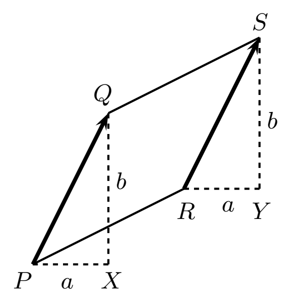
Para relacionar a los vectores con la geometría, representamos cada vector como una flecha en el plano. Para ser específicos, supongamos que el plano cuenta con un sistema de coordenadas de modo que cada punto P puede describirse como un par ordenado (x, y). Por supuesto, (x, y) se ve simplemente como un vector, pero nos rehusamos a considerarlo así; es solo una forma de denominar al punto P.

Ahora, supongamos que tenemos un vector $\overrightarrow{v} = (a, b)$ y sea P cualquier punto en el plano cuyas coordenadas son (x, y). Si Q es el punto cuyas coordenadas son $(x + a, y + b)$, entonces podemos pensar que el vector $\overrightarrow{v}$ proporciona instrucciones sobre cómo llegar del punto P al punto Q: Moverse a unidades a la derecha y b unidades hacia arriba. Por supuesto, si a es negativo, en realidad el desplazamiento es a la izquierda y, si b es negativo, es hacia abajo. Si trazamos una flecha desde P hasta Q con cola en P y punta en Q, esta flecha es una representación del vector $\overrightarrow{v}$ y escribimos $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{v}$. A menudo es posible considerar que la flecha de P a Q es realmente el vector $\overrightarrow{v}$, pero esto puede ser peligroso porque es esencial recordar que el punto P se eligió arbitrariamente; en ningún sentido fue determinado por el vector $\overrightarrow{v}$. Pero, por supuesto, una vez que se elige P, entonces Q se determina sin ninguna ambigüedad. El vector $\overrightarrow{v}$ se representa por una infinidad de flechas distintas en el plano: una para cada elección de la cola de la flecha P. Cualquiera de estas flechas es una imagen o representación de $\overrightarrow{v}$; todas las flechas que representan a $\overrightarrow{v}$ son paralelas y tienen la misma longitud. Cada una de estas se obtiene a partir de cualquiera de las otras por medio de una traslación, que es un movimiento en el plano sin rotación.
Hay un ligero problema si $\overrightarrow{v}$ es el vector cero $\overrightarrow{0}$, ya que en este caso, los puntos P y Q son idénticos y no es posible trazar una flecha de P a Q. A pesar de ello, el vector $\overrightarrow{0}$ proporciona instrucciones sobre cómo ir de P a P y, por lo menos, podemos imaginar una flecha correspondiente de longitud cero y sin dirección particular.

Dados dos puntos P y Q y una flecha con cola en P y punta en Q, podemos reconstruir el vector $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{PQ}$ al restar las coordenadas correspondientes de $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$. Así, $\overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ y podemos ver que toda flecha trazada representa algún vector. Observemos que requerimos la flecha de P a Q y no solo el segmento de recta PQ porque debemos saber qué punto es la punta y cuál es la cola, de modo que restemos las coordenadas de la cola de las de la punta y no al revés. De hecho, tenemos que $\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ}$.

¿Cuál es el significado geométrico de la suma vectorial? Dados los vectores $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$, representamos a $\overrightarrow{v}$ como una flecha de P a Q, donde P es arbitrario. Aunque podemos representar a $\overrightarrow{w}$ como una flecha con cualquier punto inicial (cola) que se quiera, elegimos trazar $\overrightarrow{w}$ empezando en Q y escribimos $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{QR}$. Así, hemos colocado las flechas que representan a v y w con la punta de $\overrightarrow{v}$ en la cola de $\overrightarrow{w}$. Es fácil ver que la flecha de P a R representa $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$. En otras palabras, tenemos la ecuación vectorial $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$. También podemos pensar lo anterior como sigue: Las instrucciones para ir de P a R son primero ir de P a Q y luego de Q a R.

Antes vimos que cualquier vector dado puede representarse por una infinidad de flechas distintas. Dados los cuatro puntos P, Q, R y S, supongamos que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$. Antes mencionamos que en este caso, los segmentos de recta PQ y RS deben ser iguales y paralelos. Para ver por qué es verdad esto, consideremos la siguiente figura donde se han trazado los triángulos rectángulos PQX y RSY cuyas hipotenusas son los vectores iguales dados. (En realidad debemos decir, por supuesto, que las flechas que representan los vectores son las hipotenusas, pero es conveniente hablar de las flechas como si en realidad fuesen los vectores).



Si escribimos $\overrightarrow{PQ} = (a, b) = \overrightarrow{RS}$, vemos que $PX = a = RY$ y $XQ = b = YS$ y así, los dos triángulos rectángulos son congruentes por el criterio LAL. Para facilitar las cosas, trabajamos en el caso en que las coordenadas de a y b son positivas, aunque esto en realidad no es esencial. Concluimos que las longitudes PQ y RS son iguales. Además, por el teorema de Pitágoras, tenemos que las longitudes de $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$ son iguales a $\sqrt{a^2 + b^2}$. Esto demuestra que dos flechas que representan al mismo vector, deben tener la misma longitud. Pero todavía hay mas cosas que son ciertas. Tenemos que

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QS} = \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RS}$$

y, si en ambos lados restamos los vectores iguales $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$, obtenemos que $\overrightarrow{QS} = \overrightarrow{PR}$. A partir de lo que acabamos de demostrar, concluimos que las flechas correspondientes tienen la misma longitud. Así, escribimos $QS = PR$. Por lo tanto, concluimos que el cuadrilátero $PQRS$ es un paralelogramo y, en consecuencia, $PQ \parallel RS$. Esto demuestra que todas las flechas que representan al mismo vector son iguales y paralelas, como se había afirmado. Recíprocamente, es fácil ver que dos flechas iguales, paralelas y que apuntan en la misma dirección y no en direcciones opuestas, corresponden a vectores iguales.

