Ajedrez y Matemáticas

Por Victor Manuel Grijalva Altamirano

Nivel Intermedio

En la olimpiada de matemáticas, es muy común encontrar problemas que involucren un tablero de ajedrez. Dicho tablero, puede ser el clásico de 8×8 o de $n \times m$, donde n y m son números naturales. Es mucha la variedad de este tipo problemas, que para resolverlos necesitamos saber distintas técnicas de combinatoria tales como: Principio de casillas, Invarianza, Coloreado, Teoría de juegos, Teoría de grafos, entre otros. En este artículo, abordaremos una selección de ejemplos resueltos con el objetivo de que el lector adquiera familiaridad con este tipo de problemas y ponga en práctica muchas de las técnicas previamente mencionadas.

Un posible origen

El origen del ajedrez es muy incierto, y hasta el día de hoy no hay una versión oficial. Muchos historiadores opinan que el ajedrez nació en la india en el siglo VI, y además, de que el ajedrez proviene de otro juego llamado *Chaturanga*. Aunque hay una leyenda muy popular sobre su origen: *La leyenda del ajedrez.* Cuenta la leyenda que hace mucho tiempo en un reino de la india gobernaba un rey llamado Sheram, un día, ordenó a uno de sus sirvientes, Sissa, que creara un juego que consiguiera divertirle. Después de un tiempo, Sissa, le presentó a su rey el juego que le había pedido: el ajedrez. Luego de entender el juego y jugar varias veces, el rey Sheram quedó sorprendido ante el maravilloso juego, así que en agradecimiento le djo a Sissa que como recompensa le pidiera lo que deseara. Después de la insistencia del rey, Sissa dijo lo siguiente:

¡Oh, gran rey! Dame tantos granos de trigo como quepan en las 64 casillas del tablero de ajedrez, de tal manera que se ponga un grano en la primera casilla, dos en la segunda, cuatro en la tercera, ocho para la cuarta y que siga duplicándose hasta la casilla 64.

El rey sorprendido por la “modesta” petición de Sissa aceptó y mandó a los matemáticos de la corte a que calcularan la cantidad de granos de trigo que Sissa había pedido, es decir: $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{63}$. Después de que sus sirvientes hicieron las cuentas, el rey Sheram se dio cuenta de que ni con todo el trigo de su reino alcanzaría dicha cifra: 18,446,744,073,709,551,615 granos de trigo. El rey Sheram sonrió, pues la petición de Sissa era todo menos “modesta”.

Quizás nunca conozcamos el verdadero origen del ajedrez, lo que sí es un hecho es que ha causado una gran pasión desde su invención, pues el ajedrez es: Un juego, un deporte y un arte.

Ajedrez y matemáticos

Grandes matemáticos como George Polya, Carl Gauss, L. Euler, Donald E. Knuth, Legendre, etc., se interesaron por problemas matemáticos en el ajedrez. A continuación, mencionamos algunos de esos problemas.

El problema de las ocho damas

El *problema de las ocho damas* es un pasatiempo que consiste en contar todas las maneras posibles de poner 8 damas en el tablero de ajedrez de 8×8 sin que ninguna dama amenace a otra. En la actualidad se sabe que hay 92 maneras de hacer dicha tarea, pero por mucho tiempo fue un reto que cautivó a muchas personas.

Fue propuesto por primera vez por el ajedrecista alemán Maxx Bezzel en septiembre de 1848 en el periódico de ajedrez *Schachzeitung*. Dos soluciones fueron publicadas en enero de 1849 y un total de 40 soluciones aparecieron en *Schachzeitung* entre los años 1849 y 1854. El problema fue otra vez propuesto por Franz Nauck el 1 de junio de 1850 en el periódico *Illustrirte Zeitung*, este periódico contaba con mayor número de lectores y entre ellos el matemático Gauss. Nauck también consideró una variante del problema: encontrar todas las soluciones con damas colocadas en las casillas $b4$ y $d5$. El 29 junio de 1850, Nauck afirmó en *Illustrirte Zeitung*, que el problema principal tenía 60 soluciones. Unos meses después, el 21 de septiembre, Nauck hace una corrección y da las 92 soluciones en *Illustrirte Zeitung*.

