
Puntos en el incírculo de un triángulo

Por Julio César Díaz Calderón

Nivel Avanzado

Introducción

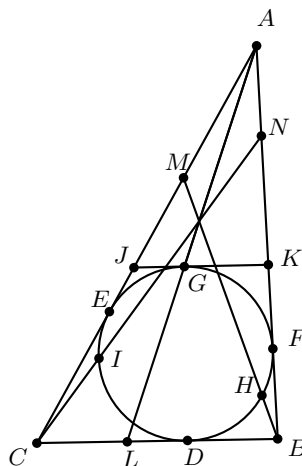
El incírculo es una de las circunferencias más famosas en el triángulo; no obstante, su tratamiento se separa un poco del estudio de otras circunferencias famosas como el circuncírculo o la circunferencia de los nueve puntos. El objetivo de esta nota es introducir técnicas de resolución de problemas en geometría que incluyan al incírculo y a sus puntos notables. Estas herramientas van desde la semejanza y los ángulos en una circunferencia, hasta técnicas más avanzadas como la inversión. La primera parte surge de un problema propuesto por el autor para el Octavo Concurso de Problemas para las Olimpiadas de Matemáticas de la Sociedad Matemática Mexicana.² En cambio, la segunda mitad desarrolla un teorema de Lev Emelyanov y de Tatiana Emelyanova que relaciona los pies de las bisectrices y el punto de Feuerbach, el punto de tangencia del incírculo y la circunferencia de los nueve puntos.

El carácter didáctico de los artículos en la revista Tzaloa se intenta proyectar en dos secciones de problemas. La primera, titulada *hechos conocidos*, juega con la idea de que son lemas y teoremas que no se necesitarían demostrar en un examen de olimpiada. No obstante, su dificultad va más allá de los problemas tradicionales de esta revista y se acerca a los problemas difíciles de olimpiadas internacionales. En una segunda sección, llamada *problemas olímpicos*, se retoma el formato tradicional de los artículos de esta revista. Dicha sección intenta dar ejemplos concretos de cómo aplicar las ideas que se desarrollaron en el artículo en problemas de distintos concursos de matemáticas.

²Este es un concurso anual organizado por el Comité Organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas y cuya convocatoria se puede consultar en el apartado de actividades bajo el rubro de convocatorias de la página oficial de la OMM: <http://www.ommenlinea.org/>.

Puntos diametralmente opuestos a los puntos de tangencia del incírculo

Sea ABC un triángulo y sean D, E y F los puntos en los que el incírculo del triángulo ABC es tangente a los lados BC, CA y AB , respectivamente. Llamemos G, H e I a los puntos diametralmente opuestos a D, E y F , respectivamente, con respecto al incírculo del triángulo ABC .



Lema. AG, BH y CI concurren.³

Demostración: Denotemos con L, M y N a los puntos de intersección de las rectas AG y BC , las rectas BH y CA y las rectas CI y AB , respectivamente. Sea KJ la tangente al incírculo del triángulo ABC por G , donde K está sobre el lado AB y J está sobre el lado CA . Como G es el punto diametralmente opuesto a D , entonces KJ y BC son paralelas; lo que significa que los triángulos AKJ y ABC son semejantes. Pero G es el punto de tangencia del lado KJ del triángulo AKJ con su excírculo opuesto a A , entonces, L es el punto de tangencia del lado BC del triángulo ABC con su excírculo opuesto a A (por la semejanza de los triángulos AKJ y ABC).

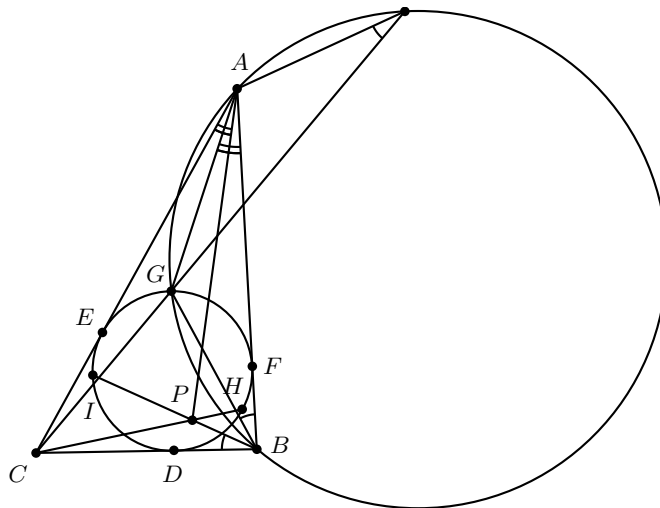
Observemos que, por ser tangentes a una circunferencia (el excírculo del triángulo AKJ) desde un mismo punto, $EA = AF$, $KG = KF$ y $GJ = EJ$. Esto implica que $AK + KJ + JA = EA + AK$, entonces $GJ = EJ = EA - JA = \frac{AK + KJ + JA}{2} - AJ$. La última observación implica que $LC = s - b$ y $BL = s - c$, donde a, b y c son las longitudes de los lados BC, CA y AB , respectivamente, y $s = \frac{a+b+c}{2}$. Análogamente, $CM = s - a$, $MA = s - c$, $AN = s - b$ y $NB = s - a$. Por lo tanto, $\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = \frac{s-b}{s-a} \cdot \frac{s-c}{s-b} \cdot \frac{s-a}{s-c} = 1$, por el teorema de Ceva concluimos que AG, BH y CI concurren.

³Este lema aparece constantemente en la teoría de geometría moderna.