Finalmente, mencionamos que la importancia geométrica de la multiplicación de un

vector $\overrightarrow{v}$ por un escalar positivo z, es que una flecha que representa a $z\overrightarrow{v}$ apunta en la misma dirección que otra que representa a $\overrightarrow{v}$ pero es más corta, igual o más larga que la flecha original, dependiendo de si z es menor que, igual a o mayor que 1. Más precisamente, la longitud de $z\overrightarrow{v}$ es exactamente z veces la longitud de $\overrightarrow{v}$. Si el escalar z es negativo, la dirección del vector se invierte, pero fuera de ello obtenemos el mismo efecto de alargamiento o contracción que con un escalar positivo. Por ejemplo, una flecha que representa $-3\overrightarrow{v}$ tiene tres veces la longitud de otra que representa $\overrightarrow{v}$ pero apunta en dirección opuesta.
Por ejemplo, si P, Q, R y S son cuatro puntos que están en ese orden a lo largo de una recta separados por la misma distancia, de modo que $PQ = QR = RS$, entonces $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{RS}$ y $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QS}$. Otras ecuaciones que podemos escribir en esta situación son $-\overrightarrow{SP} = \overrightarrow{PS} = 3\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{SP}$.

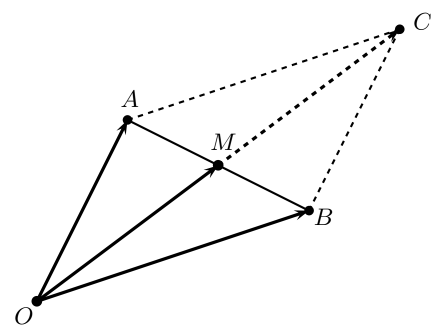
Vectores y Geometría

Por conveniencia, en la aplicación de técnicas vectoriales a la geometría, presentamos una abreviatura a la notación. Suponemos que en el plano se ha seleccionado algún punto O, denominado *origen* y que se mantiene fijo. Como veremos, no es necesario conocer la posición de este punto, aunque a veces es posible simplificar una demostración al elegir el origen O de alguna manera inteligente. La abreviatura a la que hicimos referencia es que un vector de la forma $\overrightarrow{OA}$ con cola en el punto O, simplemente se escribe como $\overrightarrow{A}$. En otras palabras, siempre que un vector se denote por un solo punto en vez de por un par de puntos, se supone que la cola de la flecha correspondiente está en el origen y la punta está en el punto en cuestión.

Dados dos puntos A y B en el plano, tenemos que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$, de modo que usando la abreviatura anterior, es posible escribir la igualdad anterior como $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B}$. A partir de esto, obtenemos que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A}$ y, por lo tanto, cualquier vector identificado por dos puntos se describe como una diferencia de dos vectores, cada uno de los cuales está identificado por un solo punto. Observa que la forma correcta es restar la cola de la punta. El vector de P a Q, por ejemplo, es $\overrightarrow{Q} - \overrightarrow{P}$. Mencionamos que una manera de demostrar que dos puntos P y Q son el mismo, es demostrar que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{0}$. Pero $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{Q} - \overrightarrow{P}$ y este es el vector cero precisamente cuando $\overrightarrow{Q} = \overrightarrow{P}$. En otras palabras, para demostrar que P y Q son el mismo punto, basta demostrar que los vectores $\overrightarrow{P}$ y $\overrightarrow{Q}$, que corresponden a estos puntos, son iguales.
El siguiente ejemplo es sencillo pero muy útil.

Ejemplo 1. Si M es el punto medio del segmento AB, demostrar que $\overrightarrow{M} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B})$.

Solución. Por la interpretación geométrica de la suma de vectores, sabemos que si C es el punto que corresponde al vector $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}$, entonces el cuadrilátero $ACBO$ es un paralelogramo.



Luego, como las diagonales de un paralelogramo se bisecan mutuamente, M es también el punto medio del segmento OC. En particular, $\overrightarrow{M} = \frac{1}{2}\overrightarrow{C} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B})$. $\square$

El resultado del Ejemplo 1 es útil y fácil de recordar. Dice que el vector $\overrightarrow{M}$ correspondiente al punto medio M del segmento de recta AB es exactamente el promedio de los vectores $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{B}$, correspondientes a los puntos extremos del segmento. Observa que hacemos esta afirmación sin saber cuál punto se eligió como origen.

Teorema 1. Las medianas de todo triángulo ABC son concurrentes en un punto G que está a $\frac{2}{3}$ de la distancia a lo largo de cada mediana. Además, $\overrightarrow{G} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C})$.

Demostración. Calculemos el vector $\overrightarrow{G}$ correspondiente al punto G que está a $\frac{2}{3}$ de distancia a lo largo de la mediana AM, donde M es el punto medio de BC. Por el Ejemplo 1, sabemos que $\overrightarrow{M} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{B} + \overrightarrow{C})$. Luego, tenemos que

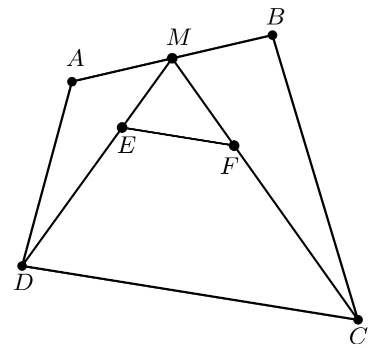
$$\overrightarrow{G} - \overrightarrow{A} = \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{M} - \overrightarrow{A}) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}(\overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}) - \overrightarrow{A}\right).$$

Despejando, obtenemos que $\overrightarrow{G} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C})$. En otras palabras, el vector correspondiente al punto que está a $\frac{2}{3}$ de la distancia a lo largo de la mediana AM es el promedio de los tres vectores correspondientes a los vértices del triángulo. De manera análoga, se demuestra que lo mismo sucede para las otras dos medianas del triángulo. Por lo tanto, los vectores correspondientes a los puntos a $\frac{2}{3}$ de la distancia a lo largo de las tres medianas son iguales, lo que significa que estos tres puntos son el mismo punto. $\square$

Observación. En el teorema anterior fue necesario saber de antemano que el punto de concurrencia de las medianas de un triángulo está a $\frac{2}{3}$ de la distancia a lo largo de cada una.
El siguiente ejemplo es una aplicación del Teorema 1.