El problema del caballo

El *problema del caballo* es un problema antiguo, el cual consiste que dado un tablero de ajedrez de $n \times n$ casillas y un caballo de ajedrez colocado en alguna de las casillas, el caballo pase por todas las casillas una sola vez siguiendo el movimiento usual del caballo. Se han encontrado muchas soluciones a este problema; a continuación mostramos la solución del matemático Leonhard Euler.

1	48	31	50	33	16	63	18
30	51	46	3	62	19	14	35
47	2	49	32	15	34	17	64
52	29	4	45	20	61	36	13
5	44	25	56	9	40	21	60
28	53	8	41	24	57	12	37
43	6	55	26	39	10	59	22
54	27	42	7	58	23	38	11

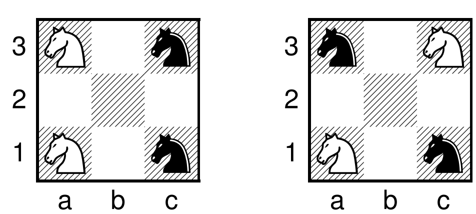
En el tablero anterior, cada casilla tiene un número, dicho número indica el orden del movimiento que debe seguir el caballo para recorrer el tablero. El problema del caballo tiene algunas variaciones, tales como:

1) Buscar soluciones, en las cuales se debe llegar a la misma casilla de la cual se partió.

2) Tableros de diferente número de columnas o diferente número de filas.

Ejemplos resueltos

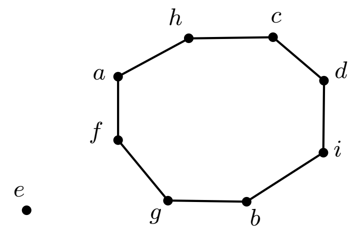
Problema 1. *Considere los dos tableros de ajedrez de* 3×3 *que se muestran a continuación, en cada uno de ellos hay dos caballos blancos y dos caballos negros. Moviendo una pieza a la vez tantas veces como queramos y siguiendo el movimiento estándar del caballo en el juego de ajedrez, ¿es posible mover las piezas del tablero izquierdo de tal forma que nos quede el tablero derecho? (Nota: No puede haber dos caballos en un mismo cuadrito).*



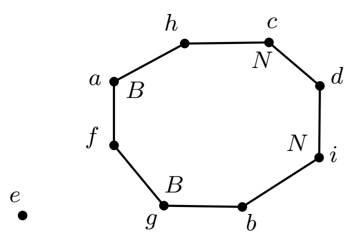
Solución. Resolveremos este problema con ayuda de un grafo. A cada casilla del tablero le asignaremos una letra como muestra el siguiente diagrama:

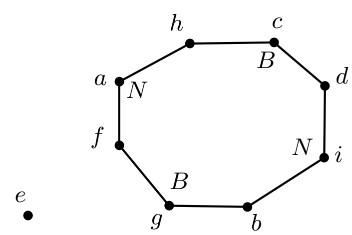
a	b	c
d	e	f
g	h	i

Cada una de estas letras formarán los vértices de un grafo. Los vértices X y Y serán unidos con una arista, si es posible moverse con el caballo de la casilla marcada con la letra X a la casilla marcada con la letra Y en un movimiento. Si aplicamos esta regla a cada una de las casillas obtenemos el siguiente grafo:



Ahora le asignaremos un grafo a cada uno de los dos tableros, agregaremos la etiqueta N a los vértices en donde se encuentre un caballo negro y B a los vértices en donde se encuentre un caballo blanco. Quedando así, los siguientes dos grafos:





Comparando ambos grafos podemos observar que el orden de las piezas negras y blancas son diferentes. De lo cual podemos concluir que no es posible cambiar el orden de los caballos, pues un caballo solo puede moverse sobre los vértices vacíos. De aquí, es imposible mover las piezas del tablero izquierdo de tal forma que nos quede el tablero derecho. $\square$

Problema 2. *Sobre un tablero de ajedrez de* 2020×2018*,* A *y* B *juegan por turnos a mover un caballo sobre el tablero (movimiento en forma de L). Inicialmente, el tablero no tiene ninguna pieza. En un principio, el jugador* A *coloca una pieza del caballo en cualquiera de las 4076360 casillas libres. Luego, le toca el turno al jugador* B*, quien solo puede mover el caballo a una nueva casilla no visitada antes. Después, le toca mover al jugador* A*, el cual debe mover el caballo a otra casilla no visitada antes en ninguno de los turnos anteriores, y así, sucesivamente. En este juego, pierde el primer jugador que no pueda mover el caballo a una nueva casilla. Determinar qué jugador tiene estrategia ganadora.*

