Del incírculo al incírculo mixtilíneo: Un recorrido por algunas circunferencias tangentes a dos lados de un triángulo

Por Olga Medrano Martín del Campo y Julio César Díaz Calderón

Nivel Avanzado

Introducción

Manejar las propiedades del incírculo es muy importante en la geometría de olimpiada. Sin embargo, hay ocasiones en las que la configuración del problema no presenta un triángulo y su incírculo, pero sí construcciones cercanas que se pueden atacar con técnicas similares. Por ejemplo, los círculos mixtilíneos (o mixtilineales) de un triángulo son circunferencias tales que son tangentes al circuncírculo y a dos lados del triángulo. ¿Cómo trabajar con esas configuraciones geométricas y qué relaciones tienen con las técnicas para trabajar con incírculos? Esta es la pregunta que motiva este artículo. Las propiedades y relaciones que surgen aquí no son inmediatas, y vale la pena aprenderlas. Así, se tendrán herramientas claras que sirvan de punto de partida para desarrollar ideas originales, que serán necesarias para resolver los problemas de olimpiada de este tipo.

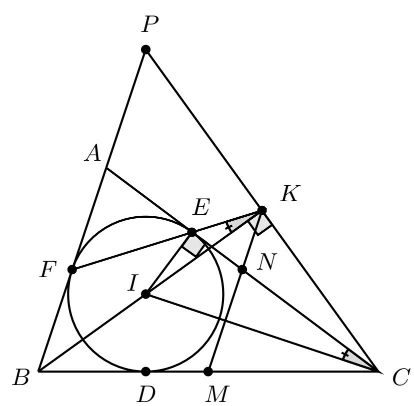
En este artículo se presentan varias construcciones que uno puede encontrar en distintos problemas de geometría, sobretodo en aquellos problemas en donde aparece el incentro de un triángulo y los distintos círculos curvilíneos o mixtilíneos del triángulo.

Se combinan algunos resultados conocidos en forma de lemas junto con ejemplos de diversas olimpiadas. Al final se dejan algunos problemas para el lector.

Incentros y excentros

Ángulos rectos en una cuerda del incírculo. El incírculo de $\triangle ABC$ es tangente a los lados BC, CA y AB en D, E y F, respectivamente. Sean M y N los puntos medios de BC y de AC, respectivamente. La recta BI interseca a la recta EF en K, donde I es el incentro de $\triangle ABC$. Demuestra que BK es perpendicular a CK y que el punto K se encuentra en la recta MN.

Solución. Comenzaremos por nombrar las medidas de los ángulos de $\triangle ABC$ de manera usual como $\angle A = 2\alpha, \angle B = 2\beta$, y $\angle C = 2\gamma$, respectivamente. Por suma de ángulos internos, sabemos que $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180°$. Ahora, por ser I el incentro de $\triangle ABC$, tenemos que $\angle ACI = \frac{\angle C}{2} = \gamma$ y $\angle ABI = \frac{\angle B}{2} = \beta$.



Por otro lado, nótese que $\angle CAB = \angle EAF = 2\alpha$ y $AE = AF$, ya que ambos son segmentos tangentes al incírculo de $\triangle ABC$ desde A. Por tanto, $\triangle AEF$ es isósceles y $\angle AFE = \angle AEF = \frac{180° - \angle EAF}{2} = \frac{180° - 2\alpha}{2} = \beta + \gamma$. Entonces, $\angle KFB = 180° - \angle AFE = 2\alpha + \beta + \gamma$ y $\angle FBK = \angle FBI = \beta$, por ser I incentro de $\triangle ABC$. Por suma de ángulos internos en $\triangle FBK$, tenemos $\angle FKB = 180° - (2\alpha + \beta + \gamma) - (\beta) = \gamma$. Por otro lado, teníamos que $\angle ACI = \gamma$; por tanto, $\angle ACI = \angle FKB$, con lo que se concluye que $IEKC$ es cíclico. Por esto mismo, $\angle BKC = \angle IKC = \angle IEC = 90°$, ya que E es un punto de tangencia del incírculo de $\triangle ABC$ con AC. Entonces, $BK \perp CK$.

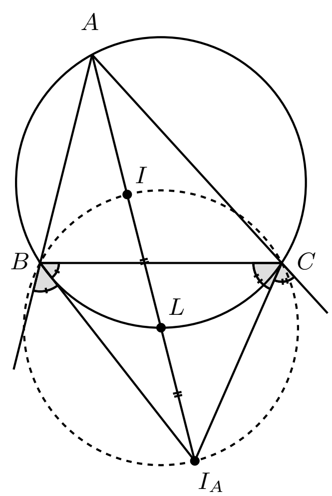
Ahora, si prolongamos CK más allá de K hasta intersecar a AB en P, podemos notar que $\angle BKP = \angle BKC = 90°$. Además, $BK = BK$ y $\angle PBK = \angle CBK$ por ser BK parte de la recta bisectriz de $\angle B$. Por el criterio de congruencia de triángulos ALA, podemos decir $\triangle BKP \cong \triangle BKC$, en conclusión, $KP = KC$. Por esto mismo y por el hecho de que M y N son puntos medios de CB y CA, respectivamente, tenemos que $\frac{CN}{CA} = \frac{CK}{CP} = \frac{CM}{CB} = \frac{1}{2}$. Por último, el teorema de Tales nos garantiza que K, M y N son colineales, o equivalentemente, que K está sobre la recta MN. $\square$

El lema del incentro/excentro. Sea ABC un triángulo con incentro I. La recta AI interseca al circuncírculo del triángulo $\triangle ABC$ en L. Sea I_A la reflexión de I con respecto a L. Demuestra que:

a) Los puntos I, B, C e I_A se encuentran en una circunferencia de diámetro II_A y centro L. En particular, $LI = LB = LC = LI_A$.

b) Las rectas BI_A y CI_A bisecan a los ángulos exteriores del $\triangle ABC$; esto es, I_A es el excentro del $\triangle ABC$ opuesto al vértice A.

Solución. a) Sean $\angle A = 2\alpha, \angle B = 2\beta$ y $\angle C = 2\gamma$. Al igual que en el problema anterior tenemos que $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$ implica que $\alpha + \beta + \gamma = 90°$. Primero, demostraremos que $LI = LB$, por medio de la igualdad de ángulos $\angle IBL = \angle LIB$, lo que nos va a permitir establecer una relación importante entre los ángulos y los segmentos de la figura.