Ejemplo 2. Sean $ABCD$ un cuadrilátero convexo y M el punto medio de AB. Sean E y F los centroides de los triángulos DAB y ABC, respectivamente. Demuestra que EF y DC son paralelas y que $EF = \frac{1}{3}DC$.

Solución. Como E es el centroide del triángulo DAB, aplicando el Teorema 1, tenemos que $\overrightarrow{E} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} + \overrightarrow{D})$. Aplicando nuevamente el Teorema 1 en el triángulo ABC, tenemos que $\overrightarrow{F} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C})$.



Luego,

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{F} - \overrightarrow{E} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}) - \frac{1}{3}(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} + \overrightarrow{D}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{C} - \overrightarrow{D}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}.$$

Por lo tanto, EF y DC son paralelas y $EF = \frac{1}{3}DC$. $\square$

Ejemplo 3. (Leningrado, 1980). Dado un cuadrilátero cualquiera, una *línea media* es un segmento que une los puntos medios de dos lados opuestos. Muestra que si la suma de las longitudes de las líneas medias de un cuadrilátero convexo es igual al semiperímetro, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

Solución. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo y pongamos el origen en el vértice A. Entonces, la suma de las longitudes de las líneas medias de $ABCD$ es $\frac{|\overrightarrow{B}+\overrightarrow{C}-\overrightarrow{D}|}{2} + \frac{|\overrightarrow{D}+\overrightarrow{C}-\overrightarrow{B}|}{2}$, mientras que el semiperímetro de $ABCD$ está dado por

$$\frac{|\overrightarrow{B}| + |\overrightarrow{C} - \overrightarrow{B}| + |\overrightarrow{C} - \overrightarrow{D}| + |\overrightarrow{D}|}{2}.$$

Si suponemos que estas dos cantidades son iguales, obtenemos que

$$|\overrightarrow{B} + \overrightarrow{C} - \overrightarrow{D}| + |\overrightarrow{D} + \overrightarrow{C} - \overrightarrow{B}| = |\overrightarrow{B}| + |\overrightarrow{C} - \overrightarrow{B}| + |\overrightarrow{C} - \overrightarrow{D}| + |\overrightarrow{D}|. \quad (1)$$

Aplicando la desigualdad del triángulo[3] a las parejas de vectores $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{C} - \overrightarrow{D}$ y $\overrightarrow{D}$, $\overrightarrow{C} - \overrightarrow{B}$, tenemos que $|\overrightarrow{B}+\overrightarrow{C}-\overrightarrow{D}| \leq |\overrightarrow{B}|+|\overrightarrow{C}-\overrightarrow{D}|$ y $|\overrightarrow{D}+\overrightarrow{C}-\overrightarrow{B}| \leq |\overrightarrow{D}|+|\overrightarrow{C}-\overrightarrow{B}|$, donde las igualdades se dan si y solo si $\overrightarrow{B}$ y $\overrightarrow{D}$ son múltiplos escalares positivos de $\overrightarrow{C} - \overrightarrow{D}$ y $\overrightarrow{C} - \overrightarrow{B}$, respectivamente, es decir, si y solo si $AB \parallel DC$ y $AD \parallel BC$. Sin embargo, la ecuación (1) implica las igualdades anteriores, por lo que la única posibilidad es que $AB \parallel DC$ y $AD \parallel BC$, esto es, $ABCD$ es un paralelogramo. $\square$

[3]**Desigualdad del triángulo.** Si $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ son vectores en el plano, entonces $|\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}| \leq |\overrightarrow{v}| + |\overrightarrow{w}|$ con la igualdad si y solo si $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{w}$ para algún $\lambda > 0$. En el Teorema 5 se dará una demostración de esta desigualdad.

El siguiente resultado nos da una manera de determinar el vector correspondiente al punto obtenido al mover una fracción γ de la distancia de A a B a lo largo de un segmento de recta dado AB.

Teorema 2. Sea γ un número real y sea X un punto en la recta AB tal que $\frac{AX}{AB} = \gamma$ como segmentos dirigidos. Esto es, si $\gamma < 0$, entonces X y B están en lados opuestos respecto de A; mientras que si $\gamma > 0$, entonces X y B están del mismo lado respecto de A. Entonces, $\overrightarrow{X} = (1-\gamma)\overrightarrow{A} + \gamma\overrightarrow{B}$.

Demostración. Tenemos que $\overrightarrow{AX} = \gamma\overrightarrow{AB}$, esto es, $\overrightarrow{X} - \overrightarrow{A} = \gamma(\overrightarrow{B} - \overrightarrow{A})$. Despejando, obtenemos que $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{A} + \gamma(\overrightarrow{B} - \overrightarrow{A}) = (1-\gamma)\overrightarrow{A} + \gamma\overrightarrow{B}$. □

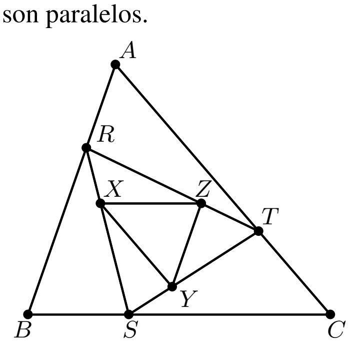
A manera de ejemplo, supongamos que $\gamma = \frac{1}{2}$. Entonces, el punto X está a la mitad de la distancia de A a B y así, X es el punto medio del segmento AB. En este caso, el Teorema 2 establece que $\overrightarrow{X} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A} + \frac{1}{2}\overrightarrow{B}$, que coincide con la fórmula del Ejemplo 1.