El problema propuesto

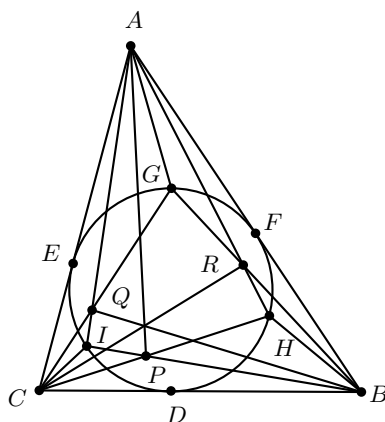
Problema. Denotemos por P, Q y R a los puntos de intersección de las rectas BI y CH , las rectas AI y CG y las rectas AH y BG , respectivamente. Demuestra que las rectas AP, BQ y CR son concurrentes.

Solución: Sabemos que $GD = HE$, por ser diámetros, y que $DC = CE$, por ser tangentes a una circunferencia desde un mismo punto. Además, $\angle GDC = \angle HEC = 90^\circ$, entonces los triángulos GDC y HEC son congruentes, por lo tanto, $\angle DCG = \angle ECH$, es decir, $\angle DCH = \angle ECG = \alpha$. Análogamente, $\angle FBG = \angle DBI = \beta$. Sea S la intersección de la recta CG y el circuncírculo del triángulo ABG .



Como $ASBG$ es cíclico, entonces $\angle ASG = \angle ABG = \beta$. Por lo tanto, $\angle ASC = \angle PBC = \beta$ y $\angle ACS = \angle PCB = \alpha$, esto junto con el criterio AA, implican que los triángulos ACS y PCB son semejantes. Esta última semejanza establece que existe una rotación seguida de una homotecia desde el vértice C que lleva al triángulo ACS al triángulo PCB , entonces $\angle CAP = \angle CSB = \theta$. Pero, por el cíclico $ASBG$, $\angle GAB = \angle GSB = \theta$. Por lo tanto, $\angle CAP = \angle GAB = \theta$.

Si aplicamos este mismo procedimiento a todos los pares de ángulos siguientes, llegamos a que $\angle PAB = \angle CAG$, $\angle ABQ = \angle HBC$, $\angle QBC = \angle ABH$, $\angle BCR = \angle ICA$ y $\angle RCA = \angle BCI$.



El lema y el teorema de Ceva trigonométrico garantizan que

$$\frac{\text{sen}(\angle CAG)}{\text{sen}(\angle GAB)} \cdot \frac{\text{sen}(\angle ABH)}{\text{sen}(\angle HBC)} \cdot \frac{\text{sen}(\angle BCI)}{\text{sen}(\angle ICA)} = 1,$$

pero

$$\frac{\text{sen}(\angle CAG)}{\text{sen}(\angle GAB)} \cdot \frac{\text{sen}(\angle ABH)}{\text{sen}(\angle HBC)} \cdot \frac{\text{sen}(\angle BCI)}{\text{sen}(\angle ICA)} = \frac{\text{sen}(\angle PAB)}{\text{sen}(\angle CAP)} \cdot \frac{\text{sen}(\angle QBC)}{\text{sen}(\angle ABQ)} \cdot \frac{\text{sen}(\angle RCA)}{\text{sen}(\angle BCR)},$$

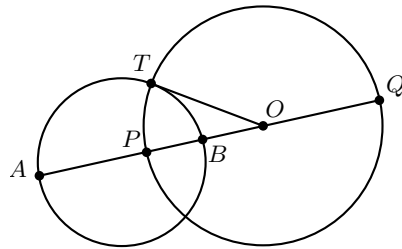
entonces

$$\frac{\text{sen}(\angle CAP)}{\text{sen}(\angle PAB)} \cdot \frac{\text{sen}(\angle ABQ)}{\text{sen}(\angle QBC)} \cdot \frac{\text{sen}(\angle BCR)}{\text{sen}(\angle RCA)} = 1.$$

La última igualdad y el teorema de Ceva trigonométrico nos permiten concluir que AP , BQ y CR son concurrentes.

Recordatorio de inversión

Este capítulo pretende dar un breve recorrido por la teoría básica de inversión. Esta y la siguiente sección se basan en el libro *Circles: A Mathematical View* de Dan Pedoe. Para una revisión más detallada de inversión y problemas introductorios, se puede consultar el libro de *Geometría* de Radmila Bulajich Manfrino y de José Antonio Gómez Ortega. Antes de introducir ¿qué es la inversión?, se repasará la noción de conjuntos armónicos. El ángulo entre dos circunferencias que se intersectan se define como el ángulo entre las dos tangentes a cada circunferencia en el punto de intersección. Dos circunferencias son ortogonales si el ángulo entre ellas es recto. Construir circunferencias ortogales a una circunferencia dada ω es sencillo. En efecto, desde cualquier punto T (fuera de la circunferencia) se puede trazar la tangente a ω y escoger un punto O sobre la tangente. Con centro en O y radio OT se puede construir una circunferencia que será ortogonal a ω , ¿por qué?

