Problemas sobre dígitos

Por Emerson Lucas Soriano Pérez y Carlos Jacob Rubio Barrios

Nivel Avanzado

En la olimpiada de matemáticas, es común que aparezcan problemas que involucran a la suma o al producto de los dígitos de un entero positivo. Si n es un entero positivo, comúnmente se denota por $s(n)$ a la suma de los dígitos de n, por $c(n)$ al número de dígitos de n y por $p(n)$ al producto de los dígitos de n. Comenzamos con un problema de la olimpiada Rusa de 1998.

Ejemplo 1. *¿Existen tres enteros positivos a, b y c tales que $s(a+b) < 5$, $s(b+c) < 5$, $s(a+c) < 5$ y $s(a+b+c) > 50$?*

La respuesta es sí. Supongamos que a, b y c son enteros que satisfacen las relaciones del problema. Entonces, tenemos que cada uno de los números $a+b$, $b+c$ y $a+c$ tiene suma de dígitos a lo más 4. Por lo tanto, su suma, $(a+b)+(b+c)+(a+c) = 2(a+b+c)$ tiene suma de dígitos a lo más 12. Por otro lado, su mitad igual a $a+b+c$ tiene suma de dígitos al menos 51. La única forma en que esto puede suceder es que $a+b+c$ tenga o bien diez 5's y un 1 o bien nueve 5's y un 6. En el primer caso, podemos tomar $a+b+c = 105555555555$ y $2(a+b+c) = 211111111110$ (hay otras posibilidades). Si cada uno de $a+b$, $b+c$ y $a+c$ tiene suma de dígitos igual a 4, como deben sumar $2(a+b+c)$, no puede haber acarreos. Una posibilidad es

$$a+b = 100001110000, \ b+c = 11110000000, \ c+a = 100000001110.$$

De aquí, obtenemos que

$$\begin{aligned} a &= 105555555555 - 11110000000 = 94445555555, \\ b &= 105555555555 - 100000001110 = 5555554445, \\ c &= 105555555555 - 100001110000 = 5554445555, \end{aligned}$$

satisfacen las condiciones del problema.

A continuación veremos algunas propiedades de $s(n)$, $c(n)$ y $p(n)$, así como su aplicación en diversos problemas de olimpiada.

Uso de desigualdades

Teorema 1. *Si n es un entero positivo, entonces*

$a)$ $s(n) \leqslant 9c(n)$,

$b)$ $s(n) \leqslant n$,

$c)$ $p(n) \leqslant n$.

Prueba.

$a)$ Cada dígito de n es menor o igual que 9, entonces, como n tiene $c(n)$ dígitos, la suma de todos ellos es menor o igual que $9c(n)$; esto es, $s(n) \leq 9c(n)$. No es difícil darse cuenta que la igualdad solo es posible cuando todos los dígitos de n son iguales a 9.

$b)$ Consideremos la descomposición decimal del número n:

$$n = \sum_{i=0}^{c(n)-1} a_i \cdot 10^i. \tag{1}$$

Notemos que $a_j \cdot 10^j \geq a_j$ para todo entero no negativo j. Por lo tanto,

$$s(n) = \sum_{i=0}^{c(n)-1} a_i \leqslant \sum_{i=0}^{c(n)-1} a_i \cdot 10^i = n.$$

Así, $s(n) \leqslant n$ con la igualdad si y solo si $c(n) = 1$.

$c)$ Si $c(n) = 1$, claramente la propiedad se cumple, pues en este caso $p(n) = n$, y en consecuencia $p(n) \leq n$. Ahora, analizaremos para $c(n) \geq 2$. En efecto, como cada uno de los dígitos de n es menor o igual que 9, tenemos que

$$a_0 \cdot a_1 \cdots a_{c(n)-2} \leqslant 9^{c(n)-1} < 10^{c(n)-1}. \tag{2}$$

Luego, observando la descomposición decimal de n en (1), tenemos que

$$n \geqslant a_{c(n)-1} \cdot 10^{c(n)-1}. \tag{3}$$

De (2) y (3), se sigue que

$$n \geqslant a_{c(n)-1} \cdot 10^{c(n)-1} > a_{c(n)-1} \cdot a_{c(n)-2} \cdots a_1 \cdot a_0 = p(n).$$

Por lo tanto, $p(n) \leq n$ con la igualdad si y solo si $c(n) = 1$. $\square$

Ejemplo 2. *(Selectivo Argentina - Cono Sur 2006). Hallar todos los enteros positivos n tales que $p(n) = \frac{25}{8}n - 211$.*