El siguiente resultado es una consecuencia muy útil del Teorema 2.

Corolario 1. Sean A y B dos puntos en el plano y P un punto en la recta AB tal que $\frac{AP}{PB} = \lambda$ como segmentos dirigidos. Entonces, $\overrightarrow{P} = \frac{\overrightarrow{A} + \lambda\overrightarrow{B}}{1+\lambda}$.

Demostración. Tenemos que $\frac{AP}{AB} = \frac{\lambda}{1+\lambda}$. Aplicando el Teorema 2, se sigue que $\overrightarrow{P} = \left(1 - \frac{\lambda}{1+\lambda}\right)\overrightarrow{A} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{B} = \frac{\overrightarrow{A} + \lambda\overrightarrow{B}}{1+\lambda}$. □

Ejemplo 4. Dado un triángulo ABC, se construye el triángulo RST al tomar los puntos R, S y T en los lados del triángulo ABC como sigue: El punto R está a un tercio de la distancia de A a B a lo largo de AB, el punto S está a un tercio de la distancia de B a C a lo largo de BC y, el punto T, está a un tercio de la distancia de C a A a lo largo de CA. Luego, repetimos este proceso empezando con el triángulo RST, obteniendo el triángulo XYZ. Demostrar que los triángulos XYZ y CAB son semejantes y que sus lados correspondientes son paralelos.



Solución. Los datos son los puntos A, B y C, de modo que nuestra estrategia será expresar los vectores a lo largo de los lados del triángulo XYZ en términos de $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$ y $\overrightarrow{C}$. Primero, como R está a $\frac{1}{3}$ de la distancia de A a B, por el Teorema 2 tenemos que $\overrightarrow{R} = \frac{2}{3}\overrightarrow{A} + \frac{1}{3}\overrightarrow{B}$. De manera análoga, tenemos que $\overrightarrow{S} = \frac{2}{3}\overrightarrow{B} + \frac{1}{3}\overrightarrow{C}$. Como X está a $\frac{1}{3}$ de la distancia de R a S, el Teorema 2 implica que

$$\overrightarrow{X} = \frac{2}{3}\overrightarrow{R} + \frac{1}{3}\overrightarrow{S} = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{A} + \frac{1}{3}\overrightarrow{B}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{B} + \frac{1}{3}\overrightarrow{C}\right),$$

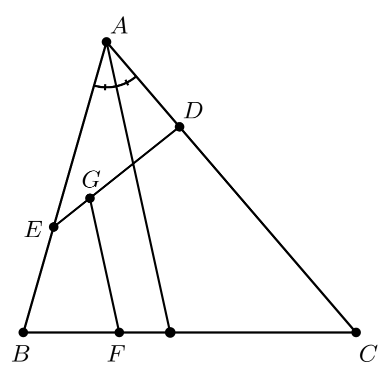
de donde se sigue que $\overrightarrow{X} = \frac{4}{9}\overrightarrow{A} + \frac{4}{9}\overrightarrow{B} + \frac{1}{9}\overrightarrow{C}$.
De manera análoga, sustituyendo A por B, B por C y C por A, obtenemos que $\overrightarrow{Y} = \frac{4}{9}\overrightarrow{B} + \frac{4}{9}\overrightarrow{C} + \frac{1}{9}\overrightarrow{A}$.
Luego,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{XY} &= \overrightarrow{Y} - \overrightarrow{X} = \left(\frac{4}{9}\overrightarrow{B} + \frac{4}{9}\overrightarrow{C} + \frac{1}{9}\overrightarrow{A}\right) - \left(\frac{4}{9}\overrightarrow{A} + \frac{4}{9}\overrightarrow{B} + \frac{1}{9}\overrightarrow{C}\right) \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{C} - \frac{1}{3}\overrightarrow{A} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, XY y CA son paralelas y $XY = \frac{1}{3}CA$.
De manera análoga se demuestra que cada lado del triángulo XYZ es paralelo al lado correspondiente del triángulo CAB y cada lado del triángulo XYZ mide un tercio del lado correspondiente del triángulo CAB. □

Ejemplo 5. Sean D y E puntos en los lados AC y AB del triángulo ABC, respectivamente, tales que DE y CB no son paralelas. Supongamos que F y G son puntos en BC y ED, respectivamente, tales que $\frac{BF}{FC} = \frac{EG}{GD} = \frac{BE}{CD}$. Demostrar que GF es paralela a la bisectriz del ángulo $\angle BAC$.

Solución. Pongamos al origen en el vértice A. Entonces, $\overrightarrow{E} = p\overrightarrow{B}$ y $\overrightarrow{D} = q\overrightarrow{C}$ para algunos números reales p y q del intervalo $(0, 1)$. Sea $\gamma = \frac{BF}{FC}$.



Por el corolario 1, tenemos que $\overrightarrow{F} = \frac{\gamma\overrightarrow{C}+\overrightarrow{B}}{\gamma+1}$ y $\overrightarrow{G} = \frac{\gamma\overrightarrow{D}+\overrightarrow{E}}{\gamma+1} = \frac{\gamma q\overrightarrow{C}+p\overrightarrow{B}}{\gamma+1}$. Como $BE = \gamma CD$, $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{E} - \overrightarrow{B} = (p-1)\overrightarrow{B}$ y $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{D} - \overrightarrow{C} = (q-1)\overrightarrow{C}$, tenemos que $(1-p)|\overrightarrow{B}| = \gamma(1-q)|\overrightarrow{C}|$. Luego,

$$\overrightarrow{F} - \overrightarrow{G} = \frac{\gamma(1-q)}{\gamma+1}\overrightarrow{C} + \frac{1-p}{\gamma+1}\overrightarrow{B} = \frac{(1-p)|\overrightarrow{B}|}{\gamma+1}\left(\frac{\overrightarrow{C}}{|\overrightarrow{C}|} + \frac{\overrightarrow{B}}{|\overrightarrow{B}|}\right).$$