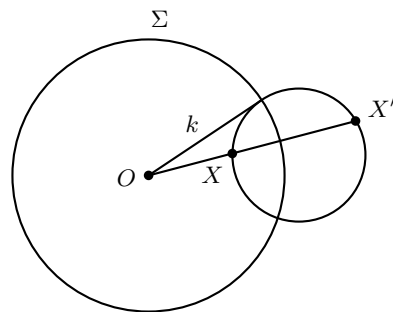


Ahora, sea QP un diámetro de la circunferencia con centro en O . La recta QP interseca a ω en los puntos A y B . Así, la potencia de O con respecto de ω es $OB \cdot OA$, que debe ser igual a OT^2 . Dado que OT es el radio de la segunda circunferencia, se sabe que $OB \cdot OA = OP^2 = OQ^2$. En general, un conjunto de puntos colineales $\{A, B, P, Q\}$ se dirá que es un conjunto armónico si satisface que $OB \cdot OA = OP^2 = OQ^2$, donde O es el punto medio del segmento PQ . A y B se dice que son conjugados armónicos con respecto a P y Q . Se puede mostrar que P y Q son conjugados armónicos con respecto a A y B .

Ejercicio Demuestra que el punto P divide al segmento AB de manera interna en la misma razón que Q divide al segmento AB de manera externa, esto es, que $\frac{AP}{PB} = -\frac{AQ}{QB}$. De la misma forma, demuestra que $\frac{PA}{AQ} = -\frac{PB}{BQ}$.

Ejercicio Demuestra que si cuatro puntos colineales A, B, P, Q satisfacen que el punto P divide al segmento AB de manera interna en la misma razón que Q divide al segmento AB de manera externa, entonces $\{A, B, P, Q\}$ es un conjunto armónico.

La inversión es una transformación uno a uno de los puntos en el plano con respecto a una circunferencia de radio k y de centro O , que uno puede denominar Σ . Para obtener el punto transformado o correspondiente, X' , de un punto dado X , se trazará la recta OX y X' será el punto correspondiente en dicha recta tal que $OX \cdot OX' = k^2$. El punto X' se denominará el inverso de X en la circunferencia Σ . Por definición, el punto O queda excluido de los posibles puntos en el plano que se pueden transformar en Σ .



Ejercicio Demuestra que:

- X es el inverso de X' .
- Los puntos de Σ se transforman en sí mismos.
- Si A y A' son los extremos del diámetro de Σ que pasa por X , entonces los puntos X y X' son conjugados armónicos con respecto a A, A' .

Lema Todas las circunferencias que pasan por X y por X' son ortogonales a Σ .

Demostración Basta con recordar que la potencia de O a cualquier circunferencia que pase por X y por X' es $OX \cdot OX' = k^2$. Así, el punto de intersección de alguna de estas circunferencias Σ' con Σ es el punto de tangencia desde O a Σ' .

Corolario Si \mathcal{C} es una circunferencia ortogonal a Σ , entonces todos los puntos en \mathcal{C} se invierten con respecto a Σ en puntos en \mathcal{C} .

Uno de los problemas centrales en la inversión es encontrar el conjunto de puntos inversos de los puntos de una curva dada \mathcal{C} . Ese conjunto se conoce como el inverso de la curva \mathcal{C} con respecto a Σ . Los siguientes dos teoremas son clásicos y sus demostraciones se dejan como ejercicio al lector.

Teorema El inverso de una circunferencia es una recta o una circunferencia.

Corolario El inverso de una línea recta es una circunferencia que pasa por el centro de inversión.

Teorema El ángulo de intersección de dos circunferencias no se altera bajo la inversión.

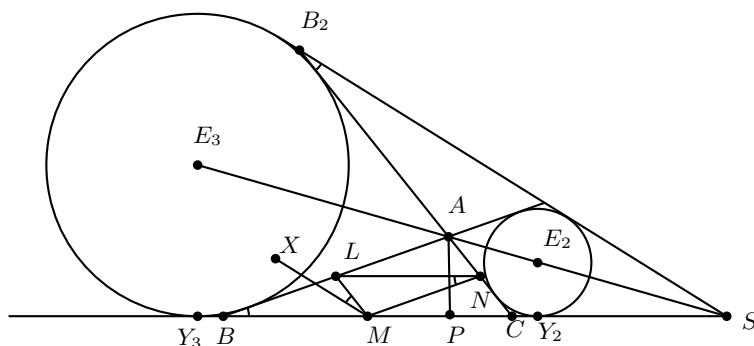
Punto de Feuerbach

Teorema de Feuerbach La circunferencia de los nueve puntos de un triángulo es tangente al incírculo y a los excírculos del triángulo. El punto de tangencia de la circunferencia de los nueve puntos y el incírculo se conoce como el punto de Feuerbach del triángulo ABC . El triángulo que se forma de las intersecciones de la circunferencia de los nueve puntos con los excírculos se conoce como el triángulo de Feuerbach.

Demostración Sea ABC un triángulo. Si se consideran a los excírculos opuestos a B y a C , sean E_2 y E_3 sus centros, respectivamente, y sean Y_2 y Y_3 los puntos de intersección de los excírculos con la recta BC , respectivamente. Sea S el punto de intersección de las tangentes externas de los excírculos con centros E_2 y E_3 .

Ejercicio Demuestra que E_3, A, E_2 y S son puntos colineales.

Ejercicio Demuestra que $\{E_3, E_2, A, S\}$ es un conjunto armónico. Más aún, demuestra que los puntos A y S dividen a E_3E_2 interna y externamente en una proporción igual a la razón entre los radios de los excírculos.