Por ángulos inscritos en el circuncírculo de $\triangle ABC$, $\angle CBL = \angle CAL = \angle IAC = \alpha$ implica que $\angle IBL = \angle IBC + \angle CBL = \beta + \alpha$. Por otro lado, $\angle BIL = 180° - \angle AIB = \angle IBA + \angle BAI = \alpha + \beta$. Entonces, $\angle IBL = \alpha + \beta = \angle BIL$, por lo que $\triangle LBI$ es isósceles, con $LI = LB$, que es lo que queríamos.
De manera análoga, obtenemos que $LI = LC$. Entonces, se tiene la igualdad $LB = LI = LC$, que implica que L es el centro de un círculo que pasa por B, I, C, el cual nombramos como (BIC). Si recordamos que L es el punto medio de II_A, notamos que $IL = LI_A$, por lo que I_A también está sobre (BIC) y la cuerda II_A es además diámetro del mismo círculo.

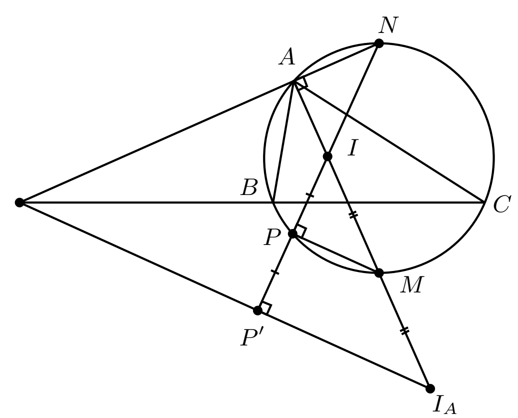
b) Para esta parte, queremos demostrar que $\angle I_ABC = \frac{1}{2}(180° - 2\beta) = 90° - \beta$ y que $\angle I_ACB = \frac{1}{2}(180° - 2\gamma) = 90° - \gamma$, ya que estos resultados implican que BI_A y CI_A son bisectrices externas de $\angle ABC$ y $\angle ACB$, respectivamente. Al usar el resultado de la parte a), sabemos que II_A es diámetro del círculo (BIC), por lo que $\angle IBI_A = \angle ICI_A = 90°$. Esto implica que $\angle I_ABC = \angle I_ABI - \angle IBC = 90° - \beta$. De modo similar, obtenemos $\angle BCI_A = 90° - \gamma$. $\square$

La configuración del problema anterior aparece mucho en geometría de olimpiadas; ¡es útil tenerla en mente para reconocerla cuando vuelva a aparecer en un problema!

Ejemplo 2.1. Sea $\triangle ABC$ un triángulo con circuncírculo ω_1, y sean I e I_A su incentro y excentro correspondiente a A, respectivamente. Sean N y M los puntos medios de los arcos $\widehat{CAB}$ y $\widehat{BC}$ en ω_1, respectivamente. NI interseca de nuevo a ω_1 en P, y P' es el punto en la recta NI tal que $PI = PP'$. Demuestra que NA, BC y I_AP' concurren.

Solución. Si usamos el resultado del problema anterior, sabemos que C, I, B e I_A están sobre una circunferencia ω_2 de centro M, por lo que $IM = MI_A$. Además, $IP = PP'$ por construcción. Ahora, por el teorema de Tales, tenemos que $PM \parallel P'I_A$, lo cual implica que $\angle IPM = \angle IP'I_A$.
Por otro lado, como N y M son puntos medios de los arcos $\widehat{CAB}$ y $\widehat{BC}$, tenemos que MN es un diámetro de ω_1, por lo que $\angle IPM = \angle NPM = 90°$. Por lo tanto, $\angle IP'I_A = 90°$, y como II_A es diámetro de ω_2, entonces P' también está sobre dicha circunferencia. Tenemos ahora las siguientes igualdades de ángulos:

$$\angle NAI_A = \angle NAM = \angle NPM = \angle NP'I_A = 90°.$$



Por lo tanto, $NAP'I_A$ es un cuadrilátero cíclico; llamemos ω_3 a su circuncírculo. Notemos lo siguiente:

- AN es el eje radical de ω_1 y ω_3.

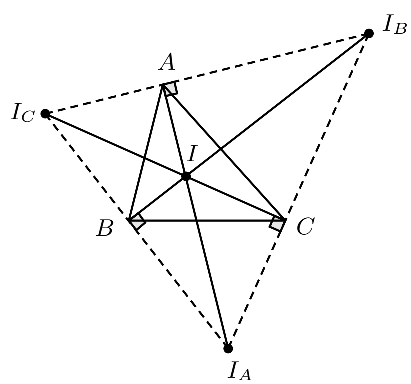
- BC es el eje radical de ω_1 y ω_2.
- I_AP' es el eje radical de ω_2 y ω_3.

Es un hecho conocido que dados tres círculos, sus tres ejes radicales por parejas concurren, con lo que concluímos el problema. $\square$

Nota para el lector: El punto P es de hecho el punto de tangencia del circuncírculo de $\triangle ABC$ con el círculo $A-$mixtilíneo de $\triangle ABC$ que vamos a definir más adelante. Este punto tiene muchas propiedades interesantes, que también vamos a discutir más adelante.

Dualidad de ortocentros y excentros. Si I_A, I_B e I_C son los excentros del triángulo $\triangle ABC$, entonces, el triángulo $\triangle ABC$ es el triángulo órtico (es decir, el triángulo formado por los pies de las alturas) del triángulo $\triangle I_AI_BI_C$ y el ortocentro de $\triangle I_AI_BI_c$ es I.

Solución. Primero, notemos que, de manera similar a como se demuestra que las tres bisectrices internas de $\triangle ABC$ concurren, también BI_A (*externa*), CI_A (*externa*) y AI_A (*interna*) concurren. Sabemos entonces que I está sobre la recta AI_A, ya que ésta es bisectriz interna de $\angle A$.
De acuerdo con el lema del incentro/excentro anterior, tenemos que I, B, I_A y C están sobre una misma circunferencia Ω cuyo centro es el punto medio de II_A. Además, tenemos que II_A es diámetro de Ω y, por ángulos inscritos en esta circunferencia, podemos ver que $\angle IBI_A = \angle I_BBI_A = 90°$. Por lo tanto, B es el pie de altura en $\triangle I_AI_BI_C$ desde el vértice I_B.



