Invarianza y Monovarianza

Por Leonardo Ariel García Morán y Oriol Andreu Solé Pi

Nivel Intermedio

Buscar invarianzas o monovarianzas es una de las técnicas más útiles a la hora de resolver problemas de olimpiada. Con un poco de práctica, es posible darse una idea acerca de cuándo vale la pena hacer uso de este método. No obstante, encontrar la invariante puede llegar a ser bastante complicado. El propósito de este pequeño artículo es introducir al lector inexperimentado a los problemas de este estilo y ayudar a aquellos que ya estén familiarizados a encontrar nuevos caminos e ideas.

Invarianza

Aunque el rango de cosas que pueden considerarse invarianzas es extremadamente amplio, cuando hablamos de una invarianza solemos referirnos a una propiedad (o cantidad) que se conserva a lo largo de un proceso. Para mayor comprensión, daremos dos ejemplos antes de continuar:

Ejemplo 1.1. Se tiene un tablero de 2018×2018 con un foco en cada casilla. Inicialmente, todos los focos están apagados menos uno. Un movimiento consiste en cambiar el estado de dos focos en casillas adyacentes. Determina si es o no es posible llegar a que todos los focos estén encendidos.

Solución. Como en cada paso se modifica el estado de exactamente dos focos, la cantidad de focos encendidos no cambiará nunca de paridad. La paridad de los focos encendidos es la invarianza. Al inicio, la cantidad de focos encendidos es uno, esta cantidad será siempre impar. Por lo tanto, es imposible lograr que todos los focos estén encendidos, pues hay, en total, una cantidad par de focos.

Ejemplo 1.2. En un pizarrón están escritos los números $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{2018}$. Un paso consiste en elegir dos números a y b del pizarrón, borrarlos, y escribir en su lugar el número $ab + a + b$. Luego de algunos pasos, queda un único número en el pizarrón. ¿Cuáles son los posibles valores de este número?

Solución. Supongamos que en algún momento los números escritos en el pizarrón son $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Afirmamos que el producto $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \ldots (a_n + 1)$ es invariante. En efecto, si en algún momento los números a y b se reemplazan por $c = ab + a + b$ entonces $c + 1 = ab + a + b + 1 = (a + 1)(b + 1)$. Así, el producto es el mismo y la invarianza es cierta. Inicialmente el valor de este producto es igual a

$$(1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2018}\right) = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \cdots \cdot \frac{2019}{2018} = 2019.$$

Por lo tanto, si al final hay un único número n, debemos tener $n + 1 = 2019$, de donde $n = 2018$. Entonces, el único valor posible del número que queda al final es 2018.

Como se puede observar en los ejemplos anteriores, las invarianzas hacen referencia a un proceso. En el primer caso, el proceso es el cambio del estado de los focos mediante movimientos permitidos y, en el segundo caso, es la toma de parejas de números del pizarrón y la sustitución de los números por su suma más su producto. La invarianza consiste, entonces, en encontrar algún patrón que no se modifique (esto es, que no varíe, que quede invariante) en los diferentes pasos del proceso.

Siempre que se tenga una serie de pasos que modifican a algún conjunto de objetos, se debe tener en mente la técnica de invarianza. Cuando intentemos problemas en los que encontrar una invariante no resulte sencillo, es recomendable hacer algunos casos a mano y tratar de trabajar apartir de ellos. También puede ayudarnos ignorar algunas partes del problema y concentrarnos únicamente en las operaciones permitidas, pues estas son, en realidad, las que debemos analizar para encontrar invariantes.

Ahora que entendemos cómo funcionan las invarianzas y cuándo tiene sentido buscarlas, veamos un par ejemplos con invariantes más rebuscadas.

Ejemplo 1.3. Hay una piedra en cada uno de los cuatro vértices de un cuadrado. Un movimiento consiste en quitar k piedras de uno de los vértices y agregar $2k$ piedras a cualquiera de sus dos vecinos. Determina si es posible, mediante una serie de movimientos, lograr que los vértices tengan 2018, 2018, 2019 y 2017 piedras en ese orden.