Esto significa que $\overrightarrow{FG}$ es paralelo a $\overrightarrow{v} = \frac{\overrightarrow{C}}{|\overrightarrow{C}|} + \frac{\overrightarrow{B}}{|\overrightarrow{B}|}$. Ahora bien, los vectores $\frac{\overrightarrow{C}}{|\overrightarrow{C}|}$ y $\frac{\overrightarrow{B}}{|\overrightarrow{B}|}$ son unitarios y el vector $\overrightarrow{v}$ es la diagonal del paralelogramo determinado por los dos vectores anteriores, que a su vez es un rombo. Por lo tanto, $\overrightarrow{v}$ está en la dirección de la bisectriz del ángulo $\angle BAC$. $\square$

El producto punto de dos vectores

Si $\overrightarrow{v} = (a,b)$ y $\overrightarrow{w} = (c,d)$, el *producto punto* $\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w}$ se define como el escalar $ac + bd$. El producto punto, también se define en tres o más dimensiones y la regla es la misma en todos los casos: Multiplicar las coordenadas correspondientes y luego sumar los resultados. Por ejemplo, en dimensión 3, si $\overrightarrow{v} = (a,b,c)$ y $\overrightarrow{w} = (a',b',c')$, tenemos que $\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w} = aa' + bb' + cc'$. Es fácil comprobar que las leyes conmutativa y distributiva las satisface el producto punto. Esto es, si $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ son tres vectores cualesquiera, entonces $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{u} \bullet (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w}$.

Volviendo a los vectores en el plano, si $\overrightarrow{v} = (a,b)$, es fácil ver que $\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{v} = a^2 + b^2$, que es el cuadrado de la longitud de una flecha que representa a $\overrightarrow{v}$. Notemos además que $\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{v} \geq 0$. Para representar la longitud de un vector, se acostumbra usar la notación de valor absoluto y, así, escribimos $\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{v} = |\overrightarrow{v}|^2$. Observa que si P y Q son puntos y PQ denota la longitud del segmento de recta que determinan, escribimos $|\overrightarrow{PQ}| = PQ$.

Consideremos un triángulo ABC y sean a, b y c las longitudes de los lados BC, AC y AB, respectivamente. Si $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB}$, tenemos que $\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{v} = |\overrightarrow{v}|^2 = (AC)^2 = b^2$ y, análogamente, tenemos que $\overrightarrow{w} \bullet \overrightarrow{w} = c^2$. Por otra parte, como $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{w} + \overrightarrow{BC}$, tenemos que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}$ y así,

$$(\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}) \bullet (\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}) = |\overrightarrow{BC}|^2 = (BC)^2 = a^2.$$

Desarrollando el lado izquierdo de las igualdades anteriores, usando las leyes conmutativa y distributiva del producto punto, obtenemos que

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}) \bullet (\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}) &= (\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}) \bullet \overrightarrow{v} - (\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}) \bullet \overrightarrow{w} \\ &= \overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{v} - \overrightarrow{w} \bullet \overrightarrow{v} - \overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w} + \overrightarrow{w} \bullet \overrightarrow{w} \\ &= b^2 + c^2 - 2(\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w}).\end{aligned}$$

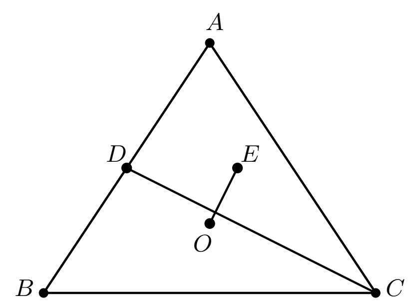
Por lo tanto, $a^2 = b^2 + c^2 - 2(\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w})$. Pero, por la ley de los cosenos, tenemos que $a^2 = b^2 + c^2 - 2\cos(A)$. Esto implica que $\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w} = bc\cos(A) = |\overrightarrow{v}| \cdot |\overrightarrow{w}|\cos(A)$. La fórmula anterior, nos da una interpretación geométrica del producto punto de dos vectores en el plano: Es el producto de sus longitudes por el coseno del ángulo entre ellos.

Teorema 3. Dos vectores distintos de cero en el plano son perpendiculares si y solo si su producto punto es igual a cero.

Demostración. Sean $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ y $\overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0}$ vectores en el plano. Si $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ son perpendiculares, entonces el ángulo entre ellos es de $90°$ y $\cos 90° = 0$. Luego, $\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w} = |\overrightarrow{v}| \cdot |\overrightarrow{w}| \cdot 0 = 0$. Recíprocamente, supongamos que $\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w} = 0$. Como $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ no son el vector cero, cada uno tiene longitud diferente de 0. Supongamos que $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ forman un ángulo α. Entonces, tenemos que $\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w} = |\overrightarrow{v}| \cdot |\overrightarrow{w}|\cos(\alpha)$. Como el producto punto de $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ es cero, se sigue que $|\overrightarrow{v}| \cdot |\overrightarrow{w}|\cos(\alpha) = 0$, esto es, $\cos(\alpha) = 0$, pues $|\overrightarrow{v}| \neq 0 \neq |\overrightarrow{w}|$. Por lo tanto, $\alpha = 90°$. □

Ejemplo 6 (Olimpiada de los Balcanes, 1985). Sean ABC un triángulo, O su circuncentro y D el punto medio de AB. Sea E el centroide del triángulo ACD. Demostrar que CD es perpendicular a OE si y solo si $AB = AC$.

Solución. Pongamos el origen en el circuncentro O del triángulo ABC. Entonces, de acuerdo con el Ejemplo 1 y el Teorema 1, tenemos que $\overrightarrow{D} = \frac{\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}}{2}$ y $\overrightarrow{E} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{C} + \overrightarrow{D}) = \frac{1}{6}(3\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} + 2\overrightarrow{C})$. Además, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{D} - \overrightarrow{C} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} - 2\overrightarrow{C})$.