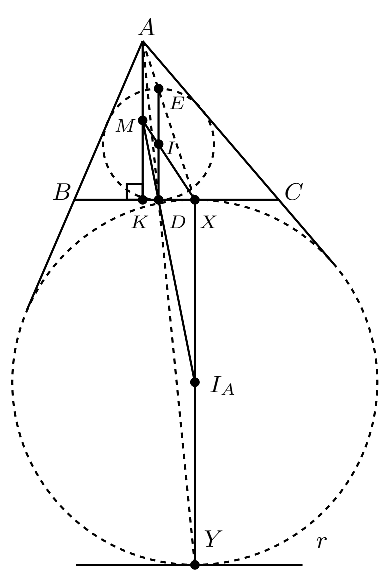
De manera similar vemos que A y que C son pies de altura en $\triangle I_AI_BI_C$ desde los vértices I_A e I_C, respectivamente. Entonces, la intersección de AI_A, BI_B y CI_C es el ortocentro de $\triangle I_AI_BI_C$. Si recordamos que estas tres rectas son bisectrices internas, sabemos que I es su intersección. Por lo tanto, I es el ortocentro de $\triangle I_AI_BI_C$. $\square$

Puntos de tangencia de incírculos y excírculos

Punto medio de las alturas. Sea ABC un triángulo con incentro I y con excentro I_A, opuesto al vértice A. Además, sean D y X los puntos de tangencia asociados al incentro y al excentro correspondiente con el lado BC, respectivamente. Demuestra que las rectas DI_A y XI concurren en el punto medio de la altura desde A.

Solución. Primero, consideremos la altura AK en $\triangle ABC$ desde el vértice A, con K sobre el lado BC. Sea M el punto medio de AK. Nuestra demostración va a consistir en dos partes:

1) Trazamos AX y AD. Sean E y Y, respectivamente, los puntos en que las rectas anteriores intersecan al incírculo y al excírculo, respectivamente, de $\triangle ABC$. Por homotecia entre el incírculo y el excírculo de $\triangle ABC$ desde el punto A, notemos que (I, I_a),(D, Y), y (E, X) son parejas de puntos correspondientes. Eso implica que si nos enfocamos en el segmento BC, que es perpendicular a ID, y en la recta r, que es perpendicular a II_A, estos van a ser paralelos. Además, $I_AX \perp CB$, por tangencia del excírculo con BC; por lo que I_AX es perpendicular a r, de donde I_AX es paralela a I_AY, lo cual implica que X, I_A y Y son colineales. De manera similar, D, I y E son colineales.
   Notemos la semejanza entre los triángulos rectángulos $\triangle XAK \sim \triangle XED$, la cual es cierta debido a que $XA \| XE$, $XK \| XD$ y $BC \perp DE$ implican que $DE \| AK$; por otro lado, por construcción, $\frac{AM}{MK} = 1$. Además, I es incentro de $\triangle ABC$, por lo tanto $ID = IE$, lo cual implica que $\frac{ID}{IE} = 1$. Podemos notar entonces que M e I son puntos correspondientes en la semejanza $\triangle XAK \sim \triangle XED$, la cual es a la vez una homotecia desde X, por lo que X, I y M son colineales.

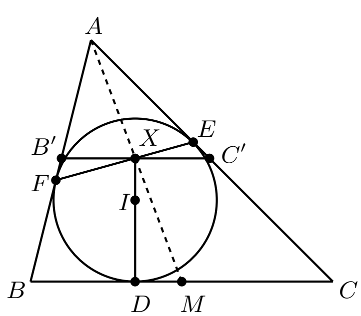


2) Con las construcciones y las propiedades anteriores y al usar que $AK \perp CB \perp XY$ implica $AK \| XY$, podemos mostrar análogamente que $\triangle DAK \sim \triangle DYX$ y que esta semejanza también puede interpretarse como una homotecia desde D. Además, M es punto medio de AK mientras que I_A es punto medio de XY, lo que implica, por la homotecia desde D, que M e I_A son correspondientes. Por lo tanto, D, M, I_A son colineales.

Hemos demostrado que D, I_A y M son colineales y que X, I y M son colineales. Con esto concluimos nuestra demostración. $\square$

Punto de concurrencia en el incírculo. Sea $\triangle ABC$ un triángulo con incentro I y sean D, E y F los puntos en los que el incírculo de $\triangle ABC$ es tangente a los lados BC, CA y AB, respectivamente. Si M es el punto medio del lado BC, demuestra que las rectas EF, AM y DI concurren.

Solución. Primero, notemos que esta concurrencia es equivalente a decir que si X es el punto de intersección de FE con DI, entonces AX es la mediana de $\triangle ABC$ desde A. Un punto principal para resolver este problema, es observar que el punto M solo es una distracción, pues no tiene muchas relaciones directas con la figura. Podemos olvidarnos de M si trazamos una línea paralela a BC por X. Esta recta interseca a AB y a AC en B' y C', respectivamente. Además, queremos que X sea el punto medio de $B'C'$, ya que la homotecia entre $\triangle ABC$ y $\triangle AB'C'$ desde A conservaría las razones. Por tangencia, sabemos que $DX \perp BC$ y $DX \perp B'C'$, lo que implica que $\angle IXB' = 90° = \angle IXC'$. Por otro lado, $\angle IFB' = 90° = \angle IEC'$, por la misma tangencia del incírculo. Por lo tanto, $IXB'F$ y $IXEC'$ son cuadriláteros cíclicos.