Solución. Nos fijamos en la diferencia etre las cantidades de piedras en las dos diagonales (es decir, si los vértices tienen a, b, c y d piedras, en ese orden, consideramos la diferencia $(a + c) - (b + d)$). Cada movimiento quita k piedras a una de las diagonales y añade $2k$ piedras a la otra, así que la diferencia aumenta o disminuye en $3k$; por lo que su congruencia módulo 3 es invariante. Como la diferencia inicial es cero y la diferencia en la posición deseada es 2, es imposible llegar a dicha posición.

Ejemplo 1.4. En cada uno de los puntos $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$ del plano euclideano se coloca una piedra. En cada paso se puede elegir un punto (x,y) que tenga una piedra y tal que los puntos $(x+1,y)$ y $(x,y+1)$ no tengan piedras, remover la piedra del punto (x,y), y colocar una piedra en cada uno de los puntos $(x+1,y)$ y $(x,y+1)$. ¿Será posible que después de una cantidad finita de movimientos, los puntos $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$ estén todos libres de piedras?

Solución. No es posible. Observemos primero que por las condiciones del problema, nunca puede haber dos piedras en la misma casilla y que las casillas con piedras siempre tienen coordenadas no negativas. A cada punto (x,y) le asignamos el peso $\frac{1}{2^{x+y}}$. Afirmamos que la suma de los pesos de las posiciones de todas las piedras es invariante. En efecto, esto se sigue de $\dfrac{1}{2^{x+y}} = \dfrac{1}{2^{x+y+1}} + \dfrac{1}{2^{x+y+1}} = \dfrac{1}{2^{(x+1)+y}} + \dfrac{1}{2^{x+(y+1)}}$. Ahora, al inicio del proceso, la suma de los pesos es $\dfrac{1}{2^0} + \dfrac{1}{2^1} + \dfrac{1}{2^1} = 2$. Con un poco de álgebra, es posible calcular que la suma de todos los pesos es igual a

$$\left(\sum_{x,y\geq 0} \frac{1}{2^{x+y}}\right) = \left(\sum_{x\geq 0} \frac{1}{2^x}\right)^2 = 2^2 = 4,$$

donde la suma $\sum_{x\geq 0} \frac{1}{2^x} = 2$ es una serie geométrica de razón $\frac{1}{2}$. Esto implica que el resto de las casillas tiene suma de pesos igual a 2, y entonces si en algún momento las tres casillas iniciales están vacías, todas las demás casillas deben tener piedras. Pero esto significa que debemos tener una infinidad de piedras, lo cual es imposible, ya que después de una cantidad finita de pasos, la cantidad de piedras en el plano euclideano es finita.

Lo que nos muestra el ejemplo anterior, es que es posible encontrar invarianzas en problemas que presentan una multiplicidad de objetos, que pueden estar en diversas posiciones. En estos casos, suele resultar útil asignarle un peso a cada posición y considerar la suma de los pesos de las posiciones de cada objeto.

El siguiente ejemplo es bastante famoso, pues hace referencia al 15-puzzle[2]; por tanto, es probable que el lector lo encuentre familiar.

Ejemplo 1.5. Se tiene un tablero de 4×4 con los números del 1 al 15 colocados de la siguiente manera:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

[2] El 15-puzzle consiste de un tablero de 4×4 en el que se tienen 15 fichas unitarias marcadas con los números del 1 al 15. El objetivo del juego es acomodar las fichas en orden creciente, como se muestra en la figura figura, deslizando, una por una, las fichas hacia el espacio unitario vacío que quedará siempre en el tablero. Como se demuestra en este ejemplo, no siempre es posible alcanzar el estado final.