Luego, según el Teorema 3, $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{E}$ son perpendiculares si y solo si

$$(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} - 2\overrightarrow{C}) \bullet (3\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} + 2\overrightarrow{C}) = 0. \tag{2}$$

Como $OA = OB = OC$ y el origen es O, tenemos que $\overrightarrow{A} \bullet \overrightarrow{A} = \overrightarrow{B} \bullet \overrightarrow{B} = \overrightarrow{C} \bullet \overrightarrow{C}$ (pues $\overrightarrow{A} \bullet \overrightarrow{A} = |\overrightarrow{OA}|^2 = OA^2$, $\overrightarrow{B} \bullet \overrightarrow{B} = |\overrightarrow{OB}|^2 = OB^2$ y $\overrightarrow{C} \bullet \overrightarrow{C} = |\overrightarrow{OC}|^2 = OC^2$). Usando estas relaciones y las leyes conmutativa y distributiva del producto punto, la igualdad (2) es equivalente a la igualdad $\overrightarrow{A} \bullet (\overrightarrow{B} - \overrightarrow{C}) = \overrightarrow{A} \bullet \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} \bullet \overrightarrow{C} = 0$ y, por el Teorema 3, esta última igualdad es equivalente a que $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{CB}$ son perpendiculares. Por lo tanto, los segmentos OA y CB son perpendiculares. En particular, dado que O está en la mediatriz de BC, se sigue que A también está en dicha mediatriz, esto es, $AB = AC$. $\square$

Ejemplo 7. (Estados Unidos, 1975). Sean A, B, C y D cuatro puntos cualesquiera en el plano. Demuestra que $AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 \geq AB^2 + CD^2$.

Solución. Pongamos el origen en el punto A. Observemos que la desigualdad a demostrar se puede escribir en la forma:

$$\overrightarrow{C}\bullet\overrightarrow{C}+\overrightarrow{D}\bullet\overrightarrow{D}+(\overrightarrow{C}-\overrightarrow{B})\bullet(\overrightarrow{C}-\overrightarrow{B})+(\overrightarrow{D}-\overrightarrow{B})\bullet(\overrightarrow{D}-\overrightarrow{B}) \geq \overrightarrow{B}\bullet\overrightarrow{B}+(\overrightarrow{D}-\overrightarrow{C})\bullet(\overrightarrow{D}-\overrightarrow{C}).$$

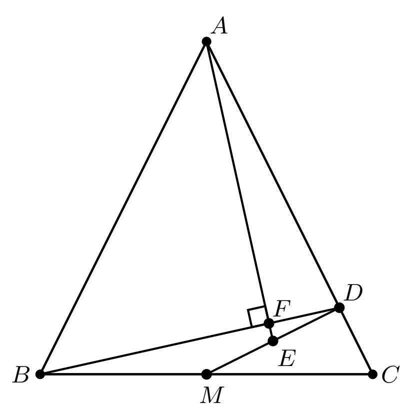
Explandiendo y simplificando, esta desigualdad es equivalente a la desigualdad

$$(\overrightarrow{B} - \overrightarrow{C} - \overrightarrow{D}) \bullet (\overrightarrow{B} - \overrightarrow{C} - \overrightarrow{D}) \geq 0,$$

la cual es verdadera por propiedades del producto punto.
Más aún, la igualdad se da si y solo si $\overrightarrow{B} - \overrightarrow{C} = \overrightarrow{D} = \overrightarrow{D} - \overrightarrow{A}$ (pues el origen es A), esto es, $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD}$, lo cual es equivalente a que $ABCD$ sea un paralelogramo. $\square$

Ejemplo 8. (Arabia Saudita, 2013). Sean ABC un triángulo, M el punto medio de BC, D la proyección de M sobre AC y E el punto medio de MD. Demostrar que las rectas AE y BD son perpendiculares si y solo si $AB = AC$.

Solución. Pongamos el origen en el vértice C y al eje de las x sobre el segmento CA. Como M es el punto medio de BC, el Ejemplo 1 implica que $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})$, o, de manera equivalente, $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC}$. Análogamente, como E es el punto medio de MD, obtenemos que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{ME} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AD})$.



Por otro lado, como MD y AC son perpendiculares, por el Teorema 3 tenemos que $\overrightarrow{AD} \bullet \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{ME} \bullet \overrightarrow{DC} = 0$. Luego,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AE} \bullet \overrightarrow{BD} &= 2\overrightarrow{AE} \bullet \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{AE} \bullet \overrightarrow{DC} \\ &= (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AD}) \bullet \overrightarrow{MD} + (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{ME}) \bullet \overrightarrow{DC} \\ &= \overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{MC} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{BC}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\overrightarrow{AE} \bullet \overrightarrow{BD} = 0$ si y solo si $\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{BC} = 0$, esto es, AE y BD son perpendiculares si y solo si la mediana AM del triángulo ABC es una altura. De manera equivalente, AE y BD son perpendiculares si y solo si $AB = AC$. $\square$

Teorema 4. Sea ABC un triángulo con circuncentro O, ortocentro H, incentro I y excentro I_A opuesto al ángulo en A. Si el origen está en O, entonces

$$\begin{aligned}\overrightarrow{H} &= \overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}, \\ \overrightarrow{I} &= \frac{a\overrightarrow{A} + b\overrightarrow{B} + c\overrightarrow{C}}{a+b+c}, \\ \overrightarrow{I_A} &= \frac{a\overrightarrow{A} - b\overrightarrow{B} - c\overrightarrow{C}}{a-b-c},\end{aligned}$$

donde $a = BC, b = AC$ y $c = AB$.