Sea P el pie de la altura del triángulo ABC desde A . Por el ejercicio anterior se sabe que P y S dividen a Y_3Y_2 interna y externamente en una proporción igual a la razón entre los radios de los excírculos. Entonces, $\{Y_3, Y_2, P, S\}$ es un conjunto armónico. Sean L, M y N los puntos medios de BC, CA y AB , respectivamente. Se sabe que $BY_2 = \frac{1}{2}(BC + CA + AB) = CY_3$, de tal forma que L es también el punto medio del segmento Y_3Y_2 . Como $\{Y_3, Y_2, P, S\}$ es un conjunto armónico, entonces

$$LP \cdot LS = LY_2^2 = LY_3^2.$$

Ahora, sea LX la tangente en L a la circunferencia del triángulo LMN , donde X es un punto en el mismo lado de N con respecto de BC . Entonces,

$$\angle XLN = \angle NML = \angle ABC.$$

Sea B_2 el punto de intersección entre la recta AC y la tangente de S al excírculo con centro E_3 distinta de SY_3 . Por simetría, $\angle ABS = \angle AB_2S$. Entonces, $\angle AB_2S = \angle ABC = \angle XLN$. Así, XL es paralela a B_2S .

Para concluir la prueba del teorema será necesario utilizar inversión. La relación $LP \cdot LS = LY_2^2 = LY_3^2$ sugiere aplicar inversión con respecto a la circunferencia con centro en L y radio LY_2 , que se denotará por \mathcal{C} . Así, el inverso de P con respecto a \mathcal{C} es S . La recta XL se invierte en sí misma con respecto de \mathcal{C} y la circunferencia de los nueve puntos se invierte en una recta con respecto de \mathcal{C} , pues ambos pasan por el centro de \mathcal{C} . Como P está en la circunferencia de los nueve puntos, entonces la circunferencia de los nueve puntos se invierte en una recta que pasa por S . Dado que la inversión respeta ángulos, la recta inversa de la circunferencia de los nueve puntos y la recta XL deben ser paralelas. Por tanto, B_2S es el inverso de la circunferencia de los nueve puntos con respecto a \mathcal{C} .

Dado que \mathcal{C} corta a ambos excírculos de manera ortogonal, entonces los excírculos se invierten en sí mismos con respecto a \mathcal{C} . Dado que la recta B_2S interseca en exactamente un punto a los excírculos, entonces la circunferencia de los nueve puntos interseca a los excírculos en exactamente un punto. Por lo tanto, la circunferencia de los

nueve puntos es tangente a los excírculos del triángulo con centros en E_2 y E_3 . De manera análoga se demuestra que la circunferencia de los nueve puntos de un triángulo es tangente al incírculo y a los excírculos del triángulo.

Teorema principal

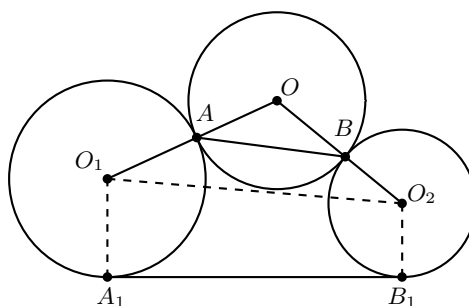
A continuación se darán dos demostraciones de un teorema que se demostró en 2001 por Lev Emelyanov y Tatiana Emelyanova en el artículo *A Note on the Feuerbach Points*. La primera coincide con la demostración original, mientras que la segunda es una demostración de Nguyen Minh Ha y Nguyen Pham Dat. Sin embargo, la segunda demostración supondrá que el lector ya demostró los ejercicios de la segunda parte de la siguiente sección (o que está dispuesto a asumir que son ciertos).

Teorema La circunferencia que pasa por los pies de las bisectrices de un triángulo contiene al punto de Feuerbach del triángulo.

Demostración (Emelyanov y Emelyanova, 2001) Esta demostración se basa en dos observaciones sobre la relación entre el triángulo de los pies de las bisectrices de un triángulo y el triángulo de Feuerbach correspondiente: a) son semejantes y b) están en perspectiva. No obstante, será necesario demostrar primero dos lemas.

Lema 1 Sea \mathcal{C} una circunferencia con centro O y radio R . \mathcal{C} es tangente externamente a las circunferencias \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 en A y en B , respectivamente. Sean O_1 y O_2 los centros de \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 , respectivamente y sean r_1 y r_2 sus respectivos radios. Si A_1B_1 es un segmento de una tangente común a las circunferencias \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 , de tal forma que $A_1 \in \mathcal{C}_1$ y $B_1 \in \mathcal{C}_2$, entonces

$$AB = \frac{R}{\sqrt{(R+r_1)(R+r_2)}} \cdot A_1B_1.$$



Al aplicar la ley de cosenos a los triángulos AOB y O_1OO_2 se obtiene que

$$\cos(\angle AOB) = \frac{2R^2 - AB^2}{2R^2} = 1 - \frac{AB^2}{2R^2}$$

y

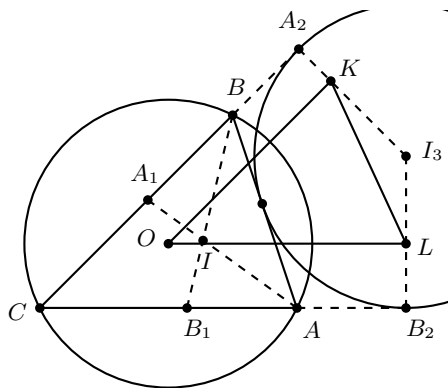
$$\begin{aligned} O_1O_2^2 &= (R + r_1)^2 + (R + r_2)^2 - 2(R + r_1)(R + r_2)(\cos(\angle O_1OO_2)) \\ &= (R + r_1)^2 + (R + r_2)^2 - 2(R + r_1)(R + r_2)\left(1 - \frac{AB^2}{2R^2}\right) \\ &= (r_1 - r_2)^2 + (R + r_1)(R + r_2)\left(\frac{AB}{R}\right)^2. \end{aligned}$$