Ahora, al mover algunos ángulos, podemos notar que:

$$\begin{aligned} 180° - \angle A = \angle AB'C' + \angle AC'B' &= \angle XIF + \angle XIE = \angle FIE \\ &= \angle B'IE + \angle FIB' = \angle B'IE + \angle EIC' = \angle B'IC'. \end{aligned} \tag{1}$$

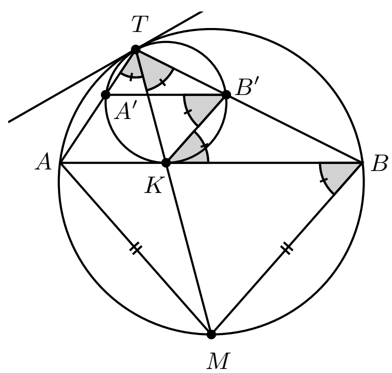
Donde para las últimas igualdades basta usar las identidades de los ángulos opuestos por el vértice, en efecto $\angle FIB' = \angle FXB' = \angle EXC' = \angle EIC'$. Esto implica que $AB'IC'$ es un cuadrilátero cíclico.
Por otro lado, AI es bisectriz del ángulo $\angle B'AC'$ y el círculo en el que está inscrito

$AB'IC'$ es también el circuncírculo de $\triangle AB'C'$. La intersección de estas dos curvas, es decir I, tiene que ser punto medio del arco $\widehat{B'C'}$. Por lo tanto, $B'I = C'I$. Ahora, dado que IX es altura desde I, tenemos que $B'X = XC'$. Concluimos que X es el punto medio de $B'C'$. $\square$

Incírculos mixtilíneos

Círculos inscritos en segmentos. Sea AB una cuerda de una circunferencia Ω. Sea ω una circunferencia tangente a la cuerda AB en K y tangente internamente a Ω en T. Demuestra que el segmento TK pasa por el punto medio M del arco $\widehat{AB}$ que no contiene a T. Más aún, demuestra que $MA^2 = MB^2$ es la potencia del punto M con respecto a ω.
Con la notación del hecho anterior, sea C otro punto en el arco $\widehat{AB}$ que contiene a T y sea D un punto en AB tal que CD es tangente a ω en L. La circunferencia ω se conoce como el incírculo curvilíneo del $\triangle ABC$. Cuando D varía a lo largo de AB, se obtienen múltiples incírculos curvilíneos. La circunferencia que se obtiene cuando $A = D$ se conoce como la circunferencia A-mixtilineal.

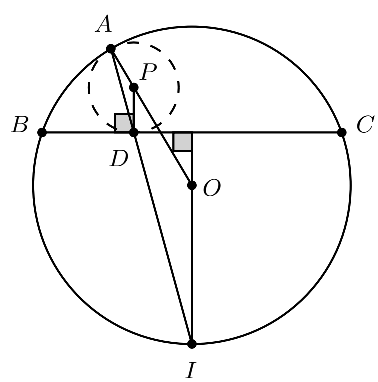
Solución. Los centros de ω y Ω son colineales con T, ya que existe una tangente común entre los dos círculos, por lo que existe una homotecia desde T que manda ω a Ω. Llamemos A', B' a los puntos que son mandados por la homotecia anterior hacia A y B, repectivamente. Por homotecia, podemos decir que $\frac{TA'}{TA} = \frac{TB'}{TB}$, lo cual implica que $A'B' \| AB$. Por ángulos inscritos, vemos que $\angle A'TK = \angle A'B'K$. Además, por ángulos alternos internos entre paralelas, $\angle A'B'K = \angle B'KB$, y por ángulos seminscritos, $\angle B'KB = \angle KTB'$. En resumen, $\angle A'TK = \angle KTB'$, lo cual implica que KT es bisectriz de $\angle ATB$. Así, TK pasa por el punto medio M del arco $\widehat{AB}$ que no contiene a T.



Si usamos el resultado anterior, $\angle MTB = \angle MTA = \angle MBA$. Por otro lado, tenemos que $\angle BMK = \angle TMB$. Ahora, por el criterio de semejanza AA, $\triangle TMB \sim \triangle BMK$. Así, por razones de semejanza $\frac{TM}{BM} = \frac{MB}{MK}$, lo cual implica que $MK \cdot MT = MB^2$. Lo anterior es igual a MA^2 por ser M punto medio del arco $\widehat{AB}$. Por último, sabemos que el valor $MK \cdot MT$ es la potencia de M hacia ω. $\square$

Ejemplo 4.1. Sea ω un círculo y BC una cuerda de ω. Sean I un punto sobre el arco $\widehat{BC}$ y D un punto en el segmento BC. La recta DI interseca por segunda vez a ω en A. Sea γ el círculo que es tangente a BC en D y que pasa por A. Demuestra que γ es tangente a ω si y solo si AI es bisectriz interna del triángulo $\triangle ABC$.

Solución. Notamos primero que la implicación $\Rightarrow$ se demostró anteriormente. Para demostrar el recíproco, supongamos que AI es bisectriz interna de $\angle BAC$. Esto implica que I es punto medio del arco $\widehat{BC}$, por lo que $IB = IC$. Además, si O es el centro de ω, tenemos $OI \perp BC$. Ahora, definimos al punto P como la intersección de AO y de la perpendicular a BC que pasa por D.

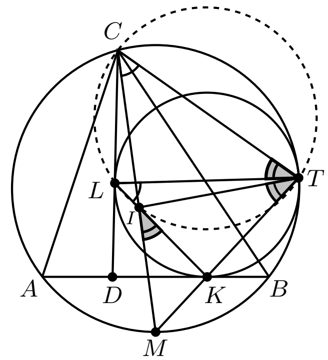


Por construcción, $PD \perp BC$, lo cual implica que $PD \parallel OI$. De esta manera, como $AP \parallel AO$, $AD \parallel AI$, $PD \parallel OI$, podemos concluir que $\triangle APD \sim \triangle AOI$. Por razón de semejanza, $\frac{PD}{OI} = \frac{AP}{AO}$. Como O es centro de ω, sabemos que $OI = AO$ y, en consecuencia, $PD = AP$. Por lo tanto, un círculo γ con centro en P y radio AP sería tangente a BC (por ser $PD \perp BC$) en D como tangente a ω (por ser O, P, A colineales) en A. $\square$

Cuerdas del incírculo curvilíneo. Sea $\triangle ABC$ un triángulo y sea D un punto en el segmento AB. Una circunferencia ω es tangente a CD en L, a AB en K y también es tangente al circuncírculo de $\triangle ABC$ en T. Demuestra que el incentro de $\triangle ABC$ se encuentra en la recta LK.

Solución. Sea I la intersección de LK con CM. Si recordamos el resultado del problema anterior, M es punto medio del arco $\widehat{AB}$, entonces CM es bisectriz de $\angle ACB$. Además, la homotecia de ω hacia Ω desde T manda al arco $\widehat{KT}$ hacia el arco $\widehat{MT}$, por lo que los ángulos inscritos correspondientes tienen medidas iguales; en particular, $\angle MCT = \angle KLT$, lo cual implica que $\angle ICT = \angle ILT$, esto es, C, L, I, T son concíclicos. Nombremos $\alpha = \angle MTI, \beta = \angle ITL, \gamma = \angle LTC$. Como $CLIT$ es cíclico, tenemos $\angle ITL = \angle ICL = \beta$ y $\angle CTL = \angle CIL = \gamma$, de donde $\angle DLK = \beta + \gamma$.