Demostración. Sea G el centroide del triángulo ABC. Usaremos el hecho de que los puntos O, G y H son colineales (están en la recta de Euler) y que el punto O está en el lado opuesto de G desde H con $HG = 2GO$. Entonces, $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$, esto es, $\overrightarrow{H} = 3\overrightarrow{G} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}$, donde la segunda igualdad se sigue por el Teorema 1.
Por otro lado, sea D el punto de intersección de AI y BC. Por el teorema de la bisectriz, tenemos que $\frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{CD}} = \frac{c}{b}$. Por el Corolario 1, sabemos que $\overrightarrow{D} = \frac{b\overrightarrow{B}+c\overrightarrow{C}}{b+c}$. Además, nuevamente por el teorema de la bisectriz, tenemos que $\frac{AI}{ID} = \frac{c}{BD} = \frac{b}{CD} = \frac{b+c}{a}$. Luego, nuevamente por el Corolario 1,

$$\overrightarrow{I} = \frac{a\overrightarrow{A} + (b+c)\overrightarrow{D}}{a+b+c} = \frac{a\overrightarrow{A} + b\overrightarrow{B} + c\overrightarrow{C}}{a+b+c}.$$

Finalmente, también se puede ver que $\frac{AI_A}{I_AD} = -\frac{b+c}{a}$ usando el teorema de la bisectriz externa. Luego, por el Corolario 1, obtenemos que

$$\overrightarrow{I_A} = \frac{a\overrightarrow{A} - b\overrightarrow{B} - \overrightarrow{C}}{a-b-c}. \qquad \square$$

Teorema 5. Sean $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ vectores no nulos cualesquiera del plano. Entonces se satisface lo siguiente:

1) **(Desigualdad de Cauchy-Schwarz)** $|v \bullet w| \leq |v||w|$, con la igualdad si y solo si $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{w}$ para algún número real λ.

2) **(Desigualdad del triángulo)** $|v + w| \leq |v| + |w|$, con la igualdad si y solo si $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{w}$ para algún $\lambda > 0$.

Demostración. 1) Dado que $v \bullet w = |v||w|\cos\theta$ donde θ es el ángulo entre v y w, y dado que $|\cos\theta| \leq 1$ para todo ángulo θ, se sigue que $|v \bullet w| = |v||w||\cos\theta| \leq |v||w|$. Más aún, es claro que la igualdad se da si y solo si $|\cos\theta| = 1$, lo cual equivale a que $\theta = 0°$ o $\theta = 180°$. Luego, la igualdad se da si y solo si $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ tienen la misma dirección, esto es, $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{w}$ para algún número real λ.

2) Tenemos que

$$\begin{aligned}|v+w|^2 &= (v+w)\bullet(v+w) = v\bullet v + 2(v\bullet w) + w\bullet w\\ &= |v|^2 + 2(v\bullet w) + |w|^2 \leq |v|^2 + 2|v\bullet w| + |w|^2\\ &\leq |v|^2 + 2|v||w| + |w|^2 = (|v|+|w|)^2,\end{aligned}$$

de donde se sigue la desigualdad deseada. Más aún, la igualdad se da si y solo si $\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w} = |\overrightarrow{v}||\overrightarrow{w}|\cos\theta = |\overrightarrow{v}||\overrightarrow{w}|$, lo cual es equivalente a que $\cos\theta = 1$, esto es, $\theta = 0°$. De esta manera, la igualdad se da si y solo si $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ tienen la misma dirección y sentido, esto es, $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{w}$ para algún $\lambda > 0$. □

Ejemplo 9. (Lista Larga Olimpiada Internacional, 1990) Sea ABC un triángulo escaleno. Sean G, H, I su centroide, ortocentro e incentro, respectivamente. Demuestra que $\angle GIH > 90°$.

Solución. Pongamos el origen en el circuncentro del triángulo ABC. Dado que

$$(\overrightarrow{G} - \overrightarrow{I}) \bullet (\overrightarrow{H} - \overrightarrow{I}) = GI \cdot HI \cos\angle GIH,$$

basta demostrar que $(\overrightarrow{G} - \overrightarrow{I}) \bullet (\overrightarrow{H} - \overrightarrow{I}) = \overrightarrow{G} \bullet \overrightarrow{H} + |\overrightarrow{I}|^2 - \overrightarrow{I} \bullet (\overrightarrow{G} + \overrightarrow{H}) < 0$. Si R denota el circunradio del triángulo ABC, dado que $|\overrightarrow{A}| = |\overrightarrow{B}| = |\overrightarrow{C}| = R$, tenemos que $2\overrightarrow{B} \bullet \overrightarrow{C} = |\overrightarrow{B}|^2 + |\overrightarrow{C}|^2 - |\overrightarrow{B} - \overrightarrow{C}|^2 = 2R^2 - a^2$. Se tienen fórmulas análogas para $2\overrightarrow{C} \bullet \overrightarrow{A}$ y $2\overrightarrow{A} \bullet \overrightarrow{B}$, de donde se obtiene que

$$\overrightarrow{G} \bullet \overrightarrow{H} = \frac{1}{3}|\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}|^2 = 3R^2 - \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2),$$

donde $BC = a$, $CA = b$ y $AB = c$. Usando la fórmula para $\overrightarrow{I}$ del Teorema 4, obtenemos que

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{I}|^2 &= R^2 - \frac{abc}{a+b+c}\\ \overrightarrow{I} \bullet (\overrightarrow{G} + \overrightarrow{H}) &= 4R^2 - \frac{2[a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b)]}{3(a+b+c)}.\end{aligned}$$

Luego, sumando y simplificando, el problema es equivalente a probar que

$$a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b)>0.$$

Por la simetría de la expresión y dado que el triángulo ABC es escaleno, podemos suponer que $a>b>c$, de modo que $a(a-b)(a-c)>b(a-b)(b-c)$. Luego, $a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)>0$ y como $c(c-b)(c-a)>0$, se sigue la desigualdad deseada. □

Ejemplo 10. (Olimpiada Internacional, 2001). Sea ABC un triángulo con centroide G. Determina, con argumentos, la posición en el plano de ABC del punto P tal que $AP\cdot AG+BP\cdot BG+CP\cdot CG$ es mínimo y expresa dicho mínimo en términos de los lados de ABC.