Dado que A_1O_1 y O_2B_1 son perpendiculares a A_1B_1 , entonces $A_1O_1O_2B_1$ es un trapecio; así $O_1O_2^2 = (r_1 - r_2)^2 + A_1B_1^2$. Al igualar las dos expresiones de $O_1O_2^2$ se obtiene el resultado deseado. \square

Lema 2 Sea ABC un triángulo con circuncentro O y circunradio R . Sea I_3 el excentro opuesto a C y sea r_3 su exradio asociado. Además, sean A_1 y B_1 los pies de las bisectrices desde A y desde B , respectivamente. Si se denotan las longitudes de los lados como $BC = a$, $CA = b$ y $AB = c$, entonces

$$A_1B_1 = \frac{abc\sqrt{R(R + 2r_3)}}{(c + a)(b + c)R}.$$

Demostración



Sean K y L puntos en I_3A_2 y I_3B_2 tales que OK es paralela a CB y OL es paralela a CA . Así, $\angle A_1CB_1 = \angle KOL$. Dado que $CA_2 = CB_2 = \frac{a+b+c}{2}$, entonces

$$OL = \frac{a + b + c}{2} - \frac{b}{2} = \frac{a + c}{2} \quad \text{y} \quad OK = \frac{a + b + c}{2} - \frac{a}{2} = \frac{b + c}{2}.$$

Además, por el teorema de la bisectriz

$$CB_1 = \frac{ab}{c + a} \quad \text{y} \quad CA_1 = \frac{ab}{b + c}.$$

Así,

$$\frac{CB_1}{CA_1} = \frac{b + c}{c + a} = \frac{OK}{OL}.$$

Por lo tanto, los triángulos A_1CB_1 y KOL son semejantes y

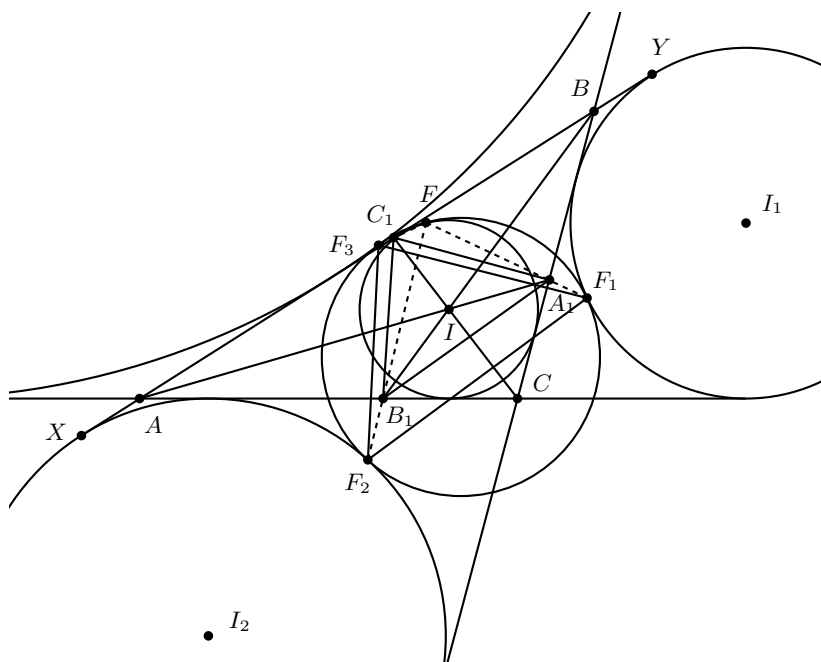
$$\frac{A_1B_1}{LK} = \frac{CB_1}{OK} = \frac{2ab}{(c+a)(b+c)}.$$

Dado que OI_3 es diámetro de la circunferencia por O , L y K , la ley de senos garantiza que

$$LK = OI_3 \cdot \text{sen}(\angle LOK) = OI_3 \cdot \text{sen}(\angle ACB) = OI_3 \cdot \frac{c}{2R}.$$

Si se combinan las dos últimas expresiones de LK con la fórmula de Euler $OI_3^2 = R(R + 2r_3)$, se obtiene la identidad deseada. \square

Ahora se demostrará el teorema principal en dos pasos, como se demarcó al inicio de la demostración.



(a) Se denotará con O al circuncentro, con I al incentro, con I_1 , I_2 e I_3 a los excen-tros, con N al centro de la circunferencia de los nueve puntos y con F , F_1 , F_2 y F_3 a los puntos de Feuerbach; es decir, a los puntos de intersección de la circunferencia de los nueve puntos con el incírculo y con los excírculos, respectivamente. Además, R , r , r_1 , r_2 y r_3 serán el circunradio, el inradio y los exradios, respectivamente. Por último, sean A_1 , B_1 y C_1 los pies de las bisectrices desde A , desde B y desde C , respectivamente. La longitud de la tangente común a los excírculos opuestos a los vértices A y B es

$$XY = AY + BX - AB = \frac{a+b+c}{2} + \frac{a+b+c}{2} - c = a+b,$$

donde X y Y son los puntos de tangencia con los excírculos. Dado que la circunferencia de los nueve puntos tiene radio $\frac{R}{2}$, el lema 1 garantiza que

$$F_1F_2 = \frac{(a+b) \cdot \frac{R}{2}}{\sqrt{\left(\frac{R}{2} + r_1\right)\left(\frac{R}{2} + r_2\right)}} = \frac{(a+b) \cdot R}{\sqrt{(R+2r_1)(R+2r_2)}}.$$

Por el lema 2 se tiene que,

$$\frac{A_1B_1}{F_1F_2} = \frac{abc\sqrt{R(R+2r_1)(R+2r_2)(R+2r_3)}}{(a+b)(b+c)(c+a)R^2}.$$

Por simetría en a , b y c , así como en los exradios y en el circunradio, se tiene que

$$\frac{A_1B_1}{F_1F_2} = \frac{B_1C_1}{F_2F_3} = \frac{C_1A_1}{F_3F_1}.$$

Se sigue que los triángulos $A_1B_1C_1$ y $F_1F_2F_3$ son semejantes.