Solución. Mostraremos que el jugador B tiene estrategia ganadora, es decir, sin importar el movimiento que realice el jugador A, el jugador B ganará este juego. Para ello, observemos el comportamiento del caballo sobre un tablero de 4×2. En un tablero de 4×2, enumeramos las 4 casillas de la primera columna con los números $1, 2, 3$ y 4. Si colocamos un caballo en la casilla con el número 1 y realizamos un movimiento legal del caballo, en el mismo tablero de 4×2 encontraremos otra casilla al que podemos llegar. Esta nueva casilla lo enumeramos con el mismo número 1. Este mismo procedimiento lo haremos para los tres números restantes. El tablero quedará como el que se muestra a continuación:

1	3
2	4
3	1
4	2

Observemos que en cada tablero de 4×2, a cada casilla X le corresponde una única casilla Y a la cual podemos llegar moviendo el caballo apartir de X. Ahora dividamos el tablero de ajedrez 2020×2018, en tableros de 4×2 (nos quedarán exactamente 509545 tableros de 4×2 y no sobra ninguna casilla). Procederemos a probar que el jugador B tiene la estrategia ganadora. Al inicio el jugador A coloca el caballo en una casilla al azar. Sin importar cual elige A, colocó el caballo en una casilla de algún tablero de 4×2. La estrategía del jugador B, es mover el caballo a la otra casilla a la cual se puede llegar y que está en el mismo tablero de 4×2. Esto obligará al jugador A a buscar otro movimiento en otro tablero de 4×2 y nuevamente B mueve el caballo a la otra casilla a la cual se puede llegar y que está en el mismo tablero de 4×2. Si continua con esta estrategia el jugador B, el jugador A tiene dos posibilidades.
Caso 1. En algún momento el jugador A no puede mover a una casilla no visitada.
Caso 2. El jugador A juega de forma muy acertada y realiza el movimiento número 4076359 (el penúltimo movimiento del juego). Luego, el jugador B solo tiene que mover el caballo a la otra casilla a la cual se puede llegar y que está en el mismo tablero de 4×2. Así, el jugador B realiza el último movimiento del juego.
En ambos casos el jugador A pierde, por lo cual el jugador B gana el juego. $\square$

En muchos problemas de combinatoria es muy útil aplicar el *Principio de las Casillas*, a continuación enunciamos dicho principio:

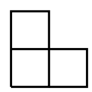
Proposición 1 (Principio de las Casillas)**.** *Si n objetos son acomodados en k lugares, entonces hay al menos $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ objetos en el mismo lugar.*

Problema 3. *(1^a Olimpiada Matemática de Colorado, 1984) En un tablero de ajedrez de 10×10, se han colocado 41 torres. Pruebe que entre esas 41 torres hay 5 torres que no se atacan mutuamente (es decir, no hay dos de ellas en la misma columna o fila).*

Solución. En este problema, necesitamos encontrar 5 torres que no estén colocadas en la misma fila y no estén colocadas en la misma columna. El uso adecuado del principio de las casillas en este problema nos garantizará la existencia de las 5 torres deseadas. Observemos que los objetos a acomodar son las 41 torres, y deseamos acomodarlas en 10 filas. Luego, por el principio de las casillas, hay una fila con al menos $\lceil \frac{41}{10} \rceil = 5$ torres. Hasta aquí, no hemos resuelto el problema, pues las 5 torres se encuentran en la misma fila. Necesitamos seguir trabajando con las filas restantes. Notemos que cada fila puede tener a lo más 10 torres, así, si eliminamos la fila en donde se encuentran las 5 torres, nos quedarán 9 filas y como mínimo 31 torres. Ahora, deseamos acomodar

31 torres en 9 filas; por el principio de las casillas, se sigue que hay una fila con al menos $\lceil \frac{31}{9} \rceil = 4$ torres. Si eliminamos dicha fila, nos quedarán 8 filas y como mínimo 21 torres. Nuevamente, aplicando el principio de casillas, se tiene que hay una fila con al menos $\lceil \frac{21}{8} \rceil = 3$ torres. Continuando con este procedimiento, podemos encontrar que hay 5 filas especiales que tienen al menos 1, 2, 3, 4, 5 torres, respectivamente. Ahora, busquemos las 5 torres deseadas en estas 5 filas teniendo en cuenta que solo resta cuidar que se encuentren en distintas columnas. Seleccionemos la torre que se encuentra en la fila que tiene al menos una torre. Luego, en la fila que tiene al menos dos torres, seleccionemos una de esas dos torres tal que no esté en la misma columna que la primera torre elegida. Después, en la fila que tiene al menos 3 torres, seleccionemos una de esas tres tal que no está en la misma columna que la primera torre y tampoco en la misma columna de la segunda torre elegida. Continuando con este procedimiento, elegiremos la dos torres restantates. Eureka! Hemos encontrado las 5 torres buscadas. □