Un movimiento permitido consiste en mover un número de una casilla adyacente a la casilla vacía para que ocupe el lugar de la casilla vacía. Determina si es posible, mediante movimientos permitidos, llegar al siguiente acomodo de los números:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Solución. Contamos el número de parejas (a, b) de números enteros entre 1 y 15, con $a < b$, tales que las fichas marcadas con a y b están en orden inverso con respecto al acomodo al que queremos llegar. Los movimientos horizontales no cambian el número de parejas, mientras que los movimientos verticales lo modifican en una cantidad impar. Ahora, como queremos que el lugar vacío termine en la fila donde estaba inicialmente, la cantidad de movimientos verticales debe ser par, así que el número de parejas debe tener la misma paridad que tenía inicialmente. Al principio, el número de parejas es uno (solo la $(14, 15)$ está desordenada), nunca será cero, por lo que es imposible llegar a la posición deseada.

Este fue otro ejemplo en el que la invarianza nos permitió obtener información acerca de los estados a los que es posible llegar mediante una serie de pasos. Con frecuencia se pide en problemas de olimpiada, demostrar que un proceso no puede continuar indefinidamente. En estas situaciones nos conviene hacer uso de la siguiente técnica, la monovarianza.

Monovarianza

A veces resulta imposible o muy complicado encontrar una propiedad que se conserve lo largo de una serie de pasos. Sin embargo, una técnica alternativa y útil consiste en buscar propiedades que cambien siempre del mismo modo (por ejemplo, un valor que disminuye independientemente de la situación). Este tipo de propiedades, conocidas como monovariantes, están presentes en incontables problemas de olimpiada.

Ejemplo 2.1. Hay una cantidad finita de ciudades, cada una de las cuales es una monarquía o una democracia. Algunas de las ciudades son vecinos. Si entre los vecinos de una ciudad, hay más ciudades con un sistema de gobierno ditinto al suyo que ciudades con el mismo sistema de gobierno, esta ciudad puede cambiar su forma de gobierno. Prueba que únicamente se puede realizar una cantidad finita de cambios.

Solución. El número de parejas de ciudades (A, B) tales que A y B son vecinas y tienen la misma forma de gobierno, incrementa con cada cambio que se lleva a cabo, dado que, para que sea posible cambiar el estado de una ciudad, digamos, C, esta ciudad debe pertenecer a más parejas de ciudades vecinas (C, D) en las que C y D tienen formas de gobierno distintas, que a parejas de ciudades vecinas (C, D) en las que C y D coinciden en su sistema de gobierno; así que el número de parejas del segundo tipo incrementa si modificamos a C. Como la cantidad de estas parejas no puede ser mayor al número de parejas de ciudades vecinas, el proceso eventualmente termina.

No debería ser complicado obtener la monovariante anterior si se analiza cuidadosamente la condición necesaria para poder modificar una ciudad. En general, analizar los requisitos que se nos dan para poder hacer un movimiento de algún tipo, suele facilitar la búsqueda de invariantes y monovariantes.

Ejemplo 2.2. Se tiene un entero positivo n escrito en una hoja. En cada paso, si el número x está escrito en la hoja, entonces este se puede reemplazar ya sea por $2x+1$ o por $\frac{x}{x+2}$. Supón que en algún momento, el número escrito en la hoja es 2018. Muestra que $n = 2018$.

Solución. Observemos primero que los números en la hoja siempre son racionales positivos. Entonces, podemos suponer que en algún momento, el número escrito en la hoja es igual a $\frac{a}{b}$, donde a y b son enteros positivos primos relativos entre si. De este modo, se tiene que:

$$2x+1 = \frac{2a}{b} + 1 = \frac{2a+b}{b}, \qquad \frac{x}{x+2} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{a}{b}+2} = \frac{a}{2b+a}.$$

Estas fracciones no necesariamente están escritas en forma reducida, pero, si d es un divisor común de $2a+b$ y b, por lo que d debe dividir a $2a$. Como a y b son primos relativos, se sigue que d divide a 2 y, entonces, $\text{mcd}(2a+b, b) \leq 2$. Análogamente, $\text{mcd}(2b+a, a) \leq 2$.
Consideremos ahora la suma del numerador y el denominador de estas fracciones. Esta es igual a $2(a+b)$ si la fracción es irreducible o es $a+b$ si el numerador y el denominador tienen máximo común divisor igual a 2. Esto significa que, después de cada paso, la suma del numerador y el denominador del número en forma reducida se mantiene igual o se duplica. Inicialmente, esta suma es igual a $n+1$ y al final es igual a 2019. Esto significa que $2^m(n+1)$ debe ser igual a 2019 para algún entero m. Pero, como 2019 es impar, debemos tener $m = 0$ y $n = 2018$.

