Productos Notables

Por Emerson Lucas Soriano Pérez y Carlos Jacob Rubio Barrios

Nivel Básico

En muchas multiplicaciones algebraicas es de mucha utilidad conocer los famosos «**productos notables** ». Productos notables es el nombre que reciben multiplicaciones con expresiones algebraicas que cumplen ciertas reglas fijas, cuyo resultado se puede escribir mediante simple inspección, sin verificar la multiplicación.
Este escrito desarrolla solo tres productos notables clásicos: binomio al cuadrado, diferencia de cuadrados y binomio al cubo (con sus variantes).

Binomio al Cuadrado

$$\boxed{(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2}$$

Ejemplo 1. *Sea n un entero positivo tal que $2n+1$ es un cuadrado. Demostrar que $n+1$ es suma de dos cuadrados.*

Solución. Supongamos que $2n+1 = k^2$ para algún entero positivo k. Si k es par, entonces k^2 también es par y, por lo tanto, $1 = k^2 - 2n$ es par, lo cual es un absurdo. Luego, k es impar, digamos $k = 2m+1$ para algún entero m. Usando la identidad del binomio al cuadrado, obtenemos que $2n+1 = (2m+1)^2 = 4m^2+4m+1$, de donde $n = 2m^2+2m$. Finalmente, usando una vez más la identidad del binomio al cuadrado, obtenemos que

$$n+1 = 2m^2+2m+1 = m^2+(m^2+2m+1) = m^2+(m+1)^2,$$

esto es, $n+1$ es suma de dos cuadrados.

$\square$

A partir de la identidad del binomio al cuadrado podemos generar dos variantes, llamadas «**identidades de Legendre**».

$$\boxed{(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)}$$

$$\boxed{(a+b)^2-(a-b)^2=4ab}$$

Diferencia de Cuadrados

$$\boxed{a^2-b^2=(a+b)(a-b)}$$

Ejemplo 2. *Determinar el mayor número primo de dos dígitos que divide a* $3^{32}-2^{32}$.

Solución. Aplicando diferencia de cuadrados, tenemos que

$$\begin{aligned}3^{32}-2^{32}&=(3^{16}+2^{16})(3^{16}-2^{16})=(3^{16}+2^{16})(3^8+2^8)(3^8-2^8)\\&=(3^{16}+2^{16})(3^8+2^8)(3^4+2^4)(3^4-2^4)\\&=(3^{16}+2^{16})(3^8+2^8)(3^4+2^4)(3^2+2^2)(3^2-2^2).\end{aligned}$$

Además, $3^2-2^2=5$, $3^2+2^2=13$ y $3^4+2^4=81+16=97$. Como 98 y 99 no son primos pero 97 sí es primo, la respuesta es 97. □

Ejemplo 3. *Si se sabe que* $\frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{\sqrt{3}}{6}$*, calcular el valor de* $(\frac{x}{y})^4+(\frac{y}{x})^4$.

Solución. Claramente ambos números x,y son diferentes de cero. Tenemos que $6xy=\sqrt{3}(x^2+y^2)$. Dividiendo ambos lados por xy obtenemos la relación $6=\sqrt{3}(\frac{x}{y}+\frac{y}{x})$. Simplificando obtenemos que $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=2\sqrt{3}$. Hagamos $a=\frac{x}{y}$ y $b=\frac{y}{x}$. Queremos determinar el valor de a^4+b^4.
Tenemos que $(a+b)^4=(2\sqrt{3})^4=2^4(\sqrt{3})^4=16\cdot 9=144$. Por otra parte, usando dos veces la identidad del binomio al cuadrado tenemos que

$$\begin{aligned}(a+b)^4&=(a+b)^2(a+b)^2=(a^2+2ab+b^2)(a^2+2ab+b^2)\\&=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.\end{aligned}$$

Como $ab=1$, tenemos que $6a^2b^2=6(ab)^2=6$, de modo que

$$144=a^4+b^4+4ab(a^2+b^2)+6=a^4+b^4+4(a^2+b^2)+6.$$

Por lo tanto, $a^4+b^4=138-4(a^2+b^2)$; así que basta determinar el valor de a^2+b^2. Nuevamente, por la identidad del binomio al cuadrado, tenemos que $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$. Como $a+b=2\sqrt{3}$ y $ab=1$, obtenemos que $a^2+b^2=(2\sqrt{3})^2-2(1)=12-2=10$. Finalmente, obtenemos que $a^4+b^4=138-4(10)=138-40=98$. □

Binomio al Cubo

$$\boxed{(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3}$$

Teniendo en cuenta esta identidad, vamos a encontrar dos variantes. En efecto, como

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

entonces $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$. Luego,

$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) = (a+b)\left[(a+b)^2 - 3ab\right] = (a+b)(a^2 - ab + b^2),$$

obteniendo la identidad llamada «Suma de Cubos»:

$$\boxed{a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)}$$

Análogamente, tenemos la siguiente identidad llamada «Diferencia de Cubos»:

$$\boxed{a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)}$$

Ejemplo 4. *Determinar todas las parejas de enteros* (a, b) *tales que* $ab \geq 0$ *y*

$$a^3 + b^3 + 99ab = 33^3.$$

Solución. Sea $c = a + b$. Usando la fórmula del binomio al cubo, obtenemos que $c^3 = (a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$. Luego,

$$c^3 - 33^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b) - (a^3 + b^3 + 99ab) = 3abc - 99ab,$$

esto es, $(c-33)(c^2 + 33c + 33^2) = 3ab(c-33)$, de donde

$$(c-33)(c^2 + 33c + 33^2 - 3ab) = 0.$$

Por lo tanto, $c = 33$ o $(a+b)^2 + 33(a+b) + 33^2 - 3ab = 0$. Las soluciones de $a + b = 33$ que satisfacen $ab \geq 0$ son $(a, b) = (0, 33), (1, 32), (2, 31), \ldots, (33, 0)$.
Por otra parte, la igualdad $(a+b)^2 + 33(a+b) + 33^2 - 3ab = 0$ es equivalente a la igualdad $(a-b)^2 + (a+33)^2 + (b+33)^2 = 0$. De aquí obtenemos que $a - b = 0$, $a + 33 = 0$ y $b + 33 = 0$. Luego, la única solución en este caso es $a = b = -33$.
Por lo tanto, las soluciones (a, b) buscadas son $(-33, -33)$ y las parejas de la forma $(k, 33-k)$ con $k = 0, 1, \ldots, 33$. □

Ejemplo 5. (*American Regions Mathematics League, 2003*) *Encontrar el mayor divisor de* 1001001001 *que no exceda a* 10000*.*

Solución. Sea $E = 1001001001$. Notemos que $E = 1001 \cdot 10^6 + 1001 = 1001(10^6 + 1)$. Sabemos que $1001 = 10^3 + 1$. Usando la identidad de suma de cubos, tenemos que

$$10^3 + 1^3 = (10+1)(10^2 - 10 + 1) = 11 \cdot 91 = 7 \cdot 11 \cdot 13.$$

Además, $10^6 + 1 = (10^2)^3 + 1$, luego, usando nuevamente la identidad de suma de cubos, tenemos que

$$10^6 + 1 = (10^2)^3 + 1 = (10^2 + 1)(10^4 - 10^2 + 1) = 101 \cdot 9901.$$

Así, la descomposición de E en factores primos es $E = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 101 \cdot 9901$. No es difícil verificar que cualquier divisor positivo del número $7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 101$ es menor que 9901 o es mayor que 10000. Por lo tanto, el mayor divisor de E que no excede a 10000 es 9901. □

Aplicaciones en Competencias de Matemáticas

Problema 1. *Si $x^3 = 1$, pero $x \neq 1$, calcular el valor de $x^{2017} + \frac{1}{x^{2017}}$.*

Solución. Notemos que $2017 = 3 \cdot 672 + 1$, por lo tanto $x^{2017} = (x^3)^{672} \cdot x = 1^{672} \cdot x = x$. Así, solo necesitamos calcular $x + \frac{1}{x}$. Notemos que $0 = x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$; luego, como $x - 1 \neq 0$, entonces $x^2 + x + 1 = 0$. Dividiendo entre x ambos miembros de la última igualdad, obtenemos que $0 = \frac{x^2+1+x}{x} = x + \frac{1}{x} + 1$, de donde concluimos que $x + \frac{1}{x} = -1$. Por lo tanto, la respuesta es -1. $\square$

Problema 2. ($Conamat$ 2005) *Sean x, y, z, w números reales tales que $x+y+z+w > 0$ y $\frac{x^2+y^2+z^2+w^2+1}{x+y+z+w} \leq 1$. Calcular el valor de $x + y + z + w$.*

Solución. Como $x + y + z + w > 0$, entonces multiplicando por $x + y + z + w$ ambos miembros de la segunda desigualdad, obtenemos que

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 + 1 \leqslant x + y + z + w. \tag{1}$$

Usando la identidad del binomio al cuadrado podemos completar cuadrados, luego, la desigualdad (1) es equivalente a:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(w - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant 0. \tag{2}$$

Como las cuatro variables son números reales, entonces el miembro izquierdo de la desigualdad (2) es no negativo, así, la única posibilidad de que la desigualdad (2) sea verdadera es que $x = y = z = w = \frac{1}{2}$. Por lo tanto, tenemos que $x+y+z+w = 2$. $\square$

Problema 3. *Sean a, b y c números reales, distintos entre sí, tales que $a = (a-b)^2 + b(a+1)$, $b = (b-c)^2 + c(b+1)$ y $c = (c-a)^2 + a(c+1)$. Demostrar que $E = \frac{(a^6-b^6)^2}{c^6-4a^3b^3} = c^6$.*

Solución. Notemos que la igualdad $a = (a-b)^2 + b(a+1)$ es equivalente a

$$a - b = a^2 - ab + b^2. \tag{3}$$

Si multiplicamos por $a + b$ a ambos miembros de la igualdad (3), obtenemos que $a^2 - b^2 = a^3 + b^3$. Análogamente, podemos obtener que $b^2 - c^2 = b^3 + c^3$ y que $c^2 - a^2 = c^3 + a^3$. Sumando miembro a miembro estas tres últimas igualdades obtenemos que, $a^3 + b^3 + c^3 = 0$. Luego, $c^6 = (-c^3)^2 = (a^3 + b^3)^2 = a^6 + 2a^3b^3 + b^6$, por lo tanto

$$c^6 - 4a^3b^3 = a^6 - 2a^3b^3 + b^6 = (a^3 - b^3)^2. \tag{4}$$

Por otro lado, por la identidad de la diferencia de cuadrados, tenemos que

$$(a^6 - b^6)^2 = (a^3 + b^3)^2(a^3 - b^3)^2. \tag{5}$$

Como $a \neq b$, tenemos que $a^3 \neq b^3$. De (4) y (5) tenemos que

$$E = \frac{(a^3 + b^3)^2(a^3 - b^3)^2}{(a^3 - b^3)^2} = (a^3 + b^3)^2.$$

Luego, como $a^3 + b^3 = -c^3$, entonces $E = (-c^3)^2 = c^6$. $\square$

Problema 4. *Sean a y b números reales tales que $a^3-3a^2+5a=1$ y $b^3-3b^2+5b=5$. Calcular el valor de $a+b$.*

Solución. Notemos que el sistema de ecuaciones es equivalente a

$$\begin{aligned}(a-1)^3+2(a-1)+2=0,\\(b-1)^3+2(b-1)-2=0.\end{aligned}$$

Por comodidad, hacemos $a-1=x$, $b-1=y$. Luego, el sistema es equivalente a $x^3+2x+2=0$ y $y^3+2y-2=0$. Sumando miembro a miembro y aplicando la identidad de suma de cubos, obtenemos que $(x+y)(x^2-xy+y^2+2)=0$. Por lo tanto, $x+y=0$ o $x^2-xy+y^2+2=0$. Pero si $x^2-xy+y^2+2=0$, entonces

$$0=x^2-xy+y^2+2=\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}+2,$$

lo cual es absurdo, pues $(x-\frac{y}{2})^2+\frac{3y^2}{4}+2>0$. Así, concluimos que $x+y=0$. Por lo tanto, $a+b=x+y+2=2$. □

Problema 5. *Demuestre que el producto de cuatro enteros positivos consecutivos nunca es un cuadrado perfecto.*

Solución. Supongamos que existen cuatro enteros positivos consecutivos tales que su producto es un cuadrado perfecto y sea n el menor de esos cuatro números. Entonces, $n(n+1)(n+2)(n+3)=k^2$ para algún entero positivo k. Además, tenemos que $n(n+3)=n^2+3n$ y $(n+1)(n+2)=n^2+3n+2$. Entonces,

$$\begin{aligned}n(n+1)(n+2)(n+3)+1&=(n^2+3n)(n^2+3n+2)+1\\&=(n^2+3n)^2+2(n^2+3n)+1\\&=(n^2+3n+1)^2,\end{aligned}$$

lo cual implica que $k^2+1=(n^2+3n+1)^2$. De aquí, $(n^2+3n+1)^2-k^2=1$ o de manera equivalente, $(n^2+3n+1+k)(n^2+3n+1-k)=1$. Como ambos factores son enteros, o bien ambos son iguales a 1 o ambos son iguales a -1. En cualquier caso, tenemos que $n^2+3n+1+k=n^2+3n+1-k$, lo cual implica que $2k=0$ y, en consecuencia, $k=0$. Esto es una contradicción, pues si k es el producto de cuatro enteros positivos, entonces k también es positivo. □

Problema 6. *Determine todos los números enteros que se pueden expresar como la diferencia de dos cuadrados perfectos.*

Solución. Sea n un número entero que se puede expresar como la diferencia de dos cuadrados. Sabemos que n puede ser par o impar, por esta razón analizaremos dos casos:

- Si n es impar, entonces existe un entero k tal que $n=2k+1$. Luego, por la identidad del binomio al cuadrado sabemos que $(k+1)^2=k^2+2k+1$, es decir, $2k+1=(k+1)^2-k^2$. Esto es suficiente para garantizar que si n es impar, entonces sí se puede expresar como la diferencia de dos cuadrados perfectos.

- Si n es par, entonces como n es la diferencia de dos cuadrados, tenemos que $n = x^2 - y^2$, para algunos enteros x, y. Claramente x, y tienen la misma paridad. Si x, y son pares, entonces $x^2 - y^2$ es múltiplo de 4, en consecuencia, n es múltiplo de 4. Ahora, si x, y son ambos impares, entonces $x^2 \equiv y^2 \equiv 1 \pmod{8}$, así $x^2 - y^2$ es múltiplo de 8 y, en consecuencia, n también es múltiplo de 8. Luego, de cualquier forma, n es múltiplo de 4, así, $n = 4t$ para algún entero t. En síntesis, si un número par se puede expresar como la diferencia de dos cuadrados perfectos, entonces dicho número es múltiplo de 4.

  De pronto surge una interrogante muy natural: ¿todo múltiplo de 4 se puede expresar como la diferencia de dos cuadrados perfectos? La respuesta es sí, y procederemos con la prueba. Sea t un número entero arbitrario. Por la identidad de Legendre, sabemos que $(t + 1)^2 - (t - 1)^2 = 4t$. Esto es suficiente para afirmar que cualquier múltiplo de 4 sí se puede expresar como la diferencia de dos cuadrados perfectos.

Finalmente, concluimos que los únicos enteros que se pueden expresar como la diferencia de dos cuadrados son los impares y los múltiplos de 4. □

Problema 7. *Demuestre que existen* 2017 *cuadrados perfectos, todos distintos, tales que la suma de todos ellos es también un cuadrado perfecto.*

Solución. Consideremos los números $x_k = 2k$, para todo $1 \leqslant k \leqslant 2016$. Así, la suma de sus cuadrados es múltiplo de 4, es decir, existe un entero positivo m tal que

$$2^2 + 4^2 + \cdots + 4032^2 = 4m.$$

Por la identidad de Legendre, tenemos que $4m = (m + 1)^2 - (m - 1)^2$, por lo tanto,

$$2^2 + 4^2 + \cdots + 4032^2 + (m - 1)^2 = (m + 1)^2,$$

donde claramente se observa que la suma de esos 2017 cuadrados perfectos es también un cuadrado perfecto. Además, $m - 1 > \frac{4032}{4} \cdot 4032 > 4032$; por lo tanto esos 2017 cuadrados perfectos son todos distintos. □

Problema 8. (*Brasil, 2012*) *Determine si existen enteros positivos distintos* x_1, x_2, $\ldots, x_{2012}$, *n, tales que*

$$n^2 = x_1^{P_1} + x_2^{P_2} + \cdots + x_{2012}^{P_{2012}},$$

donde P_k *es el k-ésimo número primo, para todo entero positivo k.*

Solución. Vamos a demostrar que sí existen tales números. En efecto, para cada $2 \leqslant k \leqslant 2012$ hagamos $x_k = 2k - 1$. Como cada uno de los números $x_2, x_3, \ldots, x_{2012}$ es impar, entonces los siguientes números también son impares:

$$x_2^{P_2},\ x_3^{P_3},\ x_4^{P_4}, \ldots ,\ x_{2012}^{P_{2012}}$$

Sabemos que al sumar 2011 números impares obtenemos un número impar, entonces el número

$$x_2^{P_2} + x_3^{P_3} + \cdots + x_{2012}^{P_{2012}}$$

es impar, o sea, existe un entero positivo t tal que

$$x_2^{P_2} + x_3^{P_3} + \cdots + x_{2012}^{P_{2012}} = 2t + 1.$$

Sabemos que $P_1 = 2$, luego, haciendo $x_1 = t$, tenemos que

$$x_1^{P_1} + x_2^{P_2} + \cdots + x_{2012}^{P_{2012}} = t^2 + 2t + 1 = (t + 1)^2.$$

Basta con tomar $n = t+1$ y conseguimos lo deseado. Además, es fácil notar que todos los números x_i son distintos dos a dos y que también son diferentes de n. $\square$

Problema 9. *Demostrar que el número* $3^{4^5} + 4^{5^6}$ *se puede expresar como el producto de dos enteros de al menos* 2017 *dígitos.*

Solución. Sean $m = 3^{4^4}$ y $n = 2^{\frac{5^6-1}{2}}$. Notemos que $3^{4^5} + 4^{5^6} = m^4 + 4n^4$ y que

$$m^4 + 4n^4 = (m^4 + 4m^2n^2 + 4n^4) - (4m^2n^2) = (m^2 + 2n^2)^2 - (2mn)^2.$$

Luego, $m^4 + 4n^4 = (m^2 + 2mn + 2n^2)(m^2 - 2mn + 2n^2)$. Notemos que,

$$m^2 - 2mn + 2n^2 = (m - n)^2 + n^2 \geqslant n^2. \tag{6}$$

Además,

$$n^2 = 2^{5^6-1} = 2^{15624} > 2^{8068} = 16^{2017} > 10^{2017}. \tag{7}$$

De (6) y (7) tenemos que $m^2 - 2mn + 2n^2$ tiene al menos 2017 dígitos. Como

$$m^2 + 2mn + 2n^2 > m^2 - 2mn + 2n^2,$$

entonces $m^2 + 2mn + 2n^2$ también tiene al menos 2017 dígitos. Concluimos que el número $3^{4^5} + 4^{5^6}$ sí se puede expresar como el producto de dos enteros positivos de al menos 2017 dígitos. $\square$

Problema 10. (*Bay Area Mathematical Olympiad, 2016*) *Encontrar un entero positivo N y enteros $a_1, a_2, \ldots, a_N$, tales que*

$$a_1 \cdot 1^3 + a_2 \cdot 2^3 + \cdots + a_N \cdot N^3 = 20162016,$$

donde $a_i = 1$ o $a_i = -1$ para cada $i = 1, 2, \ldots, N$.

Solución. Para cada entero positivo m, definamos $u_m = (m + 1)^3 - m^3$. Por la identidad del binomio al cubo, tenemos que

$$u_m = (m^3 + 3m^2 + 3m + 1) - m^3 = 3m^2 + 3m + 1.$$

Análogamente, podemos calcular u_{m+2}, u_{m+4} y u_{m+6}. En efecto,

$$\begin{aligned}
u_{m+2} &= 3(m + 2)^2 + 3(m + 2) + 1 = 3m^2 + 15m + 19,\\
u_{m+4} &= 3(m + 4)^2 + 3(m + 4) + 1 = 3m^2 + 27m + 61,\\
u_{m+6} &= 3(m + 6)^2 + 3(m + 6) + 1 = 3m^2 + 39m + 127.
\end{aligned}$$

Notemos que

$$u_m + u_{m+6} = 6m^2 + 42m + 128 \quad \text{y} \quad u_{m+2} + u_{m+4} = 6m^2 + 42m + 80.$$

Así, tenemos que $S_m = u_m - u_{m+2} - u_{m+4} + u_{m+6} = 48$. La última igualdad nos indica que el valor de S_m no depende de m, es decir, siempre es 48 para cualquier valor de m. Además, notemos que S_m tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} S_m = & -m^3 + (m+1)^3 + (m+2)^3 - (m+3)^3 + \\ & + (m+4)^3 - (m+5)^3 - (m+6)^3 + (m+7)^3. \end{aligned}$$

Sabemos que $2016 = 48 \cdot 42$, así, 20162016 también es divisible por 48, entonces existe un entero positivo k tal que $20162016 = 48k$. Así, podemos aprovechar la siguiente expresión:

$$\underbrace{48 + 48 + \cdots + 48}_{k \text{ sumandos}} = 20162016$$

reemplazando cada 48 por algún S_i de la siguiente forma: el primer sumando 48 lo reemplazamos por S_1, el segundo sumando 48 lo reemplazamos por S_9, el tercer sumando 48 lo reemplazamos por S_{17} y así sucesivamente. Por lo tanto, el último sumando 48 lo reemplazamos por S_{8k-7} quedando de la siguiente manera:

$$S_1 + S_9 + S_{17} + \cdots + S_{8k-7} = 20162016.$$

Como cada S_i está conformado por 8 términos y la expresión de arriba tiene k términos, entonces tomando $N = 8k$ habremos conseguido que el número 20162016 quede expresado de la forma que se pedía. $\square$

Problemas Propuestos

1) Sean x, y, números reales tales que $x + y = x^2 + y^2 = x^3 + y^3 = a$. Hallar todos los posibles valores de a.

2) Sean a, b, c números reales tales que $a^2(b + c) = b^2(c + a) = 2017$. Si $a \neq b$, calcular $c^2(a + b)$.

3) Determinar si existen enteros positivos a y b tales que $a^2 + a = 4(b^2 + b)$.

4) Hallar todos los números reales x, y, z tales que $x+y = 4\sqrt{z-1}$, $y+z = 4\sqrt{x-1}$ y $z + x = 4\sqrt{y-1}$.

5) Sea x un número real, con $|x| > 1$, tal que $x + \sqrt{x^2-1} + \frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}} = 20$. Calcular el valor de $x^2 + \sqrt{x^4-1} + \frac{1}{x^2+\sqrt{x^4-1}}$.

6) Calcular el valor de la suma $\sum_{n=1}^{9999} \frac{1}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})(\sqrt[4]{n}+\sqrt[4]{n+1})}$.

7) Sean x, y números reales tales que $\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\left(y + \sqrt{y^2+1}\right) = 1$. Calcular $x + y$.

8) Resolver la ecuación en los números reales

$$\sqrt{x_1 - 1^2} + 2\sqrt{x_2 - 2^2} + \cdots + 20\sqrt{x_{20} - 20^2} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + \cdots + x_{20}).$$

9) Sean a, b, c, d números reales. Demostrar que $\text{mín}(a-b^2, b-c^2, c-d^2, d-a^2) \leqslant \frac{1}{4}$.

10) Sean a y b números reales. Probar que $a^3 + b^3 + (a+b)^3 + 6ab = 16$ si y solo si $a + b = 2$.

11) Sean a, b, c, d números reales tales que $a^2 + b^2 + (a+b)^2 = c^2 + d^2 + (c+d)^2$. Probar que $a^4 + b^4 + (a+b)^4 = c^4 + d^4 + (c+d)^4$.

12) Sean x, y números reales que satisfacen $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = k$. Calcular, en términos de k, la expresión $\frac{x^8+y^8}{x^8-y^8} + \frac{x^8-y^8}{x^8+y^8}$.

Bibliografía

1) Titu Andreescu, Dorin Andrica. *Number Theory. Structures, Examples and Problems.* Birkhäuser, 2009.

2) Titu Andreescu, Dorin Andrica, Zuming Feng. *104 Number Theory Problems. From the Training of the USA IMO Team.* Birkhäuser, 2007.

3) Arthur Engel. *Problem-Solving Strategies.* Springer, 1999.

4) Xiong Bin, Lee Peng Yee. *Mathematical Olympiad in China: Problems and Solutions.* World Scientific Publishing Company, 2007.

5) Titu Andreescu, Adithya Ganesh. *108 Algebra Problems from the AwesomeMath Year-Round Program.* XYZ Press, 2014.

6) Titu Andreescu, Dorin Andrica. *360 Problems for Mathematical Contests.* GIL Publishing House, 2003.

7) Dušan Djukić, Vladimir Janković, Ivan Matić, Nikola Petrović. *The IMO Compendium. A collection of Problems Suggested for the International Mathematical Olympiads: 1959-2009.* Second Edition, Springer, 2009.