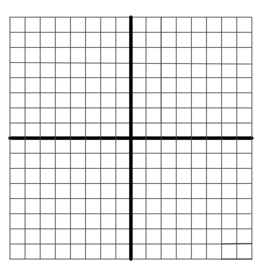
Problema 4. *Encuentre todos los enteros positivos n tal que si se remueve una casilla de un tablero de $2^n \times 2^n$, el tablero resultante se puede cubrir completamente usando las veces que queramos la siguiente figura que llamaremos L.*



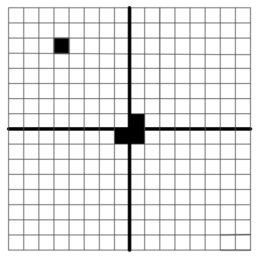
Solución. Después de hacer unos ejemplos sencillos podemos observar que todos los enteros $n \geq 1$ satisfacen el problema. Procederemos a demostrar dicha afirmación por inducción en n.

1) Caso base. Consideremos el caso cuando $n = 1$, así, el tablero es de 2×2. Al remover una casilla, queda exactamente la misma figura con la que se nos pide cubrir (salvo rotación). Luego, solo hacemos uso de una figura *L* y listo.

2) Paso inductivo. Sea $k \geq 2$ un entero, supongamos que podemos cubrir el tablero de $2^k \times 2^k$ con una casilla removida. Tenemos que usar de alguna manera nuestra hipótesis de inducción para probar que podemos cubrir el tablero de $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ con una casilla removida. Para ello, dividamos el tablero de $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ en cuatro subtableros de $2^k \times 2^k$, como se muestra en la siguiente figura:



Del tablero de $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ eliminaremos una casilla (es la condición del problema), dicha casilla tendrá que estar en alguno de los cuatro subtableros de $2^k \times 2^k$. Para terminar el problema, eliminemos una casilla en cada uno de los otros tres subtableros de $2^k \times 2^k$, de tal manera que formen la figura *L*, tal como se muestra en la siguiente figura:



Luego, observemos que cada uno de los cuatro subtableros de $2^k \times 2^k$ tiene una casilla removida. Así, por nuestra hipótesis inductiva, cada uno de los cuatro tablero se puede cubrir completamente. Recordemos que hemos removido 4 casillas y en el problema se nos pide remover solo una. Observemos que tres casillas de las cuatro removidas se pueden cubrir completamente si hacemos uso de solo una figura *L*. De aquí, hemos demostrado que es posible cubrir completamente con figuras *L* un tablero de $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ con una casilla removida.

Luego, concluimos por el pricipio de inducción que para cada $n \in \mathbb{N}$, todo tablero de $2^n \times 2^n$ con una casilla removida se puede cubrir completamente con figuras *L*. $\square$

Problema 5. *(Concurso Nacional,* 26^a *Olimpiada Mexicana de Matemáticas) Algunas ranas, unas de ellas rojas y otras verdes, se van a mover en un tablero de* 11×11*, de acuerdo a las siguientes reglas. Si una rana está ubicada, digamos, en la casilla marcada con* $\#$ *en la siguiente figura, entonces:*

1) Si es roja, puede saltar a cualquiera de las casillas marcadas con X*,*

2) Si es verde, puede saltar a cualquiera de las casillas marcadas con O*.*

		X		*O*		
	O				*X*	
			#			
	X				*O*	
		O		*X*		

Diremos que dos ranas (de cualquier color) se pueden encontrar en una casilla si ambas pueden llegar hasta ella saltando una o más veces, no necesariamente con el mismo número de saltos.

a) *Muestra que si ponemos* 6 *ranas (de cualquier color), entonces hay al menos* 2 *que se pueden encontrar.*

b) *¿Para qué valores de* k *es posible poner una rana roja y una rana verde de manera que haya exactamente* k *casillas en las que estas ranas se puedan encontrar?*