(b) Se demostrará que los puntos F , B_1 y F_2 son colineales. Por el teorema de Feuerbach, F es el centro de homotecia del incírculo y la circunferencia de los nueve puntos, al tiempo que F_2 es el centro de homotecia interno de la circunferencia de los nueve puntos y el excírculo opuesto al vértice B . Ahora, se sabe que B_1 es el centro de homotecia interno del incírculo y el excírculo opuesto al vértice B . Esos tres centros de homotecia se pueden utilizar para calcular la razones en la que dividen a los lados del triángulo I_2NI :

$$\frac{NF}{FI} = -\frac{R}{2r}, \quad \frac{IB_1}{B_1I_2} = \frac{r}{r_2} \quad \text{y} \quad \frac{I_2F_2}{F_2N} = \frac{2r_2}{R}.$$

Por tanto,

$$\frac{NF}{FI} \cdot \frac{IB_1}{B_1I_2} \cdot \frac{I_2F_2}{F_2N} = -1.$$

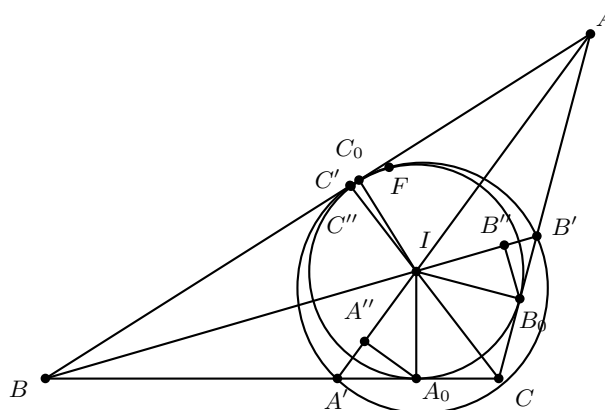
Así, por el teorema de Menelao, se sabe que F , B_1 y F_2 son colineales. De manera análoga se sabe que F , C_1 y F_3 son colineales, al igual que lo son F , A_1 y F_1 . Lo anterior demuestra que los triángulos $A_1B_1C_1$ y $F_1F_2F_3$ están en perspectiva desde F .

De (a) y de (b) se tiene que

$$\angle C_1FA_1 + \angle C_1B_1A_1 = \angle F_3FF_1 + \angle F_3F_2F_1 = 180^\circ,$$

lo cual implica que el circuncírculo del triángulo $A_1B_1C_1$ contiene al punto de Feuerbach F . Con lo que se termina la demostración del teorema.

Demostración (Minh Ha y Pham Dat, 2012) Dado un triángulo ABC , sean I , r y F su incentro, su inradio y su punto de Feuerbach. Por otro lado, sean A_0 , B_0 y C_0 los puntos en que el incírculo del triángulo ABC es tangente a los lados BC , CA y AB , respectivamente. Además, sean A' , B' y C' los puntos de intersección de AI , BI y CI con BC , CA y AB , respectivamente. Por último, sean A'' , B'' y C'' los pies de las perpendiculares desde A_0 , B_0 y C_0 hacia AI , BI y CI , respectivamente.



El inciso (b) del problema 10 y el problema 12 garantizan que F se encuentra en el circuncírculo del triángulo $A''B''C''$. Por otro lado, bajo la inversión en el incírculo del triángulo ABC se tiene que F , A'' , B'' y C'' se transforman en F , A' , B' y C' , respectivamente. Pero, si una circunferencia se transforma bajo una inversión en una circunferencia, entonces F está en el circuncírculo del triángulo $A'B'C'$, como se deseaba.

Hechos clásicos

Esta sección pretende profundizar en la noción de los puntos de Feuerbach y en las relaciones entre la teoría desarrollada con otros temas de geometría moderna como el punto de anti-Steiner. Se plantea como una sección de ejercicios difíciles para los lectores motivados.

Hacia más puntos de Feuerbach

Los siguientes cuatro ejercicios se tomaron del artículo *Some Circles Associated with the Feuerbach Points* de Nguyen Thanh Dung. En estos problemas, dado un triángulo ABC , se denotará con O al circuncentro, con I al incentro, con I_a , I_b e I_c a los excen-tros, con N al centro de la circunferencia de los nueve puntos y con F_e , F_a , F_b y F_c a los puntos de Feuerbach; es decir, a los puntos de intersección de la circunferencia de los nueve puntos con el incírculo y con los excírculos, respectivamente. Además, R , r , r_a , r_b y r_c serán el circunradio, el inradio y los exradios, respectivamente. Por último, sean N_i , N_a , N_b y N_c , los puntos de intersección, diferentes de O , de las rectas OI , OI_a , OI_b y OI_c , respectivamente, con las circunferencias de los triángulos ONF_e , ONF_a , ONF_b y ONF_c , respectivamente.