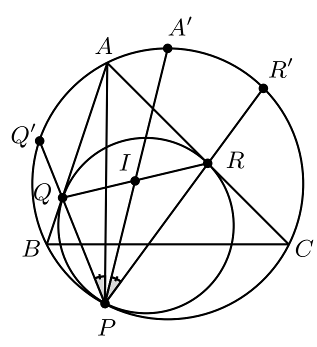
Además, $\angle DLK$ es seminscrito en ω y $\angle DLK = \angle LTK = \angle LTI + \angle ITK = \beta + \alpha$. Por lo anterior, tenemos $\angle DLK = \beta + \gamma = \alpha + \beta \Rightarrow \alpha = \gamma$.



Entonces, $\gamma = \angle CTL = \angle CIL = \angle MIK = \alpha$, lo último por ángulos opuestos y porque $\alpha = \angle MTI$. Por tanto, $\angle MIK = \angle MTI$ y $\angle IMK = \angle TMI$. Por el criterio de semejanza AA, vemos que $\triangle MKI \sim \triangle MIT$. Así, por razón de semejanza, tenemos que $MI^2 = MK \cdot MT$. Por el problema anterior recordemos que $MA^2 = MB^2 = MK \cdot MT$. Por lo tanto, $MA = MB = MI$. Para concluir, de la sección de incentros y excentros sabemos que lo anterior implica que I es el incentro de $\triangle ABC$. I está por construcción sobre LK, por lo que concluimos. $\square$

Ejemplo 4.2. Sean $\triangle ABC$ un triángulo inscrito en el círculo ω y γ un círculo tangente al arco $\widehat{BC}$, a AB y a AC en P, Q y R, respectivamente. Sean A' el punto medio del arco $\widehat{BC}$ que contiene a A e I, el incentro de $\triangle ABC$. Demuestra que P, I y A' son colineales.

Solución. Primero notamos que, por construcción, PA es simediana de $\triangle QPR$ desde P (ya que γ es circuncírculo de $\triangle QPR$, y AR y AQ son dos tangentes a γ). Por otro lado, sabemos que I es punto medio de RQ (un caso particular del problema anterior), por lo que PI es mediana de $\triangle QPR$ desde P y, por tanto, PA y PI son isogonales con respecto a $\angle QPR$. Es decir, $\angle RPA = \angle IPQ$.

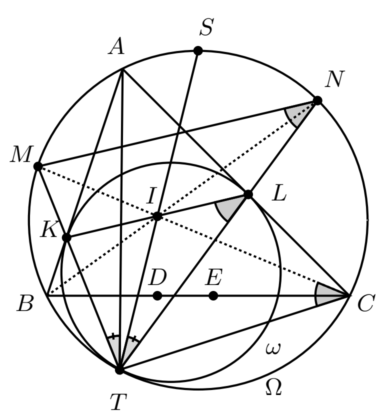


Prolongamos PQ y PR hasta que vuelvan a intersecar a ω en Q' y R'. Ya sabemos que dichos puntos bisecan a los arcos $\widehat{AB}$ y $\widehat{AC}$ en ω, respectivamente. Además, por ángulos en ω, tenemos que $\widehat{R'A} = \frac{\widehat{CA}}{2} = \frac{\widehat{CA}+\widehat{AB}}{2} - \frac{\widehat{AB}}{2} = \widehat{A'B} - \widehat{Q'B} = \widehat{A'Q'}$. En resumen, $\widehat{R'A} = \widehat{A'Q'}$. Entonces, por ángulos inscritos, tenemos que $\angle R'PA = \angle A'PQ'$. Si recordamos que $\angle RPA = \angle R'PA = \angle IPQ = \angle IPQ'$, tenemos $\angle A'PQ' = \angle IPQ'$, lo cual implica que A', I, P son colineales. $\square$

Incírculos mixtilíneos. Sea $\triangle ABC$ un triángulo y sean K, L y T los puntos en los que su circunferencia A-mixtilineal es tangente a AB, a AC y al circuncírculo del $\triangle ABC$, respectivamente. Llamemos D y E a los puntos de tangencia del incírculo y del excírculo opuesto a A en BC, respectivamente. Demuestra que:

1) El punto medio I de KL es el incentro de $\triangle ABC$.
2) Las rectas TK y TL pasan por los puntos medios de los arcos $\widehat{AB}$ y $\widehat{AC}$ que no contienen a T.
3) La recta TI pasa por el punto medio del arco $\widehat{BC}$ que contiene a A.
4) Los cuadriláteros $BKIT$ y $CLIT$ son cíclicos.
5) Los angulos $\measuredangle BAT$ y $\measuredangle CAE$ son iguales.
6) Los angulos $\measuredangle BTA$ y $\measuredangle CTD$ son iguales.

Solución. Recordemos del lema de *cuerdas del incírculo curvilíneo* que I está sobre KL, ya que esta construcción es el caso particular de dicho lema en el que $A = D$. Llamemos ω a dicha circunferencia A-mixtilineal y Ω al circuncírculo de $\triangle ABC$.



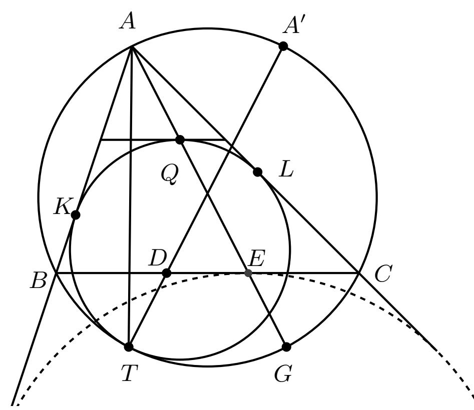
1) Tenemos que AI es bisectriz de $\angle KAL$. Además, $AL = AK$ por ser tangentes desde un mismo punto, hacia ω. Entonces, I es el pie de la bisectriz en un triángulo isóceles, por lo que es punto medio de LK.

2) Esto es un corolario del primer problema de esta sección; ω es tangente a AB en K y a Ω en T, por lo tanto TK pasa por el punto medio del arco $\widehat{AB}$ que no contiene a T. El resto es análogo.

3) Esto es por el Ejemplo 4.2.