La monovariante anterior corresponde a la manera en que cambia la suma del numerador y el denominador del número escrito en la hoja, cada vez que realizamos un cambio. Como se puede observar, esta suma no es invariante, sin embargo, logramos demostrar que se mantiene o se duplica después de cada movimiento y esto resulta ser suficiente para resolver el problema.

Ejemplo 2.3. (IMO Shortlist, 2012). Se tienen algunos enteros positivos escritos en fila. María puede hacer lo siguiente: elegir dos números adyacentes a y b que cumplan que $a > b$ y que a está a la izquierda de b, y cambiar la pareja (a, b) por $(b+1, a)$ o por $(a-1, a)$. Prueba que María puede realizar solo una cantidad finita de cambios.

Solución. Primero, notemos que la operación no altera el máximo M de los números que se tinene en la fila. Supongamos que en algún momento se tiene la n-tupla a_1, a_2,

$a_3, \ldots, a_n$. Consideremos la suma $S = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n$. El lector podrá checar con facilidad que el valor de S aumenta con cada cambio realizado. Además el valor de S es siempre un entero que nunca supera a $M + 2M + 3M + \cdots + nM$, así que eventualmente será imposible seguir realizando cambios.

Las sumas con pesos (como la que acabamos de utilizar) nos ayudan a formalizar el hecho de que un proceso parezca desplazar números u objetos de mayor tamaño siempre hacia el mismo lado y, es en problemas de este estilo, que suelen utilizarse.

Una estrategia estrechamente relacionada consiste en considerar un orden lexicográfico, bajo el cual se dice que una n-tupla es mayor que otra si la primera coordenada en la que difieren (de izquierda a derecha o de derecha a izquierda, según convenga), es mayor en la tupla inicial.

Las sumas con pesos frecuentemente pueden ser sustituidas por un orden lexicográfico. Por ejemplo, la solución anterior podría haberse concluido del siguiente modo: los movimientos de María generan tuplas cada vez mayores y, como nunca se obtendrá una tupla mayor que $(M, M, \ldots, M)$, el proceso debe concluir.

Ejemplo 2.4. Se tiene un número real en cada casilla de un tablero de $m \times n$. Podemos cambiar el signo de todos los números en una misma fila o columna. Demostrar que podemos hacer algunos de estos cambios para lograr que cada fila y cada columna tenga suma positiva.

Solución. Hacemos lo siguiente siempre que sea posible: si alguna de las columnas o filas tiene suma negativa, entonces cambiamos el signo de todos los números en esa fila. Entonces, si el conjunto de casillas modificado tenía suma $-x$, la suma de los números en el tablero aumenta en $2x$. Como x está acotado inferiormente (¿por qué?) y la suma de todos los números no puede superar a la suma de sus valores absolutos, eventualmente no será posible continuar y habremos logrado nuestro objetivo.

Este ejemplo es peculiar, pues la monovariante no concierne a un proceso descrito en el problema, sino a uno que tenemos que crear por nuestra cuenta. Al enfrentarnos con problemas en los que se necesite encontrar una estrategia que produzca cierto resultado, siempre vale la pena buscar un algoritmo sencillo que modifique las cosas de manera controlada y tratar de encontrar una monovariante alrededor de dicho algoritmo. Pese a todo, no debemos olvidar que existen muchas estrategias para atacar este tipo de problemas y es posible que lo que hicimos en el ejemplo anterior no nos sea de mucha ayuda.

Nuestro último ejemplo será el problema número 3 de la IMO de 1986, que es considerablemente más difícil que los ejemplos anteriores.

Ejemplo 2.5. (IMO, 1986). A cada vértice de un pentágono regular se le asigna un entero de manera que la suma de todos es positiva. Ahora, si 3 vértices consecutivos tienen asignados los números a, b y c, respectivamente, y se cumple que $b < 0$, podemos cambiar la terna (a, b, c) por $(a + b, -b, b + c)$. Decide si, después de cierta cantidad de pasos, el proceso necesariamente termina.