Problema 1. Demuestra que:

- $OI^2 = R(R - 2r)$.
- $OI_a^2 = R(R + 2r_a)$.

- $II_a^2 = 4R(r_a - r)$.
- El triángulo $I_a I_b I_c$ tiene su circuncentro en la reflexión de I con respecto a O y que dicho triángulo tiene su circunradio de longitud $2R$.

Problema 2. Demuestra que la recta OI interseca por segunda vez a la circunferencia del triángulo ONF_e en el centro de la circunferencia de los nueve puntos del triángulo cuyos vértices son los puntos de tangencia del incírculo con los lados del triángulo ABC .

Problema 3. Demuestra que los puntos O , N , F_a y N_a son concíclicos. De la misma forma, demuestra que O , N , F_b y N_b son concíclicos y que, también, O , N , F_c y N_c lo son.

Problema 4. Demuestra que las cuatro rectas $F_e N_i$, $F_a N_a$, $F_b N_b$ y $F_c N_c$ son concurrentes en un punto sobre la circunferencia de los nueve puntos.

El punto de Feuerbach es un punto de anti-Steiner

Esta parte complementa la demostración con inversión del teorema principal de la sección anterior. Parte de una teoría desarrollada a partir del punto de anti-Steiner. Toda esta teoría se desarrolló en el artículo *Synthetic Proofs of Two Theorems Related to the Feuerbach Point* de Nguyen Minh Ha y Nguyen Pham Dat. En estos problemas, se parte de un triángulo ABC con circuncentro O y con incentro I .

Además, D , E y F serán los puntos en los que el incírculo del triángulo ABC es tangente a los lados BC , CA y AB , respectivamente.

Problema 5. Demuestra que si S es un punto en el circuncírculo del triángulo ABC , entonces las imágenes de S al reflejar con respecto a los ejes BC , CA y AB se encuentran en una misma recta que pasa por el ortocentro del triángulo ABC . Esta recta se conoce como la recta de Steiner de S con respecto al triángulo ABC .

Problema 6. Demuestra que si una recta \mathcal{L} pasa por el ortocentro del triángulo ABC , entonces las imágenes de \mathcal{L} al reflejar con respecto a los ejes BC , CA y AB son concurrentes en un punto sobre el circuncírculo del triángulo ABC . Este punto de concurrencia se conoce como el punto de anti-Steiner de \mathcal{L} con respecto al triángulo ABC .

Problema 7. Sea \mathcal{L} una recta arbitraria. Las paralelas de \mathcal{L} que pasan por A , B y C intersecan al circuncírculo del triángulo ABC en D , E y F , respectivamente. Las rectas \mathcal{L}_a , \mathcal{L}_b y \mathcal{L}_c son las perpendiculares a BC , CA y AB por D , E y F , respectivamente. Demuestra que:

- (a) Las líneas \mathcal{L}_a , \mathcal{L}_b y \mathcal{L}_c concurren en un punto S sobre el circuncírculo del triángulo ABC .
- (b) La recta de Steiner de S con respecto al triángulo ABC es paralela a \mathcal{L} .

Problema 8. Sea \mathcal{L} una recta arbitraria y sean A' , B' y C' los pies de las perpendiculares desde A , B y C hacia \mathcal{L} , respectivamente. Las rectas \mathcal{L}_a , \mathcal{L}_b y \mathcal{L}_c pasan por A' , B' y C' y son perpendiculares a BC , CA y AB , respectivamente. Demuestra que las rectas \mathcal{L}_a , \mathcal{L}_b y \mathcal{L}_c son concurrentes en un punto conocido como el ortopolo de la recta \mathcal{L} con respecto al triángulo ABC .

Problema 9. Sea P un punto arbitrario distinto de O . Demuestra que el ortopolo de la recta OP con respecto al triángulo ABC se encuentra en el circuncírculo del triángulo pedal de P con respecto al triángulo ABC . Recordar que el triángulo pedal de P con respecto al triángulo ABC es el triángulo $A'B'C'$ que tiene por vértices a los pies de las perpendiculares desde P hacia los lados del triángulo ABC .

Problema 10. Sean A_1 , B_1 y C_1 las imágenes de A , B y C , respectivamente, con respecto al centro de simetría O . Además, sean A_2 , B_2 y C_2 las imágenes de O por medio de las reflexiones con los ejes BC , CA y AB , respectivamente. Por último, sean A_3 , B_3 y C_3 los pies de las perpendiculares desde A , B y C hacia las rectas OA_2 , OB_2 y OC_2 , respectivamente. Demuestra que

- (a) Los circuncírculos de los triángulos OA_1A_2 , OB_1B_2 y OC_1C_2 pasan por el punto de anti-Steiner de la recta de Euler del triángulo ABC con respecto del triángulo ABC .
- (b) La circunferencia del triángulo $A_3B_3C_3$ también pasa por el mismo punto de anti-Steiner.

Problema 11. Considera un conjunto de puntos $\{A, B, C, D\}$ en posición general; es decir, que cualesquiera tres no son colineales. Demuestra que todas las circunferencias de los nueve puntos de los triángulos BCD , CDA , DAB y ABC pasan por un mismo punto.

Problema 12. Sean D , E y F los puntos en los que el incírculo del triángulo ABC es tangente a los lados BC , CA y AB , respectivamente. Demuestra que el punto de Feuerbach del triángulo ABC es el punto de anti-Steiner de la recta de Euler del triángulo DEF con respecto al triángulo DEF .