4) Tenemos, gracias a la homotecia desde T, que $LK \| NM$, por lo que $\angle IKT = \angle LKT = \angle NMT$. Por ángulos inscritos en Ω, tenemos que $\angle NMT = \angle NBT = \angle IBT$. Así, $\angle IKT = \angle IBT$, por lo que $BKIT$ es cíclico. La prueba de que $CLIT$ es cíclico es análoga.

5) Primero, tomamos como hecho el problema 7 de la última sección de este artículo (EGMO 2013, 5). Entonces, si trazamos la tangente a ω por Q que es paralela a BC, sucede que $\angle CAQ = \angle BAT$. Por otro lado, por homotecia entre el incírculo de $\triangle ABC$, ω y el excírculo de $\triangle ABC$, los puntos correspondientes sobre dichos círculos son colineales junto con A. En particular, A, Q y E son colineales, por lo que $\angle BAT = \angle CAE = \angle CAQ$.



6) Al usar el resultado de arriba, tenemos $\angle BAT = \angle CAE$. Entonces, si AE interseca al arco $\widehat{BC}$ en G, obtenemos que $TGBC$ es un trapecio isósceles. Por otro lado, sabemos que $BE = DC$ ya que D es el punto de tangencia del incírculo y E es punto de tangencia del excírculo. Por dicha simetría en $TGBC$ y los segmentos $BE = DC$, tenemos que la intersección de TD y GE con el circuncírculo de $\triangle ABC$ (A y A', respectivamente) son simétricas con respecto a la mediatriz de BC. En otras palabras, $AA'BC$ es un trapecio isósceles, por lo que $\angle BTA = \angle CTA' = \angle CTD$.

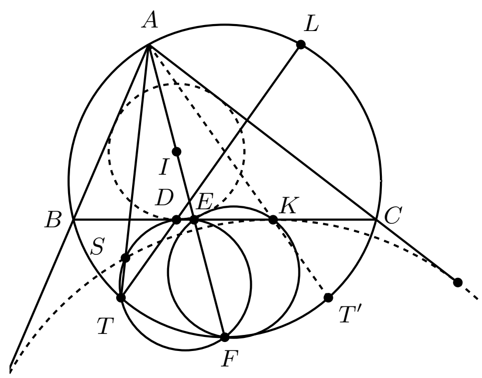
$\square$

Ejemplo 4.3. Sea $\triangle ABC$ un triángulo escaleno inscrito en el círculo Ω. El incírculo de $\triangle ABC$ toca al lado BC en D. La bisectriz de $\angle A$ interseca a BC y a Ω en E y F, respectivamente. El circuncírculo de $\triangle DEF$ interseca al excírculo correspondiente a A, Ω_A, en S_1 y S_2 y a Ω en $T \neq F$. Demuestra que el segmento AT pasa por uno de los dos puntos S_1, S_2.

Solución. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $AB < AC$. Sean K el punto de contacto de Ω_A con BC y L la intersección de TD con Ω. Tenemos las igualdades:

$$\begin{aligned}\angle FTL &= \angle FTD = 180^\circ - \angle FED = 180^\circ - \angle AEC \\ &= \angle EAC + \angle ECA = \angle BAE + \angle BCA = \angle ACF\end{aligned}$$

Así, $\angle FTL = \angle ACF$, es decir, L es el reflejo de A con respecto a la mediatriz de BC. Si reflejamos los puntos colineales T, D, L con respecto a la misma mediatriz, obtenemos los puntos T', K, A. Esto implica que $\angle BAT = \angle CAT' = \angle CAK$.



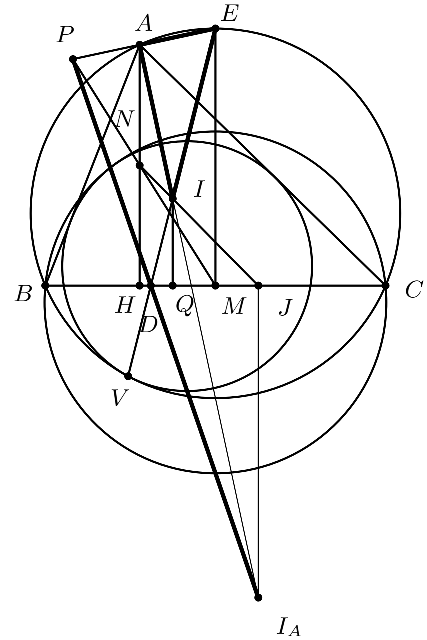
Ahora, llamemos S a la reflexión de K con respecto a AI. Ya que AI es la bisectriz de $\angle A$ y Ω_A es simétrico con respecto a dicha línea, S está sobre Ω_A. Además, tenemos $\angle BAT = \angle CAK = \angle BAS$, entonces A, S, T son colineales. Notemos, sin embargo, que D y K son isotómicos en BC (es decir, $BD = CK$) y que F es punto medio del arco menor $\widehat{BC}$. Por lo tanto, $FD = FK$. Entonces, S, por ser reflexión de K con respecto al eje radical de los circuncírculos de $\triangle FED$ y $\triangle FEK$ (que tienen el mismo radio), está sobre el circuncírculo de $\triangle DEF$ también. Por lo tanto, S es la intersección que se desea. $\square$

Nota: La conclusión de los primeros dos párrafos ($\angle BAT = \angle CAK$) se puede hacer tan solo de notar que como T es la intersección del circuncírculo de $\triangle DEF$ con Ω, también es el punto de tangencia del círculo mixtilineal con respecto a A.

Ejemplo 4.4. Sea $\triangle ABC$ un triángulo, ω su círculo A-mixtilineal, Ω su circuncírculo e I_A su excentro con respecto a A. Sea H el pie de altura desde A hacia BC, E el punto medio del arco $\widehat{BAC}$. Sean M y N los puntos medios de BC y AH, respectivamente, y sea P la intersección de AE con MN. Sea S el punto no en Ω tal que el circuncírculo de $\triangle BSC$ es tangente a ω. Demuestra que I_A, S y P son colineales.

Solución. Sea I el incentro de $\triangle ABC$ y sea Q el punto donde dicho incírculo toca a BC. Si usamos el lema *punto medio de las alturas* de la sección 3, tenemos que IN interseca a BC en J, el punto de tangencia entre BC y el excírculo ϵ con respecto a A.