Solución. Sean x, y, z, v, w los números asignados a los vértices del pentágono (en ese orden). Nótese que $x + y + z + v + w$ es invariante. Consideremos la función $S(v, w, x, y, z) = (v-x)^2 + (w-y)^2 + (x-z)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2$. La función S es cíclica en (v, w, x, y, z); así que, al momento de analizar cómo se modifica el valor de S al realizar un movimiento, podemos suponer que el movimiento es el que altera la terna (v, w, x). Nos queda lo siguiente:

$$S(v + w, -w, x + w, y, z) = S(v, w, x, y, z) + 2w(v + w + x + y + x).$$

Como $w < 0$ y $v + w + x + y + x > 0$, el nuevo valor de la función es estrictamente menor al que tenía antes de que se realizara el cambio. Este argumento funciona independientemente de la terna que modifiquemos, así que el valor de $S(v, w, x, y, z)$ se reduce en cada paso. Como este valor es siempre un número entero positivo (¿por qué?), el proceso debe terminar eventualmente.

El problema anterior es bastante educativo. La invariante inicial debería ocurrirse inmediatamente después de observar que $(a+b)+(-b)+(b+c) = a+b+c$. Ahora, nos falta probar que no será posible seguir realizando movimientos de manera indefinida, esto es, que llegará un momento en el que ninguno de los números en los vértices sea negativo. Como la suma de los cinco números es siempre positiva, la intuición nos dice que debemos llegar a que estos números están cada vez "más cerca entre sí", lo cual nos motiva a buscar una función cuadrática en un conjunto cíclico de diferencias entre los números v, w, x, y, z que cumpla que su valor se reduce a cada paso. A partir de aquí, no debería llevarnos mucho tiempo encontrar, a base de prueba y error, la función S y verificar que cumple lo que queríamos.

A continuación dejamos unos problemas para el lector.

Problemas

1) En un tablero de 10×10 hay 9 casillas infectadas. Cada minuto, cada casilla que tenga al menos dos vecinas infectadas, se infectará también. Prueba que el tablero no puede infectarse por completo.

2) Se tienen algunos números reales en una fila. Un movimiento de Lalo consiste en seleccionar dos números adyacentes de manera que el de la izquierda sea mayor, duplicarlos e intercambiar sus posiciones. Demuestra que Lalo puede realizar sólo una cantidad finita de movimientos.

3) Se tienen 2018 fichas en una fila. Cada ficha tiene un lado blanco y uno negro. Inicialmente, todas las fichas tienen el lado negro viendo hacia arriba. A y B juegan por turnos. En cada turno, el jugador correspondiente deberá tomar 50 fichas consecutivas, de modo que la de más a la izquierda tenga el lado negro visible, y voltearlas todas. Determina si A tiene estrategia ganadora.

4) Se tiene un montón con n cartas numeradas del 1 al n. Cada minuto, si la carta de hasta arriba tiene el número k, se invierte el orden de las k cartas superiores. Prueba que, en algún momento, la carta de arriba será la número 1.

5) Se tienen 3 puntos de colores distintos en el plano. Un movimiento consiste en mover alguno de los puntos en línea recta de modo que cruce el segmento determinado por los otros dos. ¿Es posible regresar a la posición inicial tras realizar exactamente 1001 movimientos?

6) Se tienen los números del $1, 2, 3, \ldots, n$ en ese orden. Una transposición consiste en intercambiar dos números de la lista. Demuestra que es imposible regresar a la posición original mediante una cantidad impar de transposiciones.

7) Sea $\Psi = A_1A_2A_3 \ldots A_nA_1$ un polígono no convexo. Podemos alterar a Ψ de la siguiente manera: Tomamos dos vértices no consecutivos de Ψ, A_i y A_j, que cumplan que todo el polígono queda del mismo lado de la recta A_iA_j y reflejamos $A_iA_{i+1}A_{i+2} \ldots A_j$ (los índices se consideran módulo n). Demuestra que el polígono se volverá convexo después de realizar varias de estas operaciones.