Solución. Sabemos que el número $p(n)$ es un entero, así, el número $\frac{25}{8}n-211$ también lo es. Esto implica que n es divisible por 8. También sabemos que $p(n) \geq 0$, por lo tanto

$$\frac{25}{8}n - 211 \geqslant 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad n \geqslant 68. \tag{4}$$

Por el Teorema 1-c), tenemos que

$$\frac{25}{8}n - 211 \leq n \qquad \Leftrightarrow \qquad n \leq 99. \tag{5}$$

De (4) y (5) se sigue que $68 \leqslant n \leqslant 99$. Como n es divisible por 8, tenemos que $n \in \{72, 80, 88, 96\}$. Luego, comprobando esos cuatro números en la igualdad $p(n) = \frac{25}{8}n - 211$, notamos que solo se cumple para $n = 72$ y $n = 88$. Por lo tanto, los únicos números que cumplen son 72 y 88. □

Teorema 2. *Si n es un entero positivo, entonces*

$$10^{c(n)-1} \leqslant n < 10^{c(n)}.$$

Prueba. Sea A el conjunto de todos los enteros positivos que tienen exactamente $c(n)$ dígitos. Es claro que A es un conjunto acotado[2]. Es fácil darse cuenta que el menor elemento de A es

$$1\underbrace{000\cdots00}_{c(n)-1 \text{ veces}} = 10^{c(n)-1},$$

y que el mayor elemento de A es

$$\underbrace{999\cdots99}_{c(n) \text{ veces}} = 10^{c(n)} - 1.$$

Como n tiene $c(n)$ dígitos, entonces n es elemento de A, y esto implica que n es mayor o igual que el menor elemento de A y menor o igual que el mayor elemento de A, esto es,

$$10^{c(n)-1} \leqslant n < 10^{c(n)},$$

como queríamos probar. □

Ejemplo 3. *Hallar todos los enteros positivos que son iguales a seis veces la suma de sus dígitos.*

Solución. Sea n un entero positivo que cumple dicha propiedad. Lo primero que debemos averiguar es la cantidad de dígitos de n. Por el Teorema 2, tenemos que

$$10^{c(n)-1} \leq n. \tag{6}$$

Por hipótesis tenemos que $n = 6s(n)$, de modo que por el Teorema 1-a) resulta que,

$$n \leq 6(9c(n)) = 54c(n). \tag{7}$$

[2]Un conjunto $B \subset \mathbb{R}$ es acotado si y solo si existen números reales m y M tales que $m \leqslant x \leqslant M$ para todo $x \in B$.

De (6) y (7) tenemos que $10^{c(n)-1} \leqslant 54c(n)$. Es fácil probar que la función $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ definida por $f(n) = 10^{n-1} - 54n$ es estrictamente creciente[3] para todo $n \geq 2$. En efecto, notemos que $f(n+1) - f(n) = 9(10^{n-1} - 6)$. Como $10^{n-1} \geq 10 > 6$ para todo entero $n \geq 2$, la desigualdad

$$f(n+1) - f(n) = 9(10^{n-1} - 6) > 0,$$

es verdadera para todo entero $n \geqslant 2$. Esto es suficiente para garantizar que la función f es estrictamente creciente para $n \geqslant 2$. Como $f(3) = -62 < 0$ y $f(4) = 784 > 0$, entonces $f(n) > 0$ para todo entero $n \geq 4$. Esto indica que la desigualdad $10^{c(n)-1} \leqslant 54c(n)$ solo es cierta cuando $c(n) \in \{1, 2, 3\}$. Por lo tanto, n puede tener uno, dos o tres dígitos.

- Si n tiene un dígito, entonces $s(n) = n$, pero según el problema debe cumplirse que $s(n) = 6n$, entonces $n = 6n$. Esto implica que $n = 0$, lo cual es absurdo pues $n > 0$.

- Si n tiene dos dígitos, entonces es de la forma $n = \overline{ab}$. Según el problema, debe cumplirse que $\overline{ab} = 6(a + b)$, entonces $10a + b = 6a + 6b$, esto es, $4a = 5b$. Esto indica que a es un dígito múltiplo de 5, pero como $a \neq 0$, entonces $a = 5$. Por lo tanto, $b = 4$ y $n = 54$.

- Si n tiene tres dígitos, entonces es de la forma $n = \overline{abc}$. Según el problema, se tiene que $\overline{abc} = 6(a+b+c)$, entonces $\overline{abc} = 6(a+b+c)$, esto es, $94a+4b = 5c$. Como $a \geqslant 1$, entonces $5c \geqslant 94 \cdot 1 + 4 \cdot 0 = 94$, esto es, $c \geqslant 19$, lo cual es un absurdo pues $c < 10$.

Por lo tanto, el único número que cumple es 54. $\square$

Ejemplo 4. *(Cono Sur 2016). Hallar todos los enteros positivos n tales que*

$$s(n)(s(n) - 1) = n - 1.$$

Solución. Primero analizaremos las posibles congruencias de n módulo 9. Como $s(n) \equiv n \pmod 9$, tenemos que

$$s(n)\,(s(n) - 1) \equiv n(n - 1) \pmod 9.$$

Por lo tanto, $n-1 \equiv n(n-1) \pmod 9$. Desarrollando y simplificando, esta congruencia es equivalente a $(n-1)^2 \equiv 0 \pmod 9$. De aquí que $n \equiv 1$, 4 o $7 \pmod 9$.
Por el Teorema 2, tenemos que $n - 1 \geq 10^{c(n)-1} - 1$. Usando esta desigualdad y el Teorema 1-a), tenemos que

$$10^{c(n)-1} - 1 \leqslant n - 1 = s(n)\,(s(n) - 1) \leqslant 9c(n)\,(9c(n) - 1)\,,$$

esto es, si n cumple las condiciones del problema, entonces se debe cumplir la desigualdad

$$10^{c(n)-1} - 1 \leqslant 9c(n)(9c(n) - 1). \tag{8}$$

[3]Una función f definida en el conjunto no vacío A es estrictamente creciente si para todo $x, y \in A$, $x > y$ implica que $f(x) > f(y)$.

Consideremos la función $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida como sigue:

$$f(n) = 10^{n-1} - 1 - 9n(9n-1) = 10^{n-1} - 81n^2 + 9n - 1.$$

Demostraremos que la función f es estrictamente creciente para $n \geq 4$. Consideremos la función $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por

$$g(n) = \frac{f(n+1) - f(n)}{9} = 10^{n-1} - 18n + 10.$$

Para probar que f es estrictamente creciente para $n \geq 4$, demostraremos por inducción en n que $g(n) > 0$ para todo entero $n \geq 4$.
Notemos que $g(4) = 10^{4-1} - 18 \cdot 4 + 10 = 938 > 0$. Si existe un entero $n \geqslant 4$ tal que $g(n) > 0$, entonces $10^{n-1} > 18n - 10$. Multiplicando por 10 a ambos miembros de la última desigualdad, tenemos que $10^n > 180n - 100$, pero como $n \geq 4$, entonces $180n - 100 > 18(n+1) - 10$, por lo tanto, $10^{n+1} > 18(n+1) - 10$, que es equivalente a afirmar que $g(n+1) > 0$, completando la inducción.
Luego, como $f(4) = -261 < 0$ y $f(5) = 8019 > 0$, entonces podemos concluir que $f(n) > 0$ para todo $n \geq 5$. Así, la desigualdad en (8) solo es cierta cuando $c(n) \in \{1, 2, 3, 4\}$.

- Si $c(n) = 1$, entonces $s(n) = n$ y esto implica que $n(n-1) = n - 1$, es decir, $n = 1$.

- Si $c(n) = 2$, entonces n es de la forma $n = \overline{ab}$. Reemplazando en la ecuación original, tenemos que

$$(a+b)(a+b-1) = \overline{ab} - 1 \quad \Leftrightarrow \quad (a+b-1)^2 = 9a.$$

  Esto indica que a es un dígito no nulo y que es un cuadrado perfecto, es decir, $a \in \{1, 4, 9\}$. Si $a = 1$, entonces $b = 3$. Si $a = 4$, entonces $b = 3$. Si $a = 9$, entonces $b = 1$. Por lo tanto, en este caso los valores de n son 13, 43 y 91.

- Si $c(n) = 3$, entonces $s(n) \leq 27$ y $n - 1 \geq 99$. Por lo tanto,

$$s(n)\,(s(n) - 1) = n - 1 \geq 99.$$

  Puesto que,

$$s(n)\,(s(n) - 1) \geq 99 \quad \Leftrightarrow \quad s(n) \geq 11,$$

  obtenemos la desigualdad $11 \leqslant s(n) \leqslant 27$. No obstante, como $s(n) \equiv 1, 4$ o $7 \pmod 9$, entonces $s(n) \in \{13, 16, 19, 22, 25\}$. Verificando cada uno de estos cinco valores en la ecuación original, vemos que solo cumple $s(n) = 13$, pues reemplazando obtenemos que $n = 157$ y que la suma de los dígitos de 157 es $1 + 5 + 7 = 13$.

- Si $c(n) = 4$, entonces $n - 1 \geq 999$, por lo tanto

$$s(n)\,(s(n) - 1) = n - 1 \geq 999.$$

Así, $s(n) \geq 33$. Notemos que $s(n) \leq 36$, pues n tiene cuatro dígitos, en consecuencia tenemos las desigualdades $33 \leq s(n) \leq 36$. Como $s(n) \equiv 1, 4$ o $7 \pmod 9$, necesariamente $s(n) = 34$; pero reemplazando en la ecuación original, obtenemos que $n = 1157$, lo cual es un absurdo, pues la suma de los dígitos de 1157 no es 34.

Por lo tanto, los valores de n son 1, 13, 43, 91 y 157. $\square$

Teorema 3. *Si m y n son enteros positivos, entonces $s(m+n) \leq s(m) + s(n)$.*

Prueba. Consideremos las representaciones decimales de m y n:

$$\begin{aligned} m &= a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \cdots + a_{c(m)-1} \cdot 10^{c(m)-1}, \\ n &= b_0 + b_1 \cdot 10 + b_2 \cdot 10^2 + \cdots + b_{c(n)-1} \cdot 10^{c(n)-1}. \end{aligned}$$

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $c(m) \geq c(n)$. Definamos $x_i = a_i + b_i$. Si $c(m) > c(n)$, consideramos $b_j = 0$ para todo $c(n) \leq j \leq c(m) - 1$.
Notemos que,

$$m + n = x_0 + x_1 \cdot 10 + x_2 \cdot 10^2 + \cdots + x_{c(m)-1} \cdot 10^{c(m)-1}. \tag{9}$$

Si $x_i \leq 9$ para todo $0 \leq i \leq c(m) - 1$, entonces la igualdad en (9) es la representación decimal de $m + n$; en consecuencia, tenemos que $s(m+n) = s(m) + s(n)$. De lo contrario, existe j tal que $x_j > 9$; consideramos que j es el menor de todos. Así, debemos hacer una corrección en la igualdad en (9) para obtener la representación, pues necesitamos la representación decimal de $m + n$ y poder calcular la suma de sus dígitos. Entonces, por ahora, a x_j le debemos quitar 10 unidades para que pueda ser un dígito de la base decimal y después agregar una unidad a x_{j+1}:

$$m + n = x_0 + x_1 \cdot 10 + \cdots + (x_j - 10) \cdot 10^j + (x_{j+1} + 1) \cdot 10^{j+1} + \cdots \tag{10}$$

Notemos que al corregir una vez la igualdad en (9), la suma $s(m) + s(n)$ disminuye en 10 y aumenta en 1 al mismo tiempo, es decir, $s(m) + s(n)$ disminuye en 9 unidades en total. Procedemos a hacer lo mismo en (10), buscamos el menor j tal que $x_j > 9$ y corregimos de la misma manera que en el paso anterior. Supongamos que este proceso se repitió en total k veces hasta que se logró obtener la representación decimal de $m+n$, entonces la suma de los dígitos de $m+n$ es igual a $s(m)+s(n)-9k$, es decir, $s(m+n) \leq s(m)+s(n)-9k$. Luego, como $k \geq 1$, entonces $s(m+n) < s(m)+s(n)$. Por lo tanto, $s(m+n) \leq s(m) + s(n)$ y la igualdad ocurre si y solo si al sumar los números m y n de la forma usual (por columnas), no hay acarreo. $\square$

Corolario 1. *Si $n \geqslant 2$ y $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son enteros positivos, entonces*

$$s(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \leq s(a_1) + s(a_2) + \cdots + s(a_n).$$

Prueba. La demostración será por inducción en n. Para $n = 2$ ya está demostrado, pues es el Teorema 3. Supongamos que este resultado es válido para algún número entero $\ell \geq 2$, demostraremos que el resultado también es válido para $\ell + 1$. En efecto, sean $a_1, a_2, \ldots, a_\ell, a_{\ell+1}$ enteros positivos arbitrarios. Por el Teorema 3, tenemos que

$$s(a_1 + a_2 + \cdots + a_\ell + a_{\ell+1}) \leq s(a_1 + a_2 + \cdots + a_\ell) + s(a_{\ell+1}), \tag{11}$$

y como supusimos que el resultado es válido para ℓ, entonces

$$s(a_1 + a_2 + \cdots + a_\ell) \leq s(a_1) + s(a_2) + \cdots + s(a_\ell). \tag{12}$$

Luego, de (11) y (12), deducimos que

$$s(a_1 + a_2 + \cdots + a_\ell + a_{\ell+1}) \leqslant s(a_1) + s(a_2) + \cdots + s(a_\ell) + s(a_{\ell+1}),$$

con la igualdad si y solo si al sumar los números $a_1, a_2, \ldots, a_\ell, a_{\ell+1}$, no hay acarreo. $\square$

Corolario 2. *Si a y b son enteros positivos, entonces $s(ab) \leqslant as(b)$.*

Prueba. Por el Corolario 1, tenemos que

$$s(ab) = s(\underbrace{b + b + \cdots + b}_{a \text{ veces}}) \leq \underbrace{s(b) + s(b) + \cdots + s(b)}_{a \text{ veces}} = as(b),$$

esto es, $s(ab) \leq as(b)$. $\square$

Comentario. Cabe mencionar que en este corolario, la igualdad ocurre si y solo si al sumar los a números b, no hay acarreo. Dicho de otro modo, si k es un dígito de b, entonces $ak \leqslant 9$, esto es, $k \leq \frac{9}{a}$.

Teorema 4. *Si a y b son enteros positivos, entonces $s(ab) \leq s(a)s(b)$.*

Prueba. Notemos que $s(10^j \cdot m) = s(m)$ para cualesquiera enteros positivos m y j. Ahora, consideremos la representación decimal de a:

$$a = x_0 + x_1 \cdot 10 + x_2 \cdot 10^2 + \cdots + x_{c(a)-1} \cdot 10^{c(a)-1}.$$

Entonces,

$$ab = (bx_0) + (bx_1) \cdot 10 + (bx_2) \cdot 10^2 + \cdots + (bx_{c(a)-1}) \cdot 10^{c(a)}.$$

Por el Corolario 1, tenemos que

$$s(ab) \leq \sum_{i=0}^{c(a)-1} s(bx_i \cdot 10^i) = \sum_{i=0}^{c(a)-1} s(bx_i). \tag{13}$$

Por el Corolario 2, tenemos que

$$\sum_{i=0}^{c(a)-1} s(bx_i) \leqslant \sum_{i=0}^{c(a)-1} x_i s(b) = \left(\sum_{i=0}^{c(a)-1} x_i \right) s(b) = s(a)s(b). \tag{14}$$

De (13) y (14), se sigue el resultado. La igualdad ocurre si y solo si se cumplen las siguientes dos condiciones de manera simultánea:

- Cada dígito r de b, cumple que $rx_i \leqslant 9$, para todo $i = 0, 1, \ldots, c(a) - 1$.
- Al sumar los números $(bx_0), (bx_1) \cdot 10, \ldots, (bx_{c(a)-1}) \cdot 10^{c(a)}$, no hay acarreo.

En conclusión, para que se tenga que $s(ab) = s(a)s(b)$, entonces al multiplicar a y b de la manera usual, en ningún momento del proceso debe haber acarreo. □

Ejemplo 5. *Sea n un entero positivo.*

$a)$ *Determinar el mayor valor que puede tomar la expresión* $\dfrac{s(n)}{s(2n)}$.

$b)$ *Determinar el mayor valor que puede tomar la expresión* $\dfrac{s(n)}{s(4n)}$.

Solución. $a)$ Usando el Teorema 4, tenemos que

$$s(10n) = s(5 \cdot 2n) \leqslant s(5)s(2n) = 5s(2n).$$

Pero, como $s(10n) = s(n)$, entonces $s(n) \leqslant 5s(2n)$. Así, $\frac{s(n)}{s(2n)} \leqslant 5$. Es claro que podemos conseguir la igualdad haciendo $n = 5$. Por lo tanto, el mayor valor que puede tomar la expresión $\frac{s(n)}{s(2n)}$ es 5.

$b)$ Usando el Teorema 4, tenemos que

$$s(100n) = s(25 \cdot 4n) \leq s(25)s(4n) = 7s(4n).$$

No obstante, como $s(100n) = s(n)$, entonces $s(n) \leqslant 7s(4n)$. En consecuencia, $\frac{s(n)}{s(4n)} \leqslant 7$ y la igualdad es posible conseguirla haciendo $n = 25$. Por lo tanto, el mayor valor que puede tomar la expresión $\frac{s(n)}{s(4n)}$ es 7.

□

Ejemplo 6. *(Lista corta, IMO 2016). Determinar todos los polinomios $P(x)$ con coeficientes enteros tales que para cualquier entero positivo $n \geq 2016$, el entero $P(n)$ es positivo y $s(P(n)) = P(s(n))$.*

Solución. La respuesta es $P(x) = c$ donde $1 \leq c \leq 9$ es un entero o $P(x) = x$.
Consideraremos tres casos de acuerdo con el grado de P.
Caso 1: $P(x)$ es un polinomio constante. Sea $P(x) = c$ donde c es un entero. Entonces, la igualdad del problema es en este caso $s(c) = c$. Esto se cumple si y solo si $1 \leq c \leq 9$.
Caso 2: El grado de P es 1. Supongamos que $P(x) = ax + b$ para algunos enteros a y b donde $a \neq 0$. Como $P(n)$ es positivo para valores de n suficientemente grandes, debemos tener que $a \geq 1$. La igualdad del problema en este caso es $s(an + b) = as(n) + b$ para todo $n \geq 2016$. Haciendo $n = 2025$ y $n = 2020$ respectivamente, obtenemos que

$$s(2025a + b) - s(2020a + b) = (as(2025) + b) - (as(2020) + b) = 5a.$$

Por otra parte, de acuerdo con el Teorema 3, tenemos que

$$s(2025a + b) = s((2020a + b) + 5a) \leq s(2020a + b) + s(5a).$$

Esto implica que $5a \leq s(5a)$. Como $a \geq 1$, la desigualdad anterior se cumple cuando $a = 1$, en cuyo caso la igualdad del problema se reduce a $s(n + b) = s(n) + b$ para todo $n \geq 2016$. Entonces, tenemos que

$$s(n+1+b) - s(n+b) = (s(n+1)+b) - (s(n)+b) = s(n+1) - s(n). \quad (15)$$

Si $b > 0$, elegimos n tal que $n + 1 + b = 10^k$ para algún entero k suficientemente grande. Note que todos los dígitos de $n + b$ son nueves, de modo que el lado izquierdo de (15) es igual a $1 - 9k$. Como n es un entero positivo menor que $10^k - 1$, tenemos que $s(n) < 9k$. Por lo tanto, el lado derecho de (15) es al menos $1-(9k-1) = 2-9k$, lo que es una contradicción.
El caso $b < 0$ se puede descartar de manera análoga considerando $n + 1$ como una potencia grande de 10.
Finalmente, es fácil ver que $P(x) = x$ satisface trivialmente la igualdad del problema, de manera que es la única solución en este caso.
Caso 3: El grado de P es mayor o igual que 2. Supongamos que el término principal de P es $a_d x^d$ donde $a_d \neq 0$. Es claro que $a_d > 0$. Consideremos $n = 10^k - 1$ en la igualdad del problema. Entonces, $s(P(n)) = P(9k)$. Notemos que $P(n)$ crece asintóticamente tan rápido como n^d, de manera que $s(P(n))$ crece asintóticamente no más rápido que un múltiplo constante de k. Por otro lado, $P(9k)$ crece asintóticamente tan rápido como k^d. Esto muestra que ambos lados de la última igualdad no pueden ser iguales para valores de k suficientemente grandes ya que $d \geq 2$.
Por lo tanto, concluimos que $P(x) = c$ donde $1 \leq c \leq 9$ es un entero o $P(x) = x$. $\square$

Ejemplo 7. *(Rusia 1999). Si n es un entero positivo tal que $s(n) = 100$ y $s(44n) = 800$, calcular el valor de $s(3n)$.*

Solución. Por el Teorema 4, tenemos que

$$800 = s(44n) \leq s(44)s(n) = 8s(n) = 8 \cdot 100 = 800.$$

Como en la desigualdad de arriba se da la igualdad, entonces para cualquier dígito k de n, se debe cumplir que $4k \leqslant 9$, o sea $k = 0$, 1 o 2. Luego, si k es un dígito cualquiera de n, entonces $3k$ es menor que 9; en consecuencia, $s(3n) = 3s(n) = 3 \cdot 100 = 300$. $\square$

Ejemplo 8. *Si $n > 0$ es un entero tal que $s(n) = 2$, ¿cuál es el mayor valor de $s(n^{10})$?*

Solución. Si $s(n) = 2$, entonces existen enteros no negativos x_1 y x_2 (no necesariamente distintos), tales que $n = 10^{x_1} + 10^{x_2}$. Luego,

$$n^{10} = \sum_{j=0}^{10} \binom{10}{j} \cdot 10^{(10-j)x_1 + jx_2}. \quad (16)$$

Usando el Teorema 3 en (16), tenemos que

$$s(n^{10}) \leq \sum_{j=0}^{10} s\left(\binom{10}{j} \cdot 10^{(10-j)x_1 + jx_2}\right) = \sum_{j=0}^{10} s\left(\binom{10}{j}\right). \quad (17)$$

Puesto que $\binom{10}{j} = \binom{10}{10-j}$ para todo $j = 0, 1, \ldots, 10$, tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{10} s\left(\binom{10}{j}\right) &= 2\sum_{j=0}^{4} s\left(\binom{10}{j}\right) + s\left(\binom{10}{5}\right) \\ &= 2[s(1) + s(10) + s(45) + s(120) + s(210)] + s(252) \\ &= 2(1 + 1 + 9 + 3 + 3) + 9 \\ &= 43\end{aligned} \tag{18}$$

Por lo tanto, de (17) y (18) se sigue que $s(n^{10}) \leq 43$. Para demostrar que efectivamente 43 es el mayor valor de $s(n^{10})$, basta tomar $n = 11$, pues $11^{10} = 25937424601$ y la suma de los dígitos de 11^{10} es 43. □

Construcciones y Existencias

Ejemplo 9. *Demostrar que existen infinitos enteros positivos n tales que*

$$p(n) = (s(n))^2.$$

Solución. Sea $k \geqslant 5$ un entero arbitrario. Es fácil probar que $2^k > 4k$.
Consideremos el número:

$$u_k = \underbrace{1111\cdots111}_{2^k-4k \text{ veces}}\underbrace{444\cdots44}_{k \text{ veces}}.$$

Notemos que $p(u_k) = 4^k$ y $s(u_k) = (2^k - 4k) + 4k = 2^k$. Como $(2^k)^2 = 4^k$, tenemos que $p(u_k) = (s(u_k))^2$. Así, el número u_k cumple las condiciones deseadas. Para concluir el problema, basta tomar todos los términos de la sucesión $\{u_k\}_{k\geqslant 5}$, pues esta sucesión tiene infinitos términos y cada uno de ellos cumple lo pedido. □

Ejemplo 10. *¿Existe alguna progresión aritmética de enteros positivos, que sea infinita y estrictamente creciente, tal que todos sus términos tengan la misma suma de dígitos?*

Solución. La respuesta es no. En efecto, supongamos que sí existe tal progresión y sean a el primer término de la progresión y t la cantidad de dígitos de a. Si d es la diferencia común de la progresión, entonces $d > 0$, pues la progresión aritmética es estrictamente creciente. Luego, el siguiente número $a + 10^t d$ también es término de la progresión. Sin embargo, $s(a+10^t d) = s(a)+s(d)$. Pero como todos los términos tienen la misma suma de dígitos, entonces $s(a) + s(d) = s(a)$, lo cual implica que $s(d) = 0$, lo cual es un absurdo, ya que $d > 0$. Por lo tanto, no existe tal progresión. □

Teorema 5. *Todo entero positivo tiene un múltiplo de la forma* $111\ldots11000\ldots00$.

Prueba. Sea n un entero positivo arbitrario. Consideremos la sucesión de $n+1$ números:

$$1,\ 11,\ 111,\ \ldots,\ \underbrace{111\ldots11}_{(n+1) \text{ veces}}$$

Por el principio de las casillas, existen dos números de la sucesión que dejan el mismo residuo al dividirse entre n, esto es, existen $i > j$ tales que

$$\underbrace{111\ldots11}_{i \text{ veces}} \equiv \underbrace{111\ldots11}_{j \text{ veces}} \pmod n \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{111\ldots11}_{(i-j) \text{ unos}}\underbrace{000\ldots00}_{j \text{ ceros}} \equiv 0 \pmod n.$$

Por lo tanto, el número $\underbrace{111\ldots11}_{(i-j) \text{ unos}}\underbrace{000\ldots00}_{j \text{ ceros}}$ es múltiplo de n y está formado únicamente por los dígitos 0 y 1. $\square$

Comentario. Si n es un entero positivo impar y no es divisible por 5, entonces el número

$$\underbrace{111\ldots11}_{(i-j) \text{ unos}},$$

es divisible por n. Por lo tanto, cualquier entero positivo impar que no es múltiplo de 5 tiene un múltiplo formado únicamente por dígitos 1.

Ejemplo 11. *Demuestre que todo entero positivo tiene un múltiplo cuya suma de dígitos es impar.*

Solución. Sea n un entero positivo arbitrario. Por el Teorema 5, existe un entero positivo k tal que nk es de la forma:

$$\underbrace{111\ldots11}_{a \text{ unos}}\underbrace{000\ldots00}_{b \text{ ceros}},$$

Si a es impar, terminamos, pues se tendría que la suma de los dígitos de nk es impar. Si a es par, consideremos los siguientes números:

$$A = \underbrace{999\ldots99}_{a \text{ unos}}\underbrace{000\ldots00}_{b \text{ ceros}} \quad \text{y} \quad B = \underbrace{111\ldots11}_{a \text{ unos}}\underbrace{000\ldots00}_{b+1 \text{ ceros}}.$$

Es claro que ambos números son múltiplos de n, por lo tanto, la suma $A + B$ también lo es, pero, como

$$A + B = 2\underbrace{111\ldots11}_{a-2 \text{ unos}}09\underbrace{000\ldots00}_{b \text{ ceros}},$$

tenemos que $s(A + B) = 2 + (a - 2) + 9 = a + 9$. Dado que a es un número par, se sigue que $s(A + B)$ es impar. $\square$

Ejemplo 12. *(Emerson Soriano). Un entero positivo n es llamado* sensacional *si existe un entero positivo múltiplo de 792 tal que la suma de sus dígitos es igual a n. Por ejemplo, 18 es sensacional, porque 5544 es múltiplo de 792 y la suma de los dígitos de 5544 es $5 + 5 + 4 + 4 = 18$.*
Encontrar todos los enteros positivos que son sensacionales.

Solución. Comenzamos con un lema.

Lema 1. *Solo los enteros positivos pares y los enteros impares mayores o iguales que 11 cumplen que son iguales a la suma de los dígitos de algún múltiplo de 11.*

Prueba. Sea n un entero positivo. Notemos que el siguiente número:

$$w = \underbrace{1111\ldots1111}_{2n \text{ veces}},$$

es divisible por 11, pues

$$w = 11(10^{2n-2} + 10^{2n-4} + \cdots + 10^2 + 1).$$

Esto nos muestra que existe un múltiplo de 11 cuya suma de dígitos es $2n$. Por lo tanto, todo número par es la suma de los dígitos de algún múltiplo de 11.
Por otro lado, consideremos el número:

$$q = 506\underbrace{111\ldots11}_{2t\ veces} = 506 \cdot 10^{2t} + \underbrace{111\ldots11}_{2t\ veces}.$$

Podemos notar que q es múltiplo de 11, ya que 506 y $\underbrace{111\ldots11}_{2t\ veces}$ son ambos múltiplos de 11. Además, $s(q) = 2t + 11$. Como t es un entero no negativo, entonces cualquier impar mayor o igual que 11 es la suma de los dígitos de algún múltiplo de 11.
Solo falta demostrar que no existe ningún múltiplo de 11 cuya suma de dígitos es 1, 3, 5, 7 o 9. En efecto, para cada entero positivo m, sean $A(m)$ la suma de los dígitos de m en posición impar y $B(m)$ la suma de todos los dígitos de m en posición par. Por ejemplo, $A(12345) = 5 + 3 + 1 = 9$ y $B(12345) = 4 + 2 = 6$. Es claro que $s(m) = A(m) + B(m)$ y $n \equiv A(m) - B(m) \pmod{11}$. Supongamos que existe un entero positivo m, divisible por 11, tal que $s(m) = j$ para algún $j \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Entonces, como $A(m) + B(m) = j$ y $A(m) \equiv B(m) \pmod{11}$, tenemos que

$$A(m) \equiv j - A(m) \pmod{11} \quad \Leftrightarrow \quad A(m) \equiv \frac{11 + j}{2} \pmod{11},$$

pero $j \leq 9$ implica que $j < \frac{11+j}{2} < 11$, por lo tanto, $\frac{11+j}{2}$ es un residuo módulo 11. En consecuencia, $A(m) \geqslant \frac{11+j}{2} > j$, pero esto contradice la igualdad $A(m) + B(m) = j$