Entonces $I_AJ \perp BC$ implica que $I_AJ \parallel AH \parallel AN$. Al usar estas paralelas, vemos la semejanza $\triangle INA \sim \triangle IJI_A$ y obtenemos $\frac{AI_A}{I_AI} = \frac{NJ}{IJ} = \frac{NH}{IQ}$.



Nótese que arriba usamos que $IQ \perp BC$. Por otro lado, por ser E punto medio del arco $\widehat{BAC}$, tenemos que $EB = EC$, lo cual implica que $EM \perp BC$, de donde $EM \parallel AN$. Al usar la semejanza $\triangle APN \sim \triangle EPN$, obtenemos $\frac{EP}{PA} = \frac{EM}{AN} = \frac{EM}{NH}$. Sea V el punto de tangencia de ω y Ω. Por el ejemplo 4.2 sabemos que V, I y E son colineales. Digamos que la recta que pasa por dichos puntos interseca a BC en D. Entonces, puesto que $IQ \parallel EM \perp BC$ y por la semejanza $\triangle DIQ \sim \triangle DEM$, obtenemos que $\frac{ID}{DE} = \frac{IQ}{EM}$. Así, al multiplicar las expresiones de arriba, obtenemos que $\frac{AI_A}{I_AI} \cdot \frac{ID}{DE} \cdot \frac{EP}{PA} = \frac{NH}{IQ} \cdot \frac{IQ}{EM} \cdot \frac{EM}{NH} = 1$. Luego, por el teorema de Menelao, P, D, e I_A son colineales. Ahora, se demostrará un resultado previo.

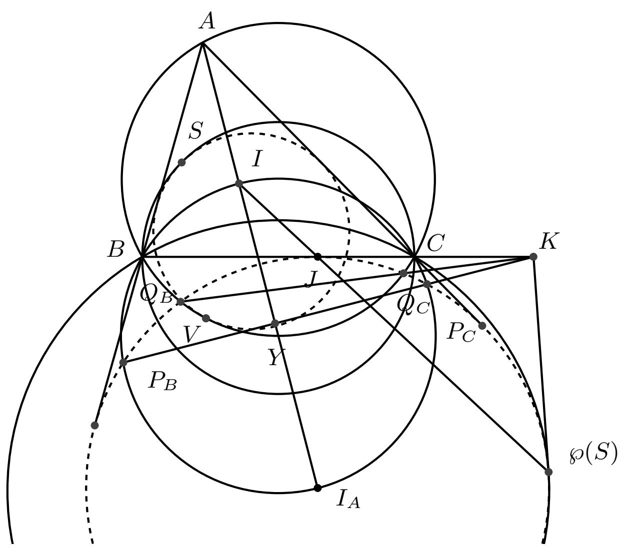
Lema. Los puntos A, I_A, V, y S son concíclicos.

Demostración. Consideremos la transformación $\wp$, que es la composición de una inversión con centro A y radio $\sqrt{AB \cdot AC}$ y de una reflexión con respecto a AI. Sabemos que A, I_A, V, y S son concíclicos solo si los inversos de I_A, V, y S son colineales, lo cual sucede si y solo si $\wp(I_A)$, $\wp(V)$ y $\wp(S)$ son colineales.

Ahora, notemos que $\wp(B) = C$ y que $\wp(C) = B$. Ya que Ω pasa por el centro de inversión, por B y por C, $\wp(\Omega)$ es la recta BC. Además, tenemos que, por la parte 4 de *incírculos mixtilíneos*, $\angle BAJ = \angle CAV$, donde J era el punto de contacto entre BC y el $A-$excírculo ϵ. A esto sumamos que, por ángulos inscritos, $\angle AVC = \angle ABF$, lo que implica que $\triangle AVC = \triangle ABF$. Por tanto,

$$\frac{AV}{AC} = \frac{AB}{AJ} \Rightarrow AV \cdot AJ = (\sqrt{AB \cdot AC})^2 \quad \Rightarrow \quad \wp(V) = J.$$

Ahora, como ω no pasa por A, entonces $\wp(\omega)$ es un círculo. Dado que ω es tangente a las rectas AB y AC (las cuales se preservan con $\wp$), y pasando por V, tenemos que $\wp(\omega)$ es tangente a AB y a AC y que pasa por J. Por lo tanto, $\wp(\omega) = \epsilon$. Como S se encuentra sobre ω, entonces $\wp(S)$ se encuentra sobre ϵ. Por otro lado, tenemos por ángulos en Ω que $\triangle AIB \sim \triangle ACI_A$, lo cual implica que $AI \cdot AI_A = AB \cdot AC$ de donde $\wp(I_A) = I$. Por lo tanto, lo que buscamos demostrar es que $\wp(I_A) = I$, $\wp(V) = J$ y $\wp(S)$ son colineales.
Para esto, tracemos la tangente a ϵ por $\wp(S)$, hasta intersecar a BC (i.e. la tangente a ϵ por J) en K. Lo que queremos probar se reduce a que I está sobre la polar de K, lo cual ocurre si y solo si K está sobre la polar de I. Ahora, definimos a ϑ como el círculo que pasa por I, B, I_A, C. Denotemos con Q_C y con Q_B a las intersecciones de Ω y ϵ; y con P_C y con P_B a las intersecciones de ϑ y ϵ.



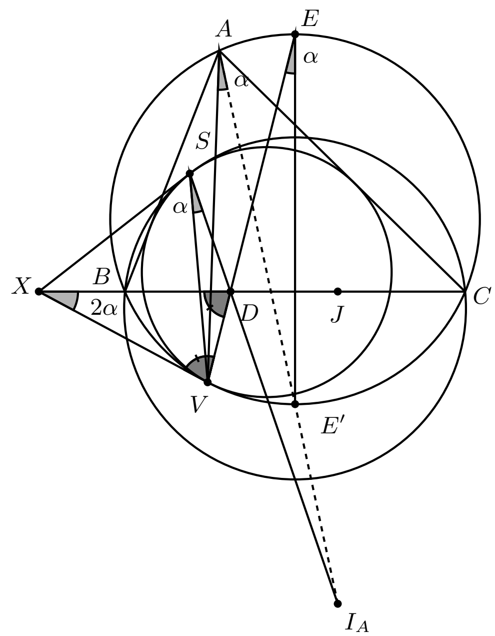
Sea γ el circuncírculo de $\triangle BSC$. Al usar ejes radicales es posible obtener las siguientes concurrencias:

- $\Omega, \epsilon, \wp(\gamma) \rightarrow$ los tres ejes radicales Q_CQ_B, $\wp(S)K$ y BC (misma recta que FK) concurren, en K.