8) Se tienen 2^m hojas de papel, cada una tiene un número 1 escrito. En cada paso se permite tomar dos hojas que tengan los números a y b escritos y sustituir ambos números por $a + b$. Muestra que después de $m2^{m-1}$ pasos, la suma de los números escritos en todas las hojas es al menos 4^m.

9) Sean $n \geq 2$ y $m \geq 2$ enteros positivos. Se tienen m urnas dispuestas en fila. Los jugadores A y B juegan por turnos, comenzando por A, de la siguiente manera. En cada turno, A elige dos urnas y coloca un voto en cada una de ellas. Posteriormente, B elige una urna, y elimina todos los votos de ella. A gana si logra que haya una urna con n votos después de algn turno de B. Determina para cada n el mnimo valor de m para el cual A puede garantizar ganar, sin importar los movimientos que haga B.

10) Los números $1, 2, \ldots, 2018$ están escritos en un pizarrón. En cada paso se permite elegir tres números a, b y c tales que a, b, c y $a + b + c$ están escritos en el pizarrón, y sustituir estos números por $a + b, b + c$ y $c + a$. Muestra que no es posible realizar más de 600 pasos.

11) Se tiene un número real positivo r escrito en un pizarrón. Un movimiento consiste en elegir un real positivo x que esté escrito en el pizarrón, y sustituirlo por dos reales positivos a y b que satisfagan $ab = 2x^2$.
Se realizan $k^2 - 1$ movimientos para obtener así k^2 números en el pizarrón. Muestra que alguno de estos es menor o igual que kr.

Sugerencias a los problemas

1) Fijarse en el perímetro de la región infectada.

2) Contar la cantidad de parejas de números adyacentes que cumplen que el de la izquierda es mayor.

3) (IMO Shortlist, 2009) Primero, demostrar que el juego eventualmente termina. Luego, para descubrir quién tiene estrategia ganadora, podemos contar el número de fichas en posición múltiplo de 50 que tienen la cara negra viendo hacia arriba. Para probar que el juego termina, podemos sustituir los colores de las cartas por 0's y 1's y demostrar que el número formado por esta secuencia de dígitos decrece cada turno.

4) Probar que la baraja se irá acomodando gradualmente y el proceso se detiene solo cuando la carta con el número 1 llega a la cima.

5) Clasificar los triángulos que se van formando en dos clases.

6) Contar la cantidad de parejas de números en las que el mayor está más a la izquierda. La solución es similar a la de el ejemplo 1.5.

7) El área de Ψ es monovariante.

8) (IMO Shortlist, 2014) Considera el producto de todos los elementos y ve lo que sucede con él después de cada paso. Encuentra una desigualdad que lo relacione con la suma.

9) (OMM, 2017) La dificultad reside en acotar inferiormente el valor de m. Para esto, asigna a cada urna un valor dependiente de la cantidad de votos que tiene, de modo que la suma de los valores no pueda aumentar, salvo en un caso, y luego ve que en este caso no puede aumentar demasiado.

10) Observa que la suma de los números y de sus cuadrados son ambas invariantes. Encuentra una manera de relacionar estas sumas que involucre también al número de elementos.

11) (APMO, 2009) Observa que la suma de los recíprocos de los cuadrados de los números es monovariante.

Bibliografía

1) Pablo Soberón. *Combinatoria para Olimpiadas Internacionales.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

2) María Luisa Pérez Seguí. *Combinatoria Avanzada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

3) `http://math.stanford.edu/~vakil/putnam07/07putnam5.pdf`, consultado en octubre de 2018.

4) `https://www.math.uwaterloo.ca/~snew/Contests/ProblemSessions/Problems2016/Lesson0soln.pdf`, consultado en octubre de 2018.

5) *Art of Problem Solving.* `https://artofproblemsolving.com/`, consultado en octubre de 2018.

6) `http://www.math.udel.edu/~lazebnik/papers/monovar.pdf`, consultado en octubre de 2018.