Solución. Analicemos primero el movimiento de las ranas rojas sobre el tablero. Para ello, enumeremos las 5 primeras casillas de la primera fila con los números del 1 al 5. Si colocamos una rana roja en la casilla que tiene el número 1 y realizamos movimientos permitidos de la rana roja, en el tablero encontraremos varias casillas a las que podemos llegar, dichas casillas las enumeramos con el número 1. Repetiremos este procedimiento para las casillas que tienen los números 2,3,4 y 5, respectivamente. El tablero que resulta de seguir estos pasos es el siguiente:

1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1
3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3
5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2
4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1
3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3
5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2
4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1

Por la manera en que se construyó el tablero anterior, si una rana roja empieza en la casilla con el número X, esta rana puede visitar todas las casillas enumeradas con el mismo número X, donde $X \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Además, una rana puede visitar cualquier fila y columna del tablero.

Ahora, analicemos la interacción de las ranas verdes con las ranas rojas. Para ello, coloquemos una rana verde sobre alguna casilla del tablero que hemos construido previamente. Por ejemplo, coloquemos una rana verde sobre la casilla superior izquierda (la casilla que tiene el número 1). Realicemos movimientos permitidos de la rana verde a partir de dicha casilla. Si marcamos todas las casillas que visitamos, el tablero quedará como el que se muestra a continuación:

1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1
3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3
5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2
4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1
3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3
5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2
4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1

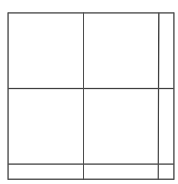
Observemos que una rana verde visita en cada columna y fila sólo un tipo de número. Notemos que en cada tablero de 5×5 la rana verde visita los 5 números distintos (vea la figura de arriba). Con estas observaciones, procederemos a demostrar las dos partes del problema:

Parte (a). Si colocamos 6 ranas en el tablero, puede ocurrir los siguientes dos casos:

Caso 1. En el tablero hay ranas de distintos colores. En este caso, las ranas de distintos colores se encuentran en cada tablero de 5×5.

Caso 2. Todas las ranas son del mismo color. Sin pérdida de generalidad, supongamos que todas las ranas son rojas. Así, por el principio de las casillas, hay al menos $\lceil \frac{6}{2} \rceil = 2$ ranas rojas que al colocarlas en el tablero caen en el mismo número. Luego, esas dos ranas se pueden encontrar.

Parte (b). Teniendo en cuenta que en cada tablero de 5×5 una rana roja y una verde se encuentran exactamente una vez, dividiremos el tablero de 11×11 en 9 regiones: 4 tableros de 5×5 (las 4 regiones comparten un lado en común), 4 tableros de 5×1 (las orillas) y una casilla (la esquina), tal como se muestra a continuación:



Dado que tenemos 4 tableros de 5×5 y ahí ya sabemos que se tienen que encontrar las dos ranas y además, como tenemos 9 regiones en total en todo el tablero se sigue que $4 \leq k \leq 9$. Sabemos que en cada tablero de 5×5 ambas ranas se tienen que encontrar, así que solo nos enfocaremos en el tablero de 5×5 que se encuentra en la parte superior izquierda. Si en ese tablero de 5×5 colocamos ambas ranas sobre la casilla superior izquierda (el que tiene el número 1), ambas ranas se encontrarán en las 9 regiones en las que hemos dividido el tablero de 11×11. Si colocamos ambas ranas en otra casilla del tablero de 5×5 que no sea la que ya hemos analizado, solo podremos visitar 4 o 6 regiones. Esto se debe a que no siempre es posible visitar las 5 regiones que se encuentran en la orilla (vea la figura de arriba). Por lo tanto, $k = 4$, 6 o 9. $\square$

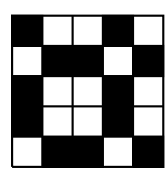
Problema 6. *(Olimpiada Matemática Rusa, 2000) Considere un tablero de* 200×200. *Cada casilla del tablero es coloreado de color blanco o negro, de tal manera que el número de casillas negras menos el número de casillas blancas en el tablero es 404. Pruebe que sin importar como se coloree el tablero siempre y cuando se cumpla con la condición mencionada, existe un cuadrado de* 2×2 *sobre el tablero tal que tiene un número impar de casillas negras.*

Solución. Procederemos por contradicción. Supongamos que todos los cuadrados de 2×2 sobre el tablero tienen un número par de casillas negras. Denotaremos por B y N al número de casillas blancas y casillas negras de la primera columna, respectivamente. Observemos que $B + N = 200$. Como estamos bajo el supuesto que todos los cuadrados de 2×2 sobre el tablero tienen un número par de casillas negras, notemos que una vez coloreado la primera columna, la forma de colorear la segunda columna solo tiene dos posibilidades:

1) Lo pintamos de la misma manera en que pintamos la primera columna.