Problemas olímpicos

1. Sea ABC un triángulo con incentro I y circuncentro O . Prueba que la línea IO pasa por el centroide del triángulo cuyos vértices son los puntos de tangencia del incírculo con los lados del triángulo ABC .
2. (NIMO, 2014) Sea ABC un triángulo con incentro I y sean D , E y F los puntos en los que el incírculo del triángulo ABC es tangente a los lados BC , CA y AB , respectivamente. Sea Q un punto tal que AB y AC son perpendiculares a QB y a QC , respectivamente. Si la recta QI interseca a EF en el punto P , prueba que DP es perpendicular a EF .
3. (Lista corta de la IMO, 1997) Sea $A_1A_2A_3$ un triángulo no isósceles con incentro I . Sea C_i , con $i = 1, 2, 3$, el menor círculo por I que es tangente a A_iA_{i+1}

y a $A_i A_{i+2}$ (donde los índices se toman módulo 3). Sea B_i , con $i = 1, 2, 3$, el segundo punto de intersección de C_{i+1} y de C_{i+2} . Demuestra que los circuncenros de los triángulos $A_1 B_1 I$, $A_2 B_2 I$ y $A_3 B_3 I$ son colineales.

4. (Punto de Poncelet) Dado un conjunto de cuatro puntos en posición general, $\{W, X, Y, Z\}$, demuestra que las circunferencias de los nueve puntos de los triángulos formados por tres puntos del conjunto concurren en un punto que se denomina el punto de Poncelet. Observa que el punto de Feuerbach es el punto de Poncelet del conjunto $\{A, B, C, I\}$.
5. (Incírculo polar) Sea ABC un triángulo con incentro I y sean D, E y F los puntos en los que el incírculo del triángulo ABC es tangente a los lados BC, CA y AB , respectivamente. Las rectas EF y BC se intersecan en K . Demuestra que IK es perpendicular a AD .
6. (Lista corta de la IMO, 2005) Sea ABC un triángulo y sea M el punto medio del lado BC . Sea ω el incírculo del triángulo ABC . La mediana AM del triángulo ABC interseca a ω en los puntos K y L . Las líneas que pasan por K y L que son paralelas a BC intersecan nuevamente a ω en los puntos X y Y . Las rectas AX y AY intersecan a BC en los puntos P y Q . Demuestra que $BP = CQ$.
7. (Examen de Selección del Equipo de Estados Unidos de América para la IMO, 2015) Sea ABC un triángulo escaleno con incentro I y sean D, E y F los puntos en los que el incírculo del triángulo ABC es tangente a los lados BC, CA y AB , respectivamente. Se denota con M al punto medio de BC y con P al punto en el interior del triángulo ABC tal que $MD = MP$ y $\angle PAB = \angle PAC$. Sea Q un punto en el incírculo tal que $\angle AQD = 90^\circ$. Demuestra que $\angle PQE = 90^\circ$ o $\angle PQF = 90^\circ$.
8. (Concurso Nacional de Estados Unidos de América, 2007) Sea ABC un triángulo acutángulo donde ω, S y R representan su incírculo, su circuncírculo y el radio de su circuncírculo, respectivamente. La circunferencia ω_A es tangente internamente a S en A y es tangente externamente a ω . La circunferencia Ω_A es tangente internamente a S en A y es tangente internamente a ω .

Sean P_A y Q_A los centros de ω_A y de Ω_A , respectivamente. Se definen los puntos P_B, Q_B, P_C y Q_C de manera análoga. Demuestra que

$$8P_A Q_A \cdot P_B Q_B \cdot P_C Q_C \leq R^3,$$

con la igualdad si y solo si el triángulo ABC es equilátero.

9. (Examen de Selección del Equipo de Irán para la IMO, 2009) Sea ABC un triángulo con incentro I y sean D, E y F los puntos en los que el incírculo del triángulo ABC es tangente a los lados BC, CA y AB , respectivamente. Sea M el pie de la perpendicular desde D hacia EF y sea P el punto medio de DM . Si H es el ortocentro del triángulo BIC , demuestra que PH bisecta al segmento EF .

10. (Examen de Selección del Equipo de Taiwán para la IMO, 2014) En un triángulo escaleno ABC con incentro I , el incírculo es tangente a los lados CA y AB en los puntos E y F , respectivamente. Las tangentes al circuncírculo del triángulo AEF desde E y desde F se intersectan en S . Las rectas EF y BC se intersectan en T . Demuestra que la circunferencia con diámetro ST es ortogonal a la circunferencia de los nueve puntos del triángulo BIC .

Bibliografía

- 1) Bulajich Manfrino, Radmila, Gómez Ortega, J. A. *Geometría*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2002.
- 2) Chen, Evan. *Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads*, Washington, The Mathematical Association of America, MAA Problem Book Series, 2016.
- 3) Djukic, Dusan. *Inversion*, The IMO Compendium Group, Olympiad Training Materials, 2007, disponible en: <http://www.imomath.com/>.
- 4) Emelyanov, Lev y Tatiana Emelyanova. *A Note on the Feuerbach Points*, Forum Geometricorum, Vol. 1, 2001, 121-124.
- 5) Minh Ha, Nguyen y Nguyen Pham Dat. *Synthetic Proofs of Two Theorems Related to the Feuerbach Point*, Forum Geometricorum, Vol. 12, 2012, 39-46.
- 6) Pedoe, Dan. *Circles: A Mathematical View*, Washington, The Mathematical Association of America, Spectrum Series, 1995.
- 7) Thanh Dung, Nguyen. *Some Circles Associated with Feuerbach Points*, Forum Geometricorum, Vol. 14, 2014, 403-408.