Áreas con tapetes

Por Marcos Torres Vivanco

Nivel Básico

Desde mi primer día como participante en la olimpiada de matemáticas, me ha sorprendido el ingenio necesario para resolver algunos de los problemas. En contraste con el procedimiento que aprendí en la escuela, enfocado en ver un tema y resolver ejercicios que usan solamente el tema visto, en la olimpiada nos daban los problemas y nos dejaban usar cualquier cosa que quisiéramos y seguir cualquier camino que se nos ocurriera para resolverlos. En especial me gustan aquellos problemas que no solo tienen soluciones que son o muy teóricas o muy complicadas sino que también tienen una solución sencilla la cual no necesita muchas palabras para comprenderse. Estas soluciones son muy importantes, sobre todo en concursos de primaria y secundaria y en las primeras etapas de concursos estatales, los cuales suelen ser de opción múltiple y las soluciones más rápidas y precisas son de mayor utilidad que aquellas que usan muchas cuentas.
En este artículo abordaré algunos problemas básicos en los que piden comparar o calcular áreas y que se pueden resolver con un procedimiento conocido como teorema de los tapetes, el cual puede ayudarnos a reducir las cuentas o a encontrar soluciones más rápidas. Además, con la ayuda de este teorema veremos un lema sobre áreas en trapecios que es muy útil para resolver varios problemas.
Antes de que veamos el enunciado del teorema de los tapetes, recordemos el siguiente lema.

Lema 1. *Sean ABC y DEF dos triángulos con la misma altura h, desde A y D respectivamente, entonces*

$$\frac{BC}{EF} = \frac{[ABC]}{[DEF]},$$

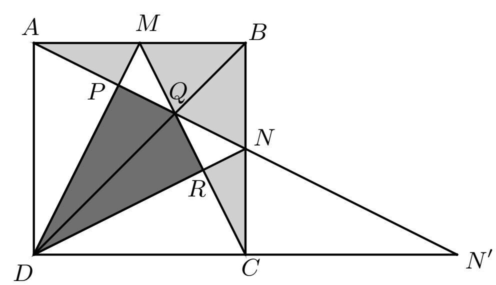
donde $[ABC]$ denota al área del triángulo ABC.

Demostración. La prueba se sigue de la igualdad $\frac{[ABC]}{[DEF]} = \frac{\frac{h \cdot BC}{2}}{\frac{h \cdot EF}{2}} = \frac{BC}{EF}$. $\square$

Para ver de qué trata el teorema de los tapetes y cómo se usa, veamos como ejemplo el siguiente problema.

Problema 1. *Sean M y N los puntos medios de los lados AB y BC del cuadrado $ABCD$. Sean P, Q y R los puntos de intersección de AN con DM, AN con CM y CM con DN, respectivamente. Pruebe que:*

$$[AMP] + [BMQN] + [CNR] = [DPQR].$$



Demostración. Primero veamos una solución directa de este problema. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que el cuadrado $ABCD$ tiene área igual a 1. Dado que la figura es simétrica con respecto de la diagonal BD, basta probar que:

$$[AMP] + [BMQ] = [PQD].$$

Por ser paralelas AD y BC tenemos que $\angle QDA = \angle QBN$. Además, $\angle AQD = \angle NQB$ por ser ángulos opuestos por el vértice. Por lo tanto, los triángulos AQD y NQB son semejantes; entonces $\frac{AQ}{QN} = \frac{AD}{BN} = 2$. Por lo que $3QN = AN$, de donde tenemos que $[AQB] = \frac{2}{3}[ABN] = \frac{1}{6}$. Por ser M punto medio de AB tenemos que $\frac{1}{2}[AQB] = [BMQ] = \frac{1}{12}$. Ahora, sea N' el punto de intersección de AN y CD. Por un procedimiento análogo, los triángulos AMP y $N'DP$ son semejantes y $\frac{PM}{PD} = \frac{AM}{DN'} = \frac{1}{4}$. Esto último se debe a que $DN' = 2DC = 2AB = 4AM$, pues los triángulos $AN'D$ y $NN'C$ son semejantes, por el teorema de Tales y, dado que N es punto medio de BC, $\frac{AD}{NC} = \frac{DN'}{N'C} = 2$. Por lo tanto, $5PM = DM$, de donde tenemos que $[AMP] = \frac{1}{5}[AMD] = \frac{1}{20}$. Por la semejanza de los triángulos $AN'D$ y $NN'C$ tenemos que $N'A = 2NA$ y, por la semejanza de los triángulos AMP y $N'DP$, tenemos que $4PA = N'P$, al sustituir estas igualdades tenemos

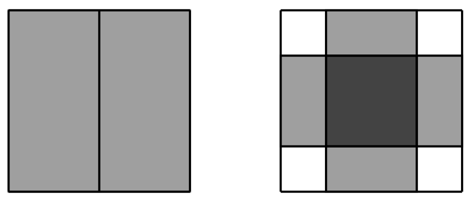
$$\begin{aligned} N'A &= 2NA, \\ N'P + PA &= 2NA, \\ 4PA + PA &= 2NA, \\ PA &= \frac{2}{5}NA. \end{aligned}$$

Como $QN = \frac{1}{3}AN$, resulta que $PQ = AN - \frac{2}{5}AN - \frac{1}{3}AN = \frac{4}{15}AN$, de donde obtenemos que $[PQD] = \frac{4}{15}[AND] = \frac{2}{15}$, pues el triángulo AND tiene base y altura igual a 1. Por último, $[AMP] + [BMQ] = [PQD]$, esto es, $\frac{1}{20} + \frac{1}{12} = \frac{2}{15}$.

$\square$

Esta solución depende de que M y N sean puntos medios de los lados AB y BC, además de que se necesitan muchas cuentas y trazos nuevos, por ejemplo encontrar el punto N'. Existe una solución más sencilla, en la que no se realizan cuentas y funciona para puntos arbitrarios M y N en AB y BC.

Para poder formular el teorema de los tapetes, consideremos lo siguiente. Supongamos que tenemos un piso con cualquier forma y lo cubrimos con dos tapetes, las cuales cubren por completo el cuarto y no se empalman. Si movemos estos tapetes y los volvemos a colocar de nuevo en el piso del cuarto, entonces estos tapetes se empalman en algunos pedazos y en otras partes no cubren el piso, pero como en un inicio los tapetes sí cubrían todo el piso, entonces la suma de las áreas del piso que ya no son cubiertas por los tapetes es igual a la suma de las áreas donde los tapetes se empalman.



En este caso consideramos solo dos tapetes que cubrían a la región, pero en general pueden ser más de dos tapetes, por lo tanto podemos formular una primera versión del teorema como sigue.

Teorema 1 (Primera versión del teorema de los tapetes)**.** *Si R es una región y A y B son dos conjuntos de tapetes dentro de R tales que $[A] + [B] = [R]$, entonces el área que no está cubierta por los tapetes es igual al área donde se empalman los tapetes de A con los de B.*

Regresemos a la versión generalizada de nuestro problema original, es decir, en donde M y N son dos puntos arbitrarios de los lados AB y BC, respectivamente. Dado que los triángulos AND y DMC tienen como base y altura los lados del cuadrado, el área de cada uno de ellos es la mitad del área del cuadrado. Luego, $[AND]+[DMC] = [ABCD]$ y, por el teorema de los tapetes, tenemos que $[PQRD] = [AMP]+[BMQN]+[CNR]$.

También se tiene una segunda versión del teorema de los tapetes que se puede enunciar como sigue.

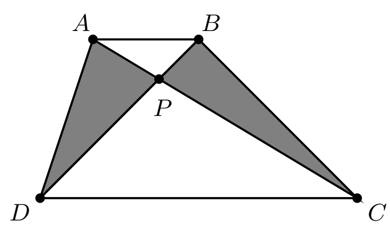
Teorema 2 (Segunda versión del teorema de los tapetes)**.** *Sean A y B dos tapetes con la misma área. Si quitamos la región en donde se enciman, las regiones sobrantes tienen la misma área.*

Lo anterior se sigue del hecho de que si C es el área de la intersección de los dos tapetes y, A y B son las áreas de las regiones que sobran en cada tapete, entonces $A + C = B + C$ si y solo si $A = B$.

Como ejemplo de esta versión del teorema de los tapetes veamos una prueba elemental del siguiente lema.

Lema 2 (Áreas en trapecios)**.** *Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo y sea P el punto de intersección de sus diagonales. Entonces, $ABCD$ es un trapecio con lados paralelos AB y CD si y solo si los triángulos APD y BPC tienen la misma área.*

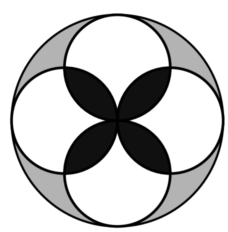
Demostración. Probaremos primero la ida. Por ser paralelas AB y CD, los triángulos ADC y BCD tienen la misma altura y la misma base, por lo tanto tienen la misma área. Luego, por la segunda versión del teorema de los tapetes tenemos que $[APD] = [BPC]$.



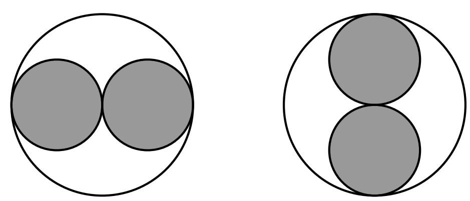
Para probar el regreso notemos que los triángulos ACD y BCD tienen la misma área, y tienen la misma base CD por lo tanto la altura desde A y desde B al lado CD mide lo mismo, por lo tanto AB es paralela a CD. $\square$

Con estos teoremas y el lema de áreas en trapecios, tenemos todo lo necesario para empezar a resolver unos cuantos problemas.
El siguiente es un ejemplo de un problema parecido a los que aparecen en las primeras etapas de selectivos estatales, en los que piden calcular o comparar áreas sombreadas de regiones.

Problema 2. *En la siguiente figura ¿Cuál región tiene mayor área, las almendras del centro o las sombrillas grises de alrededor?*



Solución. Consideremos dos conjuntos de tapetes, el conjunto A formado por los círculos horizontales y el conjunto B formado por los círculos verticales.

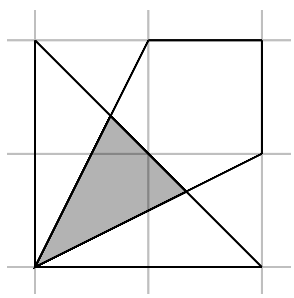


A B

Si cada uno de los círculos pequeños tiene radio r, entonces el conjunto A tiene área igual a $[A] = 2\pi r^2$. Análogamente, $[B] = 2\pi r^2$. Como el radio del círculo grade es $2r$, su área es $\pi(2r)^2 = 4\pi r^2$ y, como $[A] + [B] = 4\pi r^2$, por el teorema de los tapetes tenemos que el área de las almendras negras es la misma que el área de las sombrillas grises. □

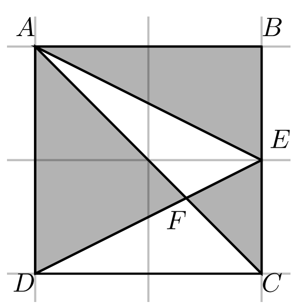
En el problema anterior pudimos haber calculado las áreas de cada una de las regiones para después compararlas, pero siguiendo el teorema de los tapetes obtuvimos una solución más corta. También notemos que los tapetes no necesariamente son polígonos, como triángulos o rectángulos, también pueden ser figuras curveadas.
Algo que muchos podrían pensar es que el teorema de los tapetes solo nos sirve para problemas en los que nos piden probar que dos áreas son iguales, pero también se puede usar en problemas de calcular áreas, pues con tal teorema podemos comparar regiones en las que no es tan sencillo calcular el área, con otras en las que sí.

Problema 3. *En la siguiente figura, si cada cuadrado de la retícula tiene lado* 1*, ¿cuál es el área de la región sombreada?*



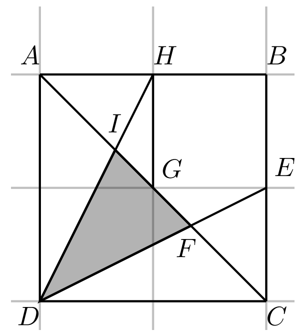
Solución. Considerando la siguiente figura tenemos que

$$[ABC] = [ADE] = \frac{1}{2}[ABCD].$$



Luego, por la primera versión del teorema de los tapetes, tenemos que $[ABE] + [EFC] = [AFD]$. Como AD y EC son paralelas y $\angle AFD = \angle CFE$, los triángulos AFD y CFE son semejantes y, como $\frac{AD}{EC} = 2$, se sigue que $[AFD] = 4[EFC]$. Además, $[ABE] = 1$, por lo que $[EFC] = \frac{1}{3}$ y $[AFD] = \frac{4}{3}$.

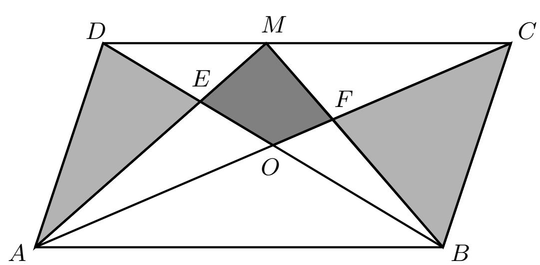
Como la figura es simétrica con respecto a la diagonal DB, tenemos que $[AHI] = [CFE] = \frac{1}{3}$. Además, DG es mediana del triángulo DFI, por lo que basta determinar el área del triángulo DGI. Aplicando el lema de áreas en trapecios al trapecio $AHGD$, obtenemos que $[DGI] = [AHI] = \frac{1}{3}$. Por lo tanto, $[DFI] = \frac{2}{3}$.



□

El siguiente problema apareció en el Examen Canguro Matemático Mexicano 2017, nivel cadete.

Problema 4. *En la siguiente figura se muestra un paralelogramo $ABCD$ con área 1. El punto de intersección de las diagonales del paralelogramo es O. El punto M está sobre DC. El punto de intersección de AM y BD es E, y el punto de intersección de BM y AC es F. La suma de las áreas de los triángulos AED y BFC es $\frac{1}{3}$. ¿Cuál es el área del cuadrilátero $EOFM$?*



(a) $\frac{1}{12}$ *(b)* $\frac{1}{8}$ *(c)* $\frac{1}{10}$ *(d)* $\frac{1}{6}$ *(e)* $\frac{1}{14}$

Demostración. Dado que AB es paralela a CD, tenemos que AB es paralela a CM; luego, por el lema de áreas en trapecios en $ABCM$, tenemos que $[AFM] = [BFC]$. Además, como $[ADE] + [BFC] = \frac{1}{3}$, se sigue que el área del polígono cóncavo $AFMED$ es

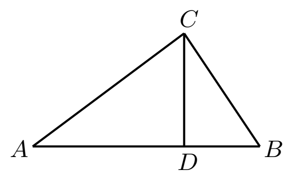
$$[AFMED] = [ADE] + [AFM] = [ADE] + [BFC] = \frac{1}{3}.$$

Como las diagonales de un paralelogramo lo dividen en cuatro triángulos con la misma área, resulta que $[AOD] = \frac{1}{4}$. Luego, $[EOFM] = [AFMED] - [AOD] = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$, por lo que la respuesta es (a). □

Podemos usar el teorema de los tapetes como una herramienta para resolver problemas más complicados, como veremos en el siguiente ejemplo. Antes necesitamos el siguiente lema.

Lema 3. *El área de cualquier triángulo* ABC *está dada por* $\frac{AB \cdot AC \cdot \operatorname{sen}(\angle BAC)}{2}$.

Demostración. Sea D el pie de la altura desde A sobre el lado BC.



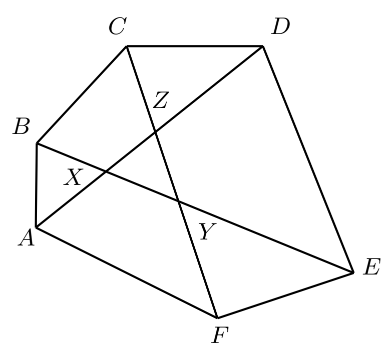
Tenemos que $\operatorname{sen}(\angle BAC) = \frac{CD}{AC}$, esto es, $AC \cdot \operatorname{sen}(\angle BAC) = CD$. Usando la fórmula usual para el área de un triángulo, tenemos que

$$[ABC] = \frac{AB \cdot CD}{2} = \frac{AB \cdot AC \cdot \operatorname{sen}(\angle BAC)}{2}.$$

□

Problema 5. *Cada una de las tres diagonales de un hexágono convexo que une vértices opuestos, divide al hexágono en dos cuadriláteros con la misma área. Pruebe que estas tres diagonales concurren en un mismo punto.*

Demostración. Supongamos que las tres diagonales no concurren en un punto, formando un triángulo XYZ como se ve en la figura.



Consideremos al par de diagonales AD y BE. Por hipótesis, cada una de estas diagonales divide al hexágono en dos cuadriláteros con la misma área, por lo que $[ABEF] = [ABCD] = \frac{[ABCDEF]}{2}$. Luego, por el teorema de los tapetes tenemos que $[ABX] = [XDE]$. Por ser ángulos opuestos por el vértice, tenemos que $\angle BXA = \angle EXD$, de donde $[ABX] = [XDE]$. Luego, por el Lema 3, tenemos que $\frac{BX \cdot AX \cdot \operatorname{sen}(\angle BXA)}{2} = \frac{DX \cdot EX \cdot \operatorname{sen}(\angle EXD)}{2}$, lo cual implica que $BX \cdot AX = DX \cdot EX$. De manera análoga, considerando las parejas de diagonales AD, CF y BE, CF, tenemos que $FY \cdot EY =$

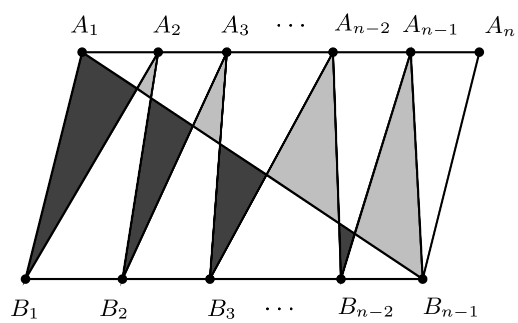
$BY \cdot CY$ y $CZ \cdot DZ = AZ \cdot FZ$. Multiplicando las tres igualdades anteriores obtenemos que $AX \cdot BX \cdot CZ \cdot DZ \cdot EY \cdot FY = AZ \cdot BY \cdot CY \cdot DX \cdot EX \cdot FZ$, lo cual es una contradicción, pues cada término de la izquierda es menor a un término de la derecha ($AX < AZ, BX < BY, \ldots, FY < FZ$). Por lo tanto, las tres diagonales AD, BE y CF concurren en un punto. $\square$

Algunos de los problemas que se enumeran a continuación se pueden resolver sin hacer uso del teorema de los tapetes, en sus dos versiones, pero el uso de estos teoremas hace que sea más fácil llegar al resultado o a la prueba. Los invito a encontrar diferentes caminos para resolver el mismo problema y, especialmente, que alguno de estos caminos use algunos de los resultados vistos en este artículo.

Problemas

1) Sea $ABCD$ un paralelogramo. Los puntos M, N y P están sobre los segmentos BD, BC y CD, respectivamente, tales que $CNMP$ es un paralelogramo. Sean E y F las intersecciones de AN con BD y AP con BD, respectivamente. Prueba que $[AEF] = [DFP] + [BEN]$.

2) Sea $n \geq 3$ un número entero, los puntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son colineales al igual que los puntos $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$. Además, el cuadrilátero $A_1B_1B_{n-1}A_n$ es un paralelogramo. Las líneas que unen los dos conjuntos de puntos y la diagonal A_1B_{n-1} forman triángulos por arriba y abajo de la diagonal, como se ve en la siguiente figura.

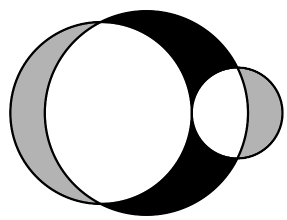


Prueba que el área total de los triángulos por arriba de la diagonal es igual al área de los triángulos por debajo de la diagonal.

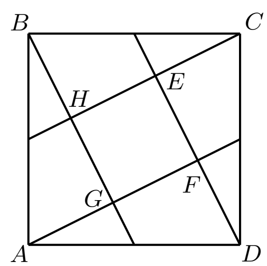
3) (IWYMIC, 2016) Sean D un punto en el lado AB y E un punto en el lado AC del triángulo ABC. Sea P el punto de intersección de BE y CD. El área del triángulo ABC es 12 cm^2. Los triángulos BPD, CPE y el cuadrilátero $ADPE$ tienen la misma área. ¿Cuál es el área del cuadrilátero $ADPE$?

4) (AMC 10, 2009) En un cuadrilátero convexo $ABCD$ se tiene que $AB = 9$ cm y $CD = 12$ cm. Las diagonales AC y BD se intersecan en E; $AC = 14$ cm y los triángulos AED y BEC tienen la misma área. ¿Cuál es el valor de AE?

5) Sean Γ_1, Γ_2 y Γ_3, tres circunferencias tales que sus centros son colineales. Γ_2 y Γ_3 son tangentes exteriormente en un punto; Γ_1 interseca a cada una de las otras dos circunferencias en dos puntos los cuales son los extremos de un diámetro de la circunferencia correspondiente. Demuestra que el área de las lunas grises es igual al área de los paraguas negros.



6) (AMC 10, 2015) En la figura, los cuadriláteros $ABCD$ y $EFGH$ son cuadrados. Si $AB = 10$ cm y $CE = 2\sqrt{5}$ cm, ¿cuánto mide el área del cuadrado $EFGH$?



7) (IWYMIC, 2015) $ABCD$ es un paralelogramo. E es un punto sobre el segmento AB tal que $\frac{AE}{EB} = \frac{1}{4}$. F es un punto sobre el segmento DC, AF y DE se intersecan en G y CE y BF se intersecan en H. Si el área de $ABCD$ es 1 cm^2 y el área del triángulo BHC es $\frac{1}{8}$ cm^2, encuentra el área del triángulo ADG.

8) Sea $ABCD$ un rectángulo, si $EFGH$ e $IFJH$ son rectángulos tales que J y G están en DC; I y E están en AB; F está en BC y H está en DA, demuestra que $[EFGH] + [IFJH] = [ABCD]$.

Bibliografía

1) T. Andreescu, B. Enescu. *Mathematical Olympiad Treasures.* Birkhäuser, 2004.

2) A. Bogomolny. *Carpets Theorem from Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles.* https://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/CarpetsInSquare.shtml, Accessed 10 March 2018.

3) J. Konhauser, D. Velleman, S. Wagon. *Which Way Did the Bicicle Go?, MAA, 1996.*