2) Lo pintamos de la forma opuesta en que hemos pintado la primera columna.

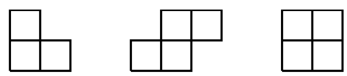
De forma similar, una vez coloreado la segunda columna, la tercera columna solo tiene dos formas de colorearse. En general, la forma en que coloreemos la primera columna nos dice las dos opciones que tienen las demás columnas de colorearse. El siguiente ejemplo, muestra un tablero de 5×5. En el tablero, la segunda columna está coloreada en forma opuesta a la manera que se coloreó la primera columna. La tercera columna está coloreado de la misma manera en que se coloreó la segunda columna, y así, sucesivamente.



Retomando nuestro problema, denotaremos por x al número de columnas del tablero coloreado exactamente en la misma manera que la primera columna, y denotaremos por y al número de columnas del tablero coloreado exactamente de la forma opuesta al de la primera columna. Observemos que $x + y = 200$. Notemos que $Nx + By$ es igual al número casillas negras en todo el tablero y $Bx + Ny$ es igual al número casillas blancas en todo el tablero. Por las condiciones del problema, tenemos que $(Nx + By) - (Bx + Ny) = 404$. Haciendo el uso adecuado del álgebra deducimos que $(x - y)(N - B) = 404$. Por otro lado, dado que $x + y = 200$, se sigue que x y y

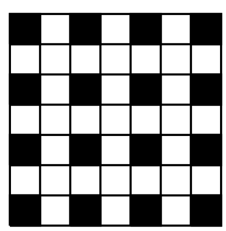
tienen la misma paridad (par + par= par e impar + impar=par). De forma similar, B y N tienen la misma paridad. De aquí, $x - y = 2m$ y $B - N = 2n$, para algún entero m y n. Observemos que $1 \leq x \leq 200$ y $0 \leq y \leq 199$, luego $-200 \leq x - y = 2m \leq 200$, es decir, $|m| \leq 100$. De forma análoga, se tiene que $|n| \leq 100$. Por otro lado, $(x - y)(N - B) = 4nm = 404$. Así, $mn = 101$. Lo cual es una contradicción, pues 101 es primo y además $|m| \leq 100$ y $|n| \leq 100$. $\square$

Problema 7. *(Lista corta, Olimpiada Internacional, 2002) Dado un entero positivo n, un tablero de $(2n+1) \times (2n+1)$ será cubierto por piezas de los tipos que se muestran a continuación:*



donde rotaciones y reflexiones de las piezas son permitidas. Pruebe que por lo menos $4n + 3$ piezas del primer tipo serán usadas.

Solución. Dado el tablero de $(2n + 1) \times (2n + 1)$, numeremos las filas y columnas del 1 al $2n + 1$. Las casillas que se encuentren en una fila impar y columna impar se van a colorear de negro y las otra casillas se dejarán en blanco. Por ejemplo, para el caso $n = 3$, tenemos un tablero de 7×7 y queda coloreado como se muestra a continuación:



Si coloreamos el tablero de $(2n + 1) \times (2n + 1)$ como se ha indicado, dicho tablero tendrá $(n+1)^2 = n^2+2n+1$ casillas negras y $3n^2+2n$ casillas blancas (al número total de casillas del tablero restele el número de casillas negras). Al colocar una pieza del primer tipo, notemos que esta pieza cubre dos casillas blancas y una negra, o cubre tres casillas blancas. Las otras dos piezas, siempre cubren 3 casillas blancas y una negra. Sea A el número de piezas del primer tipo que cubre dos casillas blancas y una negra, B el número de piezas del primer tipo que cubre tres casillas blancas y C el número de piezas de los otros dos tipos. Contando las casillas negras, tenemos que $A + C = n^2 + 2n + 1$. Contando las casillas blancas, tenemos que $2A + 3B + 3C = 3n^2 + 2n$. Ahora, notemos que:

$$
\begin{aligned}
4n + 3 &= 3(n^2 + 2n + 1) - (3n^2 + 2n) = 3(A + C) - (2A + 3B + 3C) \\
&= A - 3B \leq A + B.
\end{aligned}
$$

En consecuencia, para cubrir el tablero necesitamos al menos $4n + 3$ piezas del primer tipo.