- $\vartheta, \epsilon, \Omega \rightarrow$ los tres ejes radicales P_CP_B, Q_CQ_B y BC concurren.

Al combinar lo anterior obtenemos que P_CP_B, Q_CQ_B, $\wp(S)K$ y BC concurren en un mismo punto, K. Notemos que ϑ es un círculo de diámetro II_A, y que $I_AP_C = I_AP_B$, entonces $P_CP_B \perp II_A$. Si llamamos Y a la intersección de dichas perpendiculares, entonces sabemos que $\triangle I_AYP_C \sim \triangle I_AP_CI \Rightarrow I_AP_C^2 = I_AY \cdot I_AI \Rightarrow Y$ es el inverso de I en una inversión con respecto a ϵ. Como $\angle KYI_A = \angle P_BYI_A = 90° \Rightarrow K$ está sobre la polar de I, con lo que se demuestra el lema. $\square$

Sabemos que los tres ejes radicales de cada pareja de ω, Ω y γ concurren. El eje radical de Ω y ω es la tangente a ω por V; el eje radical de γ y ω es la tangente a ω por S y el eje radical de γ y ω es BC, por lo que existe un punto X sobre las tres rectas mencionadas, lo cual directamente implica que $XS = XV$.



Más aún, sabemos que $XD = XV$ ya que $\angle XVD = \angle XVE = \frac{\widehat{VE}}{2} = \frac{\widehat{VB}+\widehat{BE}}{2} = \frac{\widehat{VB}+\widehat{EC}}{2} = \angle BDV = \angle XDV$. En otras palabras, X es el circuncentro de $\triangle SDV$. Llamemos $\angle DSV = \alpha$. Veamos, por ángulos en una circunferencia, que $2\alpha = \angle DXV$ implica que $\angle XDV = 90° - \alpha$. Por lo anterior, si E' es el punto medio del arco $\widehat{BC}$ que no contiene a A, notamos que $\angle XDV = \frac{\widehat{VE}}{2} = 90° - \frac{\widehat{VE'}}{2} = 90° - \angle VEE'$, lo cual implica que $\angle VEE' = \alpha$. Sabemos que A, E', I_A son colineales, ya que AI_A es bisectriz de $\angle BAC$, y que E' es punto medio del arco $\widehat{BC}$ opuesto a A. Además, AI_AVS es cíclico; por lo tanto, $\angle VAI_A = \angle VSI_A$. Así, $\alpha = \angle VEE' = VAE' = \angle VAI_A = \angle VSI_A$. Por definición, tenemos $\angle VSD = \alpha$, entonces $\angle VSD = \angle VSI_A$, es decir, S, D, e I_A son colineales. Al combinar lo anterior con que P, D, I_A son colineales, concluimos la prueba. $\square$

Problemas olímpicos

1) (USAMO 1988, Problema 4) Se tiene un triángulo $\triangle ABC$ con incentro I. Prueba que los circuncentros de $\triangle IAB$, $\triangle IBC$ y $\triangle IAC$ se encuentran sobre un círculo cuyo centro es el circuncentro de $\triangle ABC$.

2) El triángulo $\triangle ABC$ está inscrito en un círculo Γ. Sea Γ_A el círculo tangente a Γ, AB, y AC (es decir, el círculo A-mixtilineal). Sea A' la intersección de Γ y Γ_A. De manera similar se definen B' y C'. Demuestra que AA', BB', y CC' concurren.

3) Sea Ω el circuncírculo de u triángulo $\triangle ABC$, y sean P, Q y R los puntos de tangencia de $\widehat{BC}$, AC y AB con el círculo A-mixtilineal, respectivamente. Sean Q' y R' los segundos puntos de intersección de PQ y PR con Ω, respectivamente. Sea K el punto de intersección de los circuncírculos de $\triangle AQ'Q$ y $\triangle AR'R$. Demuestra que $AQ'KR'$ es un paralelogramo.

4) (EGMO 2018, Problema 5) Sea Γ la circunferencia que pasa por los vértices de un triángulo $\triangle ABC$. Una circunferencia Ω es tangente al segmento AB y tangente a Γ en un punto situado al mismo lado de la recta AB que C. La bisectriz del ángulo $\angle BCA$ interseca a Ω en dos puntos distintos, P y Q. Demuestra que $\angle APB = \angle QBC$.

5) (Olimpiada de Japón, 2009) El triángulo $\triangle ABC$ está inscrito en Γ. Se traza un círculo con centro O, tangente a BC en P, y tangente internamente al arco $\widehat{BC}$ de Γ que no contiene a A en el punto Q. Demuestra que si $\angle BAO = \angle CAO$, entonces $\angle PAO = \angle QAO$.

6) (APMO 2006) Sean A, B dos puntos distintos sobre una circunferencia O y sea P el punto medio del segmento AB. Sea O_1 el círculo tangente a AB en P y también tangente al círculo O. Sea l la linea tangente, distinta a AB, a O_1 que pasa por A. Sea C la intersección de l y O, tal que $C \neq A$. Sea Q el punto medio del segmento BC y O_2 el círculo tangente a BC en Q y tangente al segmento AC. Prueba que el círculo O_2 es tangente al círculo O.

7) (EGMO 2013, Problema 5) Sea Ω el circuncírculo de $\triangle ABC$. El círculo ω es tangente a los lados del triángulo, y es tangente internamente a Ω en P. Una línea paralela a AB que pasa por el interior del triángulo $\triangle ABC$ es tangente a ω en Q. Prueba que $\angle ACP = \angle QCB$.

Agradecimientos

Extendemos nuestro agradecimiento a Kevin William Beuchot Castellanos y a Juan Carlos Ortiz Rhoton, quienes ayudaron a resolver el Ejemplo 4.4 hasta el cansancio.

Bibliografía

1) Ayme Jean-Louis. *A new Mixtilinear circle adventure I.* St. Denis, Île de la Réunion, Océan Indiene, France.
`http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/Docs/Mixtilinear1.pdf`.

2) Bulajich Manfrino Radmila, Gómez Ortega José Antonio. *Geometría*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2002.

3) Chen Evan. *Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads*, Washington, The Mathematical Association of America, MAA Problem Book Series, 2016.