Solución. Pongamos el origen en G. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tenemos que

$$\begin{aligned}
&AG\cdot AP+BG\cdot BP+CG\cdot CP\\
&=|\overrightarrow{A}||\overrightarrow{A}-\overrightarrow{P}|+|\overrightarrow{B}||\overrightarrow{B}-\overrightarrow{P}|+|\overrightarrow{C}||\overrightarrow{C}-\overrightarrow{P}|\\
&\geq \overrightarrow{A}\bullet(\overrightarrow{A}-\overrightarrow{P})+\overrightarrow{B}\bullet(\overrightarrow{B}-\overrightarrow{P})+\overrightarrow{C}\bullet(\overrightarrow{C}-\overrightarrow{P})\\
&=|\overrightarrow{A}|^2+|\overrightarrow{B}|^2+|\overrightarrow{C}|^2-(\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}+\overrightarrow{C})\bullet\overrightarrow{P}\\
&=|\overrightarrow{A}|^2+|\overrightarrow{B}|^2+|\overrightarrow{C}|^2,
\end{aligned}$$

donde la última iguldad se debe a que $\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}+\overrightarrow{C}=3\overrightarrow{G}=\overrightarrow{0}$.
Ahora bien, es evidente que la cota inferior se alcanza cuando $\overrightarrow{P}=\overrightarrow{0}$, esto es, cuando $P=G$. De hecho, si la igualdad se alcanza, entonces, por el caso de la igualdad en la desigualdad de Cauchy-Schwarz (Teorema 5), $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$ y $\overrightarrow{C}$ deben ser múltiplos escalares de $\overrightarrow{A}-\overrightarrow{P}$, $\overrightarrow{B}-\overrightarrow{P}$ y $\overrightarrow{C}-\overrightarrow{P}$, respectivamente. A su vez, esto implica que $\overrightarrow{P}$ es múltiplo escalar de $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$ y $\overrightarrow{C}$ al mismo tiempo. Esto únicamente es posible si $\overrightarrow{P}=\overrightarrow{0}$, es decir, si $P=G$.
Si ahora consideramos A' como la intersección de la paralela a AB por C y la paralela a AC por B, denotamos $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$ y M el punto medio de BC, entonces aplicando la ley del paralelogramo[4] en el paralelogramo $ABA'C$, obtenemos que $A'A^2+a^2=2b^2+2c^2$ y, dado que $A'A=2AM=3AG$, se sigue que

$$AG^2=\frac{4}{9}AM^2=\frac{4}{9}\cdot\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}=\frac{2b^2+2c^2-a^2}{9}.$$

Análogamente, obtenemos que $BG^2=\frac{2c^2+2a^2-b^2}{9}$ y $CG^2=\frac{2a^2+2b^2-c^2}{9}$, de donde se sigue que $AG^2+BG^2+CG^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{3}$. □

A continuación dejamos una lista de 10 problemas de geometría para que el lector resuelva usando métodos vectoriales.

[4]**Ley del paralelogramo:** Si $XYZW$ es un paralelogramo con lados x, y y diagonales d_1 y d_2, entonces $d_1^2+d_2^2=2(x^2+y^2)$.

Ejercicios

1) Demuestra que en todo paralelogramo, el segmento que une un vértice con el punto medio de alguno de los lados opuestos triseca una diagonal y es trisecado por ella.

2) Sea D el punto medio de la mediana AE del triángulo ABC. La recta BD corta a AC en el punto F. Determina la razón en que F divide a AC.

3) Demuestra que los puntos medios de los lados de un cuadrilátero cualquiera siempre forman un paralelogramo.

4) Sean ABC y PQR dos triángulos cualesquiera, y sean L, M y N los puntos medios de AP, BQ, CR, respectivamente. Demuestra que los centroides de los triángulos ABC, PQR y LMN son colineales.

5) Sean ABC y $A'B'C'$ dos triángulos equiláteros (con los vértices etiquetados en el sentido de las manecillas del reloj). Sean P, Q y R los puntos medios de los segmentos AA', BB' y CC'. Demuestra que PQR es equilátero.

6) Sea ABC un triángulo con ortocentro H. Sea A_0 el punto medio del lado BC y sean A_1 y A_2 las intersecciones de BC con la circunferencia centrada en A_0 y de radio HA_0. De manera análoga se definen B_1, B_2 en CA y C_1, C_2 en AB. Prueba que A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 son puntos concíclicos.

7) Sean $E,\ F,\ G,\ H$ los puntos medios de los lados AB, BC, CD, DA de un cuadrilátero convexo $ABCD$. Prueba que las rectas AB y CD son perpendiculares si y solo si $BC^2 + AD^2 = 2(EG^2 + FH^2)$.

8) Sea G el centroide del triángulo ABC y sean $A_1,\ B_1,\ C_1$ los puntos medios de los lados $BC,\ CA,\ AB$, respectivamente. Sea M un punto cualquiera. Muestra que

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + 9MG^2 = 4(MA_1^2 + MB_1^2 + MC_1^2).$$

9) Sean H, O y R el ortocentro, el circuncentro y el circunradio del triángulo ABC y sea Q el punto tal que O biseca QH. Sean G_1, G_2, G_3 los centroides de los triángulos QBC, QCA y QAB, respectivamente. Demuestra que

$$AG_1 = BG_2 = CG_3 = \frac{4}{3}R.$$

10) Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico y sean H_A, H_B, H_C y H_D los ortocentros de los triángulos BCD, CDA, DAB y ABC, respectivamente. Demuestra que el cuadrilátero $H_AH_BH_BH_D$ también es cíclico.

Bibliografía

1) I. Martin Isaacs. *Geometría universitaria.* Thomson Learning, 2002.

2) Kin Y. Li. *Vector Geometry.* Mathematical Excalibur, Vol. 6, No. 5, 2002.