Problema 8. *Considere un tablero de $2 \times 2n$. Encuentre el número total de maneras de colocar n piezas del rey en el tablero tal que estos no se ataquen mutuamente (un rey ataca a una pieza si este se encuentra en una casilla adyacente). El siguiente diagrama, muestra un ejemplo de 4 piezas de rey que no se atacan mutuamente en un tablero de 2×8 (la letra R indica que se ha colocado una pieza del Rey en dicha casilla).*

R						R	
		R		R			

Solución. Este problema lo resolveremos por recursión. Denotaremos por t_n al número total de maneras de colocar n piezas del rey en el tablero de $2 \times 2n$ tal que estos no se ataquen mutuamente. Empezaremos analizando los casos cuando $n = 1$ y $n = 2$.

	R		
		R	

Cuando $n = 1$, podemos notar que solo hay 4 posibilidades para colocar a un rey en un tablero de 2×2, así, $t_1 = 4$. Lo interesante del problema surge cuando analizamos el caso cuando $n = 2$. Debemos tener cuidado al colocar las piezas del rey, de no hacerlo, puede ocurrir el caso que muestra el diagrama de arriba (el rey de la columna 2 ataca al rey de la columna 3). Después de intentar muchos casos, podemos convencernos que $t_2 = 12$. Por la naturaleza del problema, nos conviene dividir el tablero de $2 \times 2n$ en n cuadrados de 2×2. Estudiaremos el caso cuando $n = 3$ y de ahí generalizaremos. Recordemos que hemos dividido el tablero de 2×6 en 3 cuadrados de 2×2 (vea el diagrama de abajo). El primero cuadrado de 2×2 es el que tiene las letras: a, b, c y d. El segundo cuadrado de 2×2 es el que tiene las letras: e, f, g y h. El tercer cuadrado de 2×2 es el que tiene las letras: i, j, k y l. Hallaremos el valor de t_3 teniendo en cuenta que $t_1 = 4$ nos dice el número de formas de colocar a una pieza del rey en un tablero de 2×2 y $t_2 = 12$ nos dice el número de formas de colocar a dos piezas del rey en un tablero de 2×4.

a	c	e	g	i	k
b	d	f	h	j	l

Fijemos nuestra atención en el tercer cuadrado de 2×2. Dado que ya conocemos la solución para el tablero de 2×4 (el valor de t_2) y como en el tercer cuadrado de 2×2 podemos colocar a una pieza del rey en cualquiera de sus 4 casillas, nuestra primera estimación para t_3 sería $t_3 = 4t_2$. Pero como mencionamos previamente, hay que tener cuidado al colocar una pieza del rey en la segunda columna del segundo cuadrado (g

y h) y al colocar una pieza del rey en la primera columna del tercer cuadrado (i y j). Hay 4 maneras de colocar al mismo tiempo las dos piezas del rey en las dos columnas que no queremos y, cada una de esas maneras, dejan fijo a un rey en el segundo y en el tercer cuadrado de 2×2. Así, en cada uno de esos 4 casos, estamos agregando a nuestra primera estimación de t_3, la solución del primer cuadrado de 2×2, esto es, t_1. Para eliminar aquellos casos que no son de nuestro interés (el que acabamos de mencionar) basta con notar que $t_3 = 4t_2 - 4t_1$. En general, para $n \geq 3$, $t_n = 4t_{n-1} - 4t_{n-2}$ nos da el número total de maneras de colocar n piezas del rey en el tablero de $2 \times 2n$ tal que estos no se ataquen mutuamente. Ahora, procederemos a obtener una fórmula cerrada para t_n. Como $t_n = 4t_{n-1} - 4t_{n-2}$, se sigue que:

$$t_n - 2t_{n-1} = 2(t_{n-1} - 2t_{n-2}) = 2(2(t_{n-2} - 2t_{n-3})) = \cdots = 2^{n-2}(t_2 - 2t_1) = 2^n.$$

De aquí, $t_n - 2t_{n-1} = 2^n$, lo cual implica que

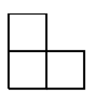
$$\begin{aligned} t_n - 2t_{n-1} &= 2^n \\ 2t_{n-1} - 4t_{n-2} &= 2^n \\ 4t_{n-2} - 8t_{n-3} &= 2^n \\ &\vdots \\ 2^{n-2}t_2 - 2^{n-1}t_1 &= 2^n. \end{aligned}$$

Sumando todos los términos del lado izquierdo y del lado derecho, se sigue que $t_n - 2^{n-1}t_1 = 2^n(n-1)$. De lo cual deducimos que $t_n = 2^n(n+1)$. $\square$

Ahora, dejamos unos ejercicios para el lector.

Ejercicios

1) Sea k un entero no negativo. ¿Para qué enteros positivos n de la forma $6k + 3$ es posible cubrir un tablero de $n \times n$ completamente, usando solamente piezas como la siguiente figura?



2) Sobre un tablero de 8×8, A y B juegan por turnos a colocar caballos negros y caballos blancos, respectivamente. Un jugador pierde si el coloca un caballo sobre una casilla el cual se encuentra atacado por algún caballo de su oponente, o si no ya no hay casillas libres para colocar su caballo. Si el jugador A empieza, ¿quién tiene la estrategia ganadora?

3) Determine el número de maneras de cubrir un tablero de 4×4 usando 8 fichas de dominó (2×1).

4) En cada cuadrado de una cuadrícula de 6×6 hay una luciérnaga apagada o encendida. Una movida es escoger tres cuadrados consecutivos, ya sean los tres verticales o

los tres horizontales, y cambiar de estado a las tres luciérnagas que se encuentran en dichos cuadrados. Cambiar de estado a una luciérnaga significa que si está apagada se enciende y viceversa. Muestre que si inicialmente hay una luciérnaga encendida y las demás apagadas, no es posible hacer una serie de movidas tales que al final todas las luciérnagas estén apagadas.

5) Dado un tablero de 8×8, ¿de cuántas formas es posible colocar en cada casilla el número -1 o el número 1, de tal forma que la suma de cada tablero de 2×2 sea igual a 0?

6) Sea n un número entero mayor que 1. ¿De cuántas formas se pueden acomodar todos los números $1, 2, 3, \ldots, 2n$ en las casillas de una cuadrícula de $2 \times n$, uno en cada casilla, de manera que cualesquiera dos números consecutivos se encuentren en casillas que comparten un lado en la cuadrícula?

7) Los enteros del 1 al $n^2 (n \geq 2)$ son colocadas arbitrariamente sobre un tablero de $n \times n$. Pruebe que existen dos casillas adyacentes (comparten un vértice en común o un lado en común) tal que la diferencia de los números colocadas en ellas no es menor que $n + 1$.

8) Considere un tablero de 4×1995. ¿Puede un caballo moverse sobre todas las casillas del tablero (puede visitar una casilla solo una vez) de tal forma que la última casilla de su recorrido sea la primera en donde empezó?

9) En un tablero de ajedrez de 2017×2017, se han colocado en la primera columna 2017 caballos de ajedrez, uno en cada casilla de la columna. Una tirada consiste en elegir dos caballos distintos y de manera simultánea moverlos como se mueven los caballos de ajedrez. Encuentra todos los posibles valores enteros de k con $1 \leq k \leq 2017$, para los cuales es posible llegar a través de varias tiradas, a que todos los caballos estén en la columna k, uno en cada casilla.

10) En cada casilla de un tablero de $n \times n$ hay un foco. Inicialmente todos los focos están apagados. En un paso, se permite cambiar el estado de todos los focos en una fila o de todos los focos en una columna (los focos prendidos se apagan y los focos apagados se prenden). Muestra que si después de cierta cantidad de pasos hay uno o más focos prendidos, entonces en ese momento hay al menos n focos prendidos.

Bibliografía

1) Alexander Soifer. *The Colorado Mathematical Olympiad: The Third Decade and Further Explorations.* Springer, 2011.

2) Bin Xiong, Zhongyi Zheng. *Graph Theory*. Mathematical Olympiad Series, Vol. 3. East China Normal University Press, 2010.

3) Vlad Matei, Elizabeth Reiland. *112 Combinatorial Problems from the Awesome-Math Summer Program.* Vol. 21, XYZ Press, 2016.

4) Yao Zhang. *Combinatorial problems in mathematical competitions.* Vol. 4, Mathematical Olympiad Series, 2011.