Cuadriláteros Cíclicos

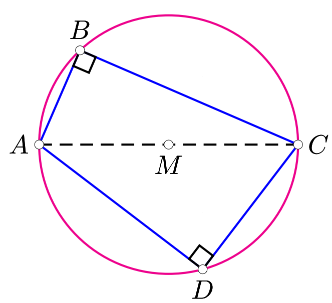
Por Emerson Lucas Soriano Pérez y Carlos Jacob Rubio Barrios

Nivel Intermedio

La geometría tiene un rol muy importante en la olimpiada de matemática y para resolver problemas geométricos no sólo basta con aprender las propiedades y algunas aplicaciones de ellas, también se debe tener mucha imaginación. En esta ocasión hemos querido escribir sobre los cuadriláteros cíclicos. De hecho, hay muchas formas de identificarlos, pero en este escrito solo abordaremos la forma más sencilla, que es la versión por ángulos.

Un cuadrilátero $ABCD$ es llamado *cíclico* si sus cuatro vértices están en una misma circunferencia. Se dice que los vértices A, B, C y D de un cuadrilátero cíclico $ABCD$ son *concíclicos*.

Por ejemplo, si tenemos un cuadrilátero $ABCD$ con ángulos rectos en B y en D, entonces el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico, pues el circuncentro del triángulo rectángulo ABC es el punto medio M de la hipotenusa AC y el circuncentro del triángulo rectángulo ADC, también es el punto M. Luego, los cuatro puntos A, B, C, D pertenecen a la circunferencia con centro en M y radio AM.

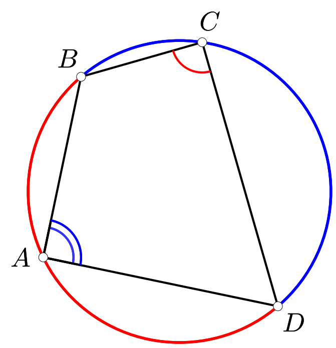


Este caso especial en donde dos ángulos internos opuestos de un cuadrilátero miden 90° cada uno, se puede generalizar como se muestra en el siguiente resultado.

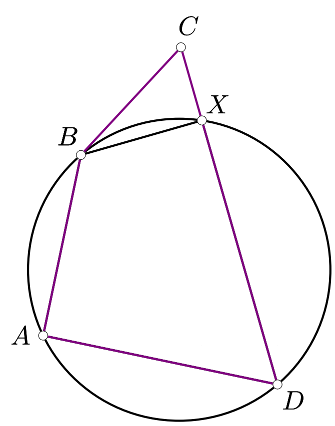
Dos Propiedades Básicas

Teorema 1. *Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo. El cuadrilátero $ABCD$ es cíclico si y solo si la suma de dos ángulos interiores opuestos es* $180°$.

Prueba. Supongamos primero que el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico. Entonces, el ángulo inscrito $\angle BAD$ es la mitad del arco $\widehat{BCD}$ y el ángulo inscrito $\angle BCD$ es la mitad del arco $\widehat{BAD}$. Así, $\angle BAD + \angle BCD$ es la mitad de la suma de los arcos $\widehat{BAD}$ y $\widehat{BCD}$ y, como ambos arcos completan la circunferencia, entonces la suma de ambos arcos es $360°$, por lo tanto, $\angle BAD + \angle BCD = 180°$.



Para demostrar el recíproco, procederemos por contradicción. Supongamos que el cuadrilátero $ABCD$ satisface la igualdad $\angle BAD + \angle BCD = 180°$ pero no es cíclico. Entonces, C no está en el circuncírculo Γ del triángulo ABD. Como el punto C no está en Γ, entonces está en el interior o en el exterior de dicha circunferencia. Supongamos que C está en el exterior de Γ (se procede de manera similar cuando C está en el interior de Γ).



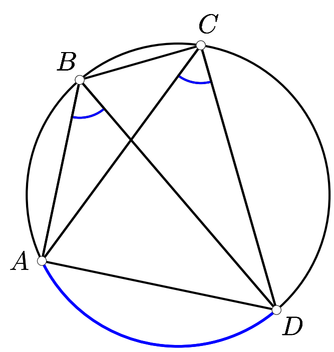
Sea $X \neq D$ el punto de intersección de Γ y CD. Como el cuadrilátero $ABXD$ es cíclico, entonces por lo demostrado en la primera parte, tenemos que $\angle BAD + \angle BXD = 180°$. Pero por hipótesis tenemos que $\angle BAD + \angle BCD = 180°$, entonces $\angle BXD = \angle BCD$, de esto deducimos que $\angle CBX = 0°$, lo cual es un absurdo. $\square$

Corolario 1. *Si $ABCD$ es un cuadrilátero convexo cíclico, entonces la medida de un ángulo interior es igual a la medida del ángulo exterior opuesto.*

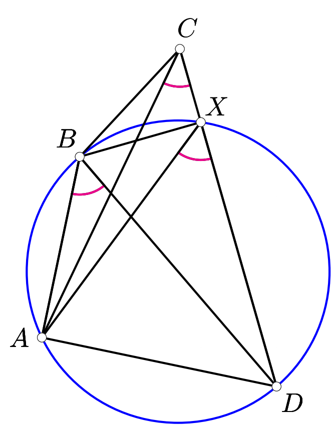
Prueba. La demostración es inmediata, pues por el teorema 1 sabemos que $\angle BAD + \angle BCD = 180°$. Luego, $\angle BAD = 180° - \angle BCD$ (ángulo exterior respecto al vértice C), que es lo que se quería probar. □

Teorema 2. *Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo. El cuadrilátero $ABCD$ es cíclico si y solo si $\angle ABD = \angle ACD$.*

Prueba. Supongamos primero que el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico. En la figura se puede ver que los ángulos inscritos $\angle ABD$ y $\angle ACD$ subtienden el mismo arco $\widehat{AD}$ (que no contiene al punto B). Así, concluimos que $\angle ABD = \angle ACD$.



Para el recíproco, procederemos nuevamente por contradicción como en la prueba del teorema 1, esto es, supongamos que el cuadrilátero $ABCD$ satisface que $\angle ABD = \angle ACD$ pero no es cíclico. Como los cuatro puntos A, B, C, D no están en una misma circunferencia, supongamos que el punto C no está en el circuncírculo Γ del triángulo ABD. Así, el punto C está en el interior o en el exterior de Γ. Supongamos que C está en el exterior de Γ (se procede de manera similar si el punto C está en el interior de Γ).

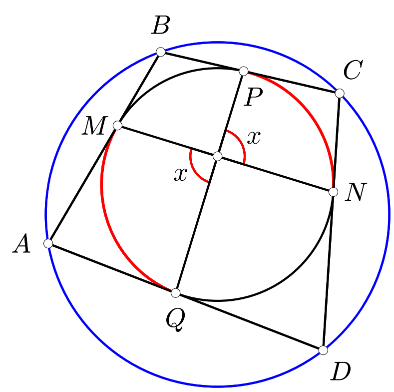


Sea X el punto de intersección de Γ y CD. Como $ABXD$ es un cuadrilátero cíclico, entonces por lo demostrado en la primera parte, tenemos que $\angle ABD = \angle AXD$. Pero por hipótesis, tenemos que $\angle ABD = \angle ACD$. Entonces, $\angle AXD = \angle ACD$, lo cual implica que $\angle CAX = 0°$, que es un absurdo. $\square$

Algunas Aplicaciones Sencillas

Problema 1. *Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo cíclico que está circunscrito a una circunferencia ω. Sean M, P, N, Q los puntos de tangencia de ω con los lados AB, BC, CD, DA, respectivamente. Calcular la medida del ángulo que forman las cuerdas MN y PQ.*

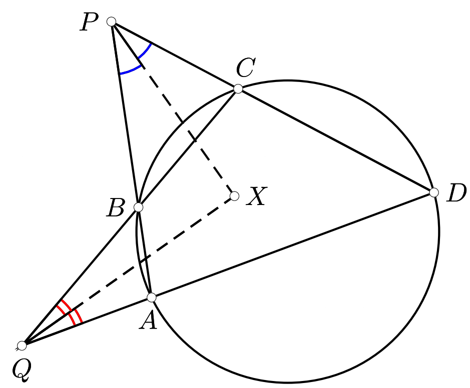
Solución. Es fácil probar que el arco $\widehat{MQ}$ (que no contiene al vértice P) en la circunferencia ω y el ángulo $\angle MAQ$ son suplementarios (basta usar el hecho conocido de que la recta que pasa por A y el centro de ω, es bisectriz del ángulo $\angle MAQ$), esto es, $\widehat{MQ} = 180° - \angle MAQ$. Análogamente, tenemos que el arco $\widehat{NP}$ (que no contiene al vértice Q en ω) y el ángulo $\angle PCN$ son suplementarios, esto es, $\widehat{NP} = 180° - \angle PCN$.



Luego, $\widehat{MQ} + \widehat{NP} = 360° - \angle MAQ - \angle PCN$. Como el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico, por el teorema 1 tenemos que $\angle MAQ + \angle PCN = 180°$. Así, $\widehat{MQ} + \widehat{NP} = 180°$. Además, tenemos que $x = \frac{\widehat{MQ}+\widehat{NP}}{2}$. Por lo tanto, $x = \frac{180°}{2} = 90°$. $\square$

Problema 2. *Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo cíclico. Sean P y Q los puntos de intersección de AB con CD y de AD con BC, respectivamente. Las bisectrices de los ángulos $\angle AQB$ y $\angle BPC$ se intersecan en el punto X. Calcular la medida del ángulo $\angle PXQ$.*

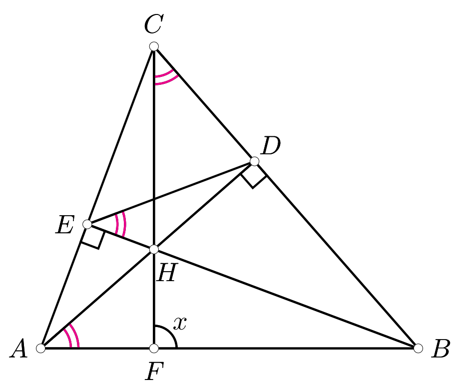
Solución. En el cuadrilátero no convexo $BPXQ$, tenemos que $\angle PBQ = \angle BQX + \angle BPX + \angle PXQ$. Pero como $\angle PBQ = \angle ABC$, entonces $\angle ABC = \angle BQX + \angle BPX + \angle PXQ$. Análogamente, en el cuadrilátero no convexo $PDQX$, tenemos que $\angle XPD + \angle PDQ + \angle XQD = \angle PXQ$. Sumando miembro a miembro las dos relaciones anteriores, obtenemos que $2\angle PXQ = \angle ABC + \angle PDQ$.



Como $\angle PDQ = \angle CDA$ y el cuadrilátero convexo $ABCD$ es cíclico, resulta que $180° = \angle ABC + \angle PDQ = 2\angle PXQ$ y por lo tanto, $\angle PXQ = 90°$. $\square$

Problema 3. *Demostrar que las tres alturas en un triángulo son concurrentes.*

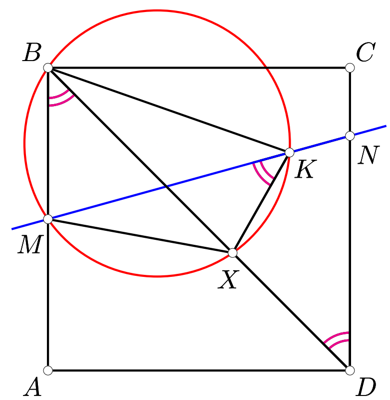
Solución. Si el triángulo es rectángulo, entonces es claro que las tres alturas concurren en el vértice del ángulo recto. Supongamos que el triángulo ABC es acutángulo (cuando el triángulo es obtusángulo se procede de manera similar). Sean D y E las proyecciones de A y B respecto a las rectas BC y CA, respectivamente. Sea H el punto de intersección de AD y BE, y sea F el punto de intersección de CH y AB.



Para demostrar que las tres rectas del triángulo ABC son concurrentes, debemos probar que CF es altura, es decir, debemos probar que $\angle HFB = 90°$. En efecto, notemos que en el cuadrilátero $AEDB$ se cumple que $\angle AEB = \angle ADB$, luego, por el teorema 2, tenemos que el cuadrilátero $AEDB$ es cíclico, así, $\angle DAB = \angle DEB$.
Por otro lado, en el cuadrilátero $CEHD$ se cumple que $\angle CEH + \angle CDH = 90° + 90° = 180°$, luego, por el teorema 1, deducimos que $CEHD$ es cíclico, por lo tanto, $\angle HED = \angle HCD$. En consecuencia, de la última igualdad tenemos que $\angle DAB = \angle FCB$, pero como $\angle CBF = 90° - \angle DAB = 90° - \angle FCB$, entonces $\angle FBC + \angle FCB = 90°$, de donde $x = 90°$, como queríamos. $\square$

Problema 4. *Sea $ABCD$ un cuadrado y sea K un punto en su interior. Una recta que pasa por K corta a los lados AB y CD en los puntos M y N, respectivamente. Demostrar que las circunferencias circunscritas de los triángulos KBM y KDN se intersecan en el punto K y en un punto de la diagonal BD.*

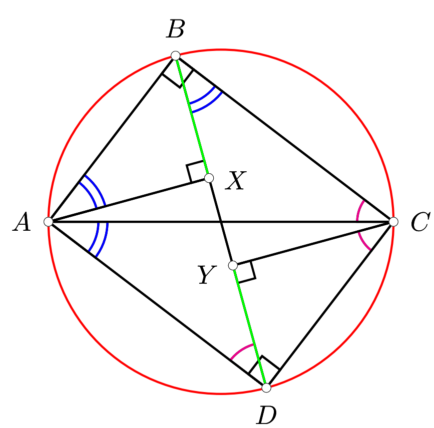
Solución. Sea X el punto de intersección del circuncírculo del triángulo KBM y la diagonal BD. Para demostrar que uno de los puntos de intersección de los circuncírculos de los triángulos KBM y KDN está sobre la diagonal BD, basta demostrar que $KNDX$ es cíclico.



Por ser BD diagonal del cuadrado $ABCD$, se cumple que $\angle XBM = 45°$. Luego, como $KBMX$ es cíclico, entonces $45° = \angle XBM = \angle XKM$. Nuevamente, por ser BD diagonal del cuadrado $ABCD$, entonces $\angle XDN = 45°$. Notemos que en el cuadrilátero $KNDX$ se cumple que el ángulo interior respecto al vértice D es igual al ángulo exterior respecto al vértice K, entonces concluimos que $KNDX$ es cíclico. $\square$

Problema 5. *Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico tal que AC es diámetro de su circunferencia circunscrita. Sean X, Y las proyecciones de A y C sobre BD, respectivamente. Demostrar que $DX = BY$.*

Solución. Basta demostrar que $BX = DY$.

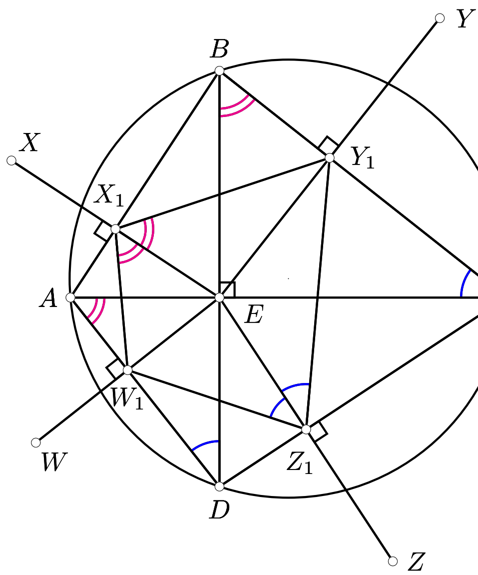


Como AC es diámetro del circuncírculo del cuadrilátero $ABCD$, entonces $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$. Notemos que $\angle CBD = \angle CAD$, pues el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico. Además, en los triángulos rectángulos ABC y ABX, tenemos que $90^\circ = \angle CBX + \angle XBA = \angle XAB + \angle XBA$, de donde se sigue que $\angle CBD = \angle CAD = \angle BAX$.
Análogamente, obtenemos que $\angle BCA = \angle BDA = \angle DCY$. Por lo tanto, los triángulos ABX y ACD son semejantes, de donde $\frac{BX}{AB} = \frac{CD}{AC}$. También tenemos que los triángulos CDY y ABC son semejantes, por lo tanto, $\frac{DY}{CD} = \frac{AB}{AC}$. Comparando las últimas dos igualdades, concluimos que $BX = DY$, como se quería. □

Aplicaciones en Problemas de Olimpiada

Problema 6 (Estados Unidos, 1993)**.** *Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico tal que sus diagonales AC y BD son perpendiculares y se intersecan en el punto E. Demostrar que las reflexiones de E respecto a los lados AB, BC, CD y DA, están en una misma circunferencia.*

Solución. Sean X_1, Y_1, Z_1, W_1 las proyecciones de E sobre los lados AB, BC, CD, DA, respectivamente. Como X, Y, Z, W son las reflexiones de E sobre las rectas AB, BC, CD, DA, respectivamente, entonces $EX = 2EX_1$, $EY = 2EY_1$, $EZ = 2EZ_1$ y $EW = 2EW_1$.



Así, los cuadriláteros $XYZW$ y $X_1Y_1Z_1W_1$ son homotéticos con centro de homotecia E y razón $\frac{EX}{EX_1} = 2$. Entonces, basta demostrar que el cuadrilátero $X_1Y_1Z_1W_1$ es cíclico para concluir que el cuadrilátero $XYZW$ también es cíclico, pues son homotéticos.
En efecto, es fácil ver que los cuadriláteros EX_1AW_1 y EX_1BY_1 son cíclicos, por lo tanto, en esos cuadriláteros se cumple que $\angle EAW_1 = \angle EX_1W_1$ y $\angle EX_1Y_1 =$

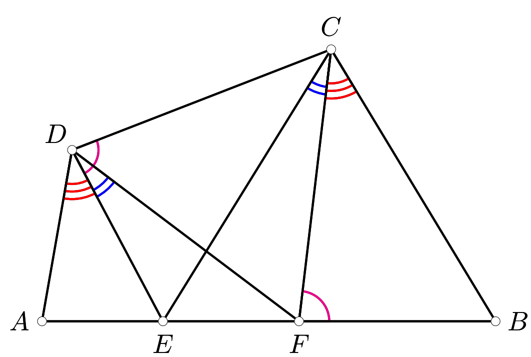
$\angle EBY_1$, respectivamente. También, los cuadriláteros EY_1CZ_1 y EZ_1DW_1 son cíclicos, por lo tanto $\angle ECY_1 = \angle EZ_1Y_1$ y $\angle EZ_1W_1 = \angle EDW_1$, respectivamente. Luego, como el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico, entonces $\angle BCA = \angle BDA$ y $\angle DAC = \angle DBC$, en consecuencia, $\angle W_1X_1E = \angle EX_1Y_1$ y $\angle W_1Z_1E = \angle EZ_1Y_1$. En conclusión,

$$\angle W_1X_1Y_1 = 2\angle EBC \text{ y } \angle Y_1Z_1W_1 = 2\angle ECB. \tag{1}$$

Como las diagonales del cuadrilátero $ABCD$ son perpendiculares, entonces el triángulo EBC es rectángulo, recto en E, por lo tanto, $\angle EBC + \angle ECB = 90°$. Luego, en (1) tenemos que $\angle W_1X_1Y_1 + \angle Y_1Z_1W_1 = 2 \cdot 90° = 180°$. Esto es suficiente para garantizar que el cuadrilátero $X_1Y_1Z_1W_1$ es cíclico y, por ende, el cuadrilátero $XYZW$ también es cíclico. □

Problema 7 (Rusia, 1996)**.** *En el lado AB de un cuadrilátero convexo $ABCD$ se ubican los puntos E y F con $AE < AF$. Si $\angle ADE = \angle FCB$ y $\angle EDF = \angle ECF$, demostrar que $\angle FDB = \angle ACE$.*

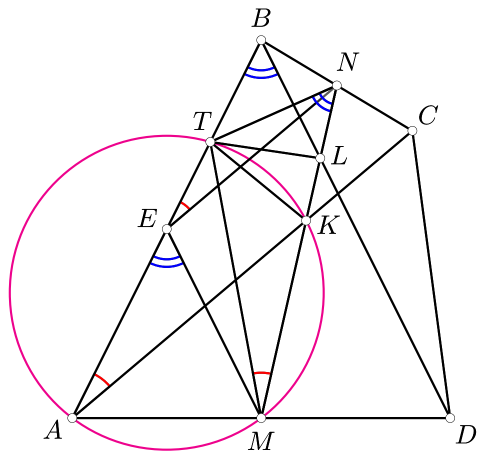
Solución. En el cuadrilátero $EDCF$ se cumple que $\angle EDF = \angle ECF$, por lo tanto, el cuadrilátero $EDCF$ es cíclico y, en consecuencia, $\angle EDC = \angle CFB$.



En el triángulo FCB, tenemos que $180° - \angle FBC = \angle BFC + \angle FCB$. Pero como, $\angle BFC + \angle FCB = \angle ADE + \angle EDC$, entonces $180° - \angle ABC = \angle ADC$, esto es, $\angle ADC + \angle ABC = 180°$. Así, el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico, de donde $\angle CAE = \angle BDC$. Como el cuadrilátero $EDCF$ es cíclico, tenemos que $\angle CEF = \angle FDC = \angle FDB + \angle BDC$. Luego, en el triángulo ACE, $\angle CAE + \angle ACE = \angle CEF$. Comparando las dos últimas igualdades, concluimos que $\angle FDB = \angle ACE$. □

Problema 8 (Pre-Selectivo Perú, IMO 2016)**.** *Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo tal que AD y BC no son paralelas. Sean M y N los puntos medios de los lados AD y BC, respectivamente. El segmento MN corta a AC y BD en los puntos K y L, respectivamente. Demostrar que uno de los puntos de intersección de las circunferencias circunscritas de los triángulos AKM y BNL pertenece a la recta AB.*

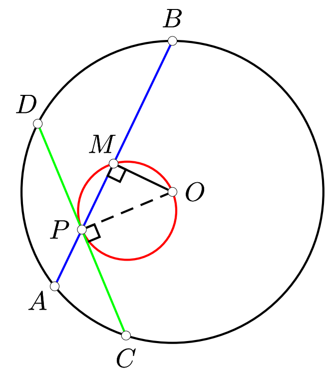
Solución. Sea E el punto medio del segmento AB y sea T el punto de intersección del circuncírculo del triángulo AKM y la recta AB. Para demostrar que uno de los puntos de intersección de los circuncírculos de los triángulos AKM y BNL está sobre la recta AB, solo debemos probar que el cuadrilátero $BNLT$ es cíclico.



Como E, M y N son puntos medios de los lados AB, AD y BC, respectivamente, entonces EM y EN son bases medias de los triángulos ABD y ABC, respectivamente. Luego, por ser EN paralelo a AC, tenemos que $\angle BEN = \angle BAC$, pero como el cuadrilátero $ATKM$ es cíclico, entonces $\angle TAK = \angle TMK$.
Observemos que en el cuadrilátero $METN$ se cumple que $\angle NMT = \angle NET$, por lo tanto, el cuadrilátero $METN$ es cíclico. Por ser EM paralelo a BD, tenemos que $\angle AEM = \angle ABD$, pero como el cuadrilátero $METN$ es cíclico, entonces $\angle TNM = \angle AEM$ y, en consecuencia, $\angle TBL = \angle TNL$. Este último resultado nos garantiza que el cuadrilátero $BNLT$ es cíclico. □

Problema 9 (Canadá, 1991). *Sea ω una circunferencia y sea P un punto en su interior. Considere todas las cuerdas de ω que pasan por P. Demostrar que los puntos medios de todas esas cuerdas están en una misma circunferencia.*

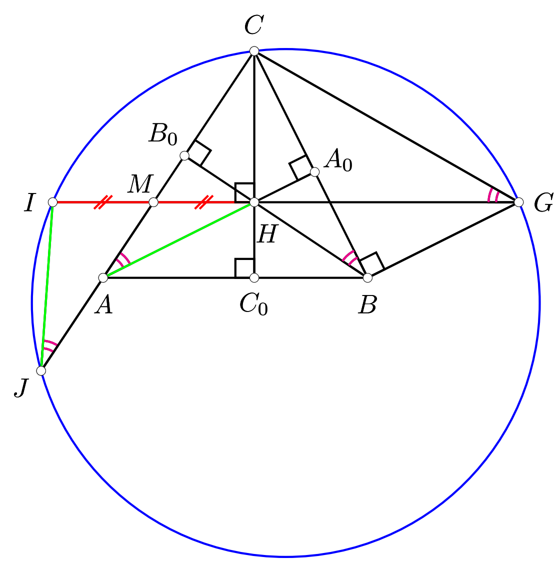
Solución. Sea O el centro de la circunferencia ω y sea Γ la circunferencia de diámetro OP. Demostraremos que los puntos medios de todas las cuerdas que pasan por P en la circunferencia ω, pertenecen a la circunferencia Γ. Sea ℓ una recta que pasa por el punto P. Tenemos dos posibilidades con respecto a la recta ℓ: Que sea secante a Γ o que sea tangente a Γ.
Si la recta ℓ es secante a Γ, sean A y B los puntos de intersección de ℓ con la circunferencia ω. Si la cuerda AB pasa por O, entonces AB es díametro, y, por ende, O es punto medio de AB. Además, O es punto de la circunferencia Γ. Si ℓ no pasa por O, considere que $M \neq P$ es el punto de intersección de ℓ con la circunferencia Γ. Como OP es diámetro de Γ, entonces $\angle OMP = 90°$. Notemos que OM es perpendicular a la cuerda AB, por lo tanto, M es punto medio de AB.



Si la recta ℓ es tangente a Γ, sean C y D los puntos de intersección de ℓ con la circunferencia ω. Es claro que OP es perpendicular a CD, pues P es punto de tangencia y OP es diámetro de Γ. Así, P es punto medio de la cuerda CD.
En cualquier caso, siempre se cumple que el punto medio de la cuerda que pasa por P pertenece a la circunferencia Γ. Por lo tanto, los puntos medios de todas las cuerdas de ω que pasan por P están en una misma circunferencia. $\square$

Problema 10 (Lista corta, IMO, 2015)**.** *Sea ABC un triángulo acutángulo de ortocentro H. Sea G un punto del plano tal que $ABGH$ es un paralelogramo. Sea I el punto de la recta GH tal que AC divide al segmento HI en dos partes iguales. Supongamos que la recta AC interseca a la circunferencia circunscrita del triángulo GCI en C y J. Demostrar que $IJ = AH$.*

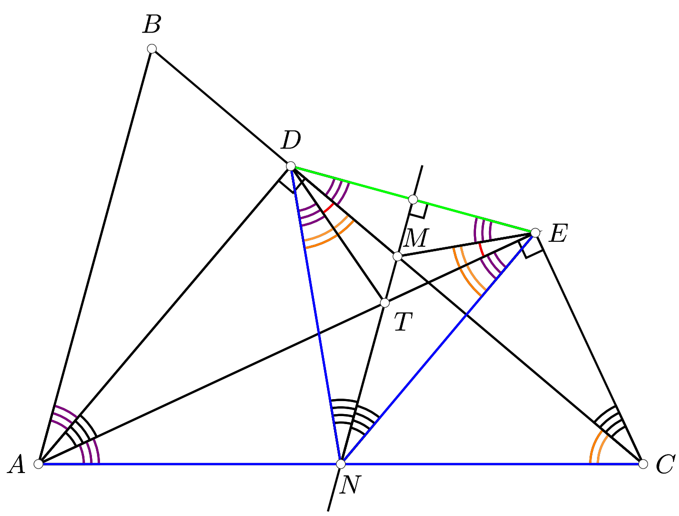
Solución. Sean A_0, B_0 y C_0 los pies de las alturas del triángulo ABC desde los vértices A, B y C, respectivamente. Sea M el punto de intersección de AC con IH.



Como $ABGH$ es un paralelogramo, entonces $AH \parallel BG$ y $AB \parallel HG$, esto implica que $\angle CHG = \angle CBG = 90°$. Así, el cuadrilátero $CHGB$ es cíclico y, en consecuencia, $\angle CGH = \angle HBC$. Además, tenemos que $\angle HBC = \angle CAA_0$, pues AB_0A_0B es cíclico. También observemos que el cuadrilátero $JICG$ es cíclico, por lo tanto, $\angle IJC = \angle IGC$. Por lo tanto, $\angle IJM = \angle MAH$. Llamemos $\angle MAH = \alpha$ y $\angle AMI = \theta$.
Aplicando la ley de senos en el triángulo JIM, tenemos que $\frac{IM}{\text{sen } \alpha} = \frac{IJ}{\text{sen } \theta}$ y aplicando la ley de senos en el triángulo AMH, tenemos que $\frac{MH}{\text{sen } \alpha} = \frac{AH}{\text{sen } (180° - \theta)}$. Como $IM = MH$ y $\text{sen}(180° - \theta) = \text{sen}\,\theta$, se concluye que $IJ = AH$. $\square$

Problema 11 (Olimpiada Centroamericana, 2017)**.** *Dado un triángulo ABC, sean D el pie de la altura desde A y ℓ la recta que pasa por los puntos medios de AC y BC. Sea E la reflexión del punto D respecto a la recta ℓ. Demostrar que el circuncentro del triángulo ABC está sobre la recta AE.*

Solución. Si el triángulo ABC es rectángulo, entonces el punto E coincide con el punto C, así, el resultado es inmediato. La solución es similar si el triángulo es obtusángulo o acutángulo, así que solo analizaremos el caso cuando el triángulo ABC es acutángulo.

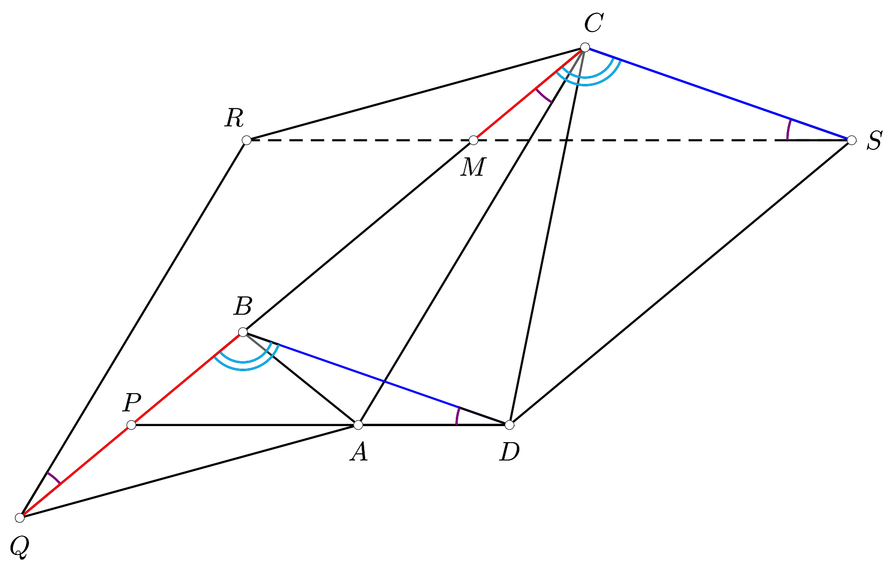


Sea T el punto de intersección de la recta ℓ y la recta AE. En el triángulo rectángulo ADC, DN es mediana, por lo tanto, $NA = NC = ND$ y $\angle NDC = \angle NCD$. Como E es la reflexión de D respecto a ℓ, entonces ℓ es la mediatriz del segmento DE. En consecuencia, tenemos que $ND = NE$, $\angle NDT = \angle NET$, $\angle NDM = \angle NEM$ y $\angle TND = \angle TNE$.
Notemos que $NA = NC = NE$, por lo tanto, el triángulo AEC es retángulo, recto en E, así, $\angle NAE = \angle NEA$. Como $\angle NCD = \angle NEM$, entonces el cuadrilátero $NMEC$ es cíclico y, en consecuencia, se tiene que $\angle MNE = \angle MCE$. Observe

que en el cuadrilátero $ADEC$ se cumple que $\angle ADC = \angle AEC = 90°$, por lo tanto, $ADEC$ es cíclico también y, por ende, $\angle EAD = \angle DCE$.
En el triángulo ABC, MN es mediana, por lo tanto MN es paralela a AB y, en consecuencia, $\angle BAC = \angle MNC$. Por otro lado, notemos que $\angle BAC = \angle BAD + \angle DAE + \angle EAC$ y $\angle MNC = \angle MNE + \angle ENC$. Además, $2\angle EAN = \angle NAE + \angle NEA = \angle ENC$. Luego, como $\angle TNE = \angle DAE$, entonces $\angle BAD = \angle EAC$.
Es conocido que el ortocentro y el circuncentro del cualquier triángulo son conjugados isogonales. Luego, como el rayo AD contiene al ortocentro del triángulo ABC y los rayos AD y AE son isogonales respecto al ángulo $\angle BAC$, entonces el rayo AE contiene al circuncentro del triángulo ABC, como se quería probar. □

Problema 12 (Selectivo Perú, Cono Sur, 2014)**.** *Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico. Suponga que las rectas BC y AD se intersecan en el punto P y sea Q un punto del plano tal que P es punto medio de BQ. Se construyen los paralelogramos $CAQR$ y $DBCS$. Demostrar que los puntos C, Q, R y S están en una misma circunferencia.*

Solución. Como $CAQR$ es un paralelogramo, tenemos que AC es paralela a RQ, así, $\angle RQC = \angle QCA$. Como el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico, entonces $\angle BCA = \angle BDA$. Sea M un punto de BC tal que RM es paralela a la recta PD. Por simetría, en el paralelogramo $AQRC$, se tiene que los triángulos APQ y RMC son congruentes y, en consecuencia, $PQ = PB = MC$.



Notemos que los triángulos MCS y PDB son congruentes, pues $PB = MC$, $BD = CS$ y $\angle PBD = \angle MCS$. Entonces, $MS = PD$ y $\angle CSM = \angle BDP$, pero como las parejas homólogas (CS, BD) y (PB, MC) son paralelas, entonces MS es paralela a PD. Así, los puntos R, M y S son colineales. Por lo tanto, $\angle RSC = \angle CQR$, lo cual implica que el cuadrilátero $QRCS$ es cíclico. □

Para finalizar, dejamos unos ejercicios para que practique el lector, esperando que sean de su agrado.

Ejercicios

1) Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico tal que AB es el diámetro de la circunferencia circunscrita. Sean A' y B' los pies de las perpendiculares desde A y B, respectivamente, hasta CD. Demostrar que $DA' = CB'$.

2) Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico. Si P es el punto de intersección de AD y BC, y Q es el punto de intersección de AB y CD, demostrar que las bisectrices de los ángulos $\angle DPC$ y $\angle AQD$ son perpendiculares.

3) Sean C_1, C_2, C_3 y C_4 circunferencias tales que C_1 corta a C_2 en A y en P, C_2 corta a C_3 en B y en Q, C_3 corta a C_4 en C y en R y C_4 corta a C_1 en D y en S, de manera que el cuadrilátero $PQRS$ está contenido en el cuadrilátero $ABCD$. Demostrar que el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico si y solo si el cuadrilátero $PQRS$ es cíclico.

4) Cada una de las circunferencias Ω_1, Ω_2, Ω_3 y Ω_4 es tangente exteriormente a exactamente dos de las demás. Si A, B, C y D son los puntos de tangencia de las circunferencias, demostrar que A, B, C y D están en una misma circunferencia.

5) Demostrar que si un cuadrilátero cíclico tiene sus diagonales perpendiculares, entonces una recta que pase por el punto de intersección de las diagonales y sea perpendicular a uno de los lados, pasará por el punto medio del lado opuesto.

6) Las cuerdas AB y CD de una circunferencia Ω se cortan en el punto P. Demostrar que el circuncentro del triángulo PAD, el punto P y el ortocentro del triángulo PCB son colineales.

7) Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico tal que sus diagonales AC y BD son perpendiculares y se cortan en el punto P. Sea M el punto medio del lado AB. Demostrar que la recta MP es perpendicular a la recta AC.

8) (Sharygin, 2017) Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico con $AB = BC$. Sea M un punto en el menor arco $\widehat{CD}$ del circuncírculo de $ABCD$. Las rectas BM y CD se cortan en el punto P y las rectas AM y BD se cortan en el punto Q. Demostrar que AC es paralela a PQ.

9) (Grecia, 2017) Sea ABC un triángulo acutángulo, con $AB < AC < BC$, y sea ω su circuncírculo. La circunferencia con centro en A y radio AC corta nuevamente a ω en el punto D y corta a la recta CB en el punto E. Si la recta AE interseca nuevamente a ω en el punto F y G es un punto en la recta BC tal que $EB = BG$, demostrar que D, E, F, G están en una misma circunferencia.

10) (EGMO, 2017) Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo tal que $\angle DAB = \angle BCD = 90°$ y $\angle ABC > \angle CDA$. Sean Q y R puntos en los segmentos BC y CD, respectivamente, tales que la recta QR interseca a las rectas AB y AD en los puntos P y

S, respectivamente. Se sabe que $PQ = RS$. Sea M el punto medio de BD y sea N el punto medio de QR. Demostrar que los puntos M, N, A y C pertenecen a una misma circunferencia.

11) (Checa y Eslovaca, 2010) Las circunferencias ω_1 y ω_2 se intersecan en los puntos A y B. La tangente exterior común de ambas circunferencias las interseca en los puntos K y L tal que el punto B está en el interior del triángulo KLA. Una recta ℓ que pasa por A interseca a las circunferencias en los puntos M y N. Demostrar que ℓ es tangente al triángulo KLA si y solo si los puntos K, L, M, N están en una misma circunferencia.

12) (Selectivo Perú, Cono Sur, 2013) Sea I el incentro del triángulo ABC y sean A_1, B_1, C_1 puntos que pertenecen a los segmentos AI, BI, CI, respectivamente. Las mediatrices de los segmentos AA_1, BB_1, CC_1 determinan un triángulo $\mathcal{T}$. Si I es el ortocentro del triángulo $A_1B_1C_1$, demostrar que los circuncentros de los triángulos $\mathcal{T}$ y ABC coinciden.

13) Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico. Sea M el punto de intersección de las perpendiculares a AB y CD por D y A, respectivamente. Sea N el punto de intersección de las perpendiculares a AB y CD por C y B, respectivamente. Demostrar que AC, BD y MN son concurrentes.

14) Sea M el punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero cíclico $ABCD$ de manera que el ángulo $\angle AMB$ es agudo. Se construye el triángulo isósceles BCK, de base BC, externamente al cuadrilátero de manera que $\angle KBC + \angle AMB = 90°$. Demostrar que KM y AD son perpendiculares.

15) (IMO, 1985) Una circunferencia Γ está centrada en un punto del lado AB de un cuadrilátero cíclico $ABCD$. Además, los lados BC, CD y DA son tangentes a Γ. Demostrar que $AD + BC = AB$.

Bibliografía

1) Viktor Prasolov. *Problems in Plane and Solid Geometry.*

2) Titu Andreescu, Michal Rolinek. *106 Geometry Problems.*

3) Evan Chen. *Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads.*

4) Titu Andreescu, Razvan Gelca. *Mathematical Olympiad Challenges.*

5) Arseniy Akopyan. *Geometry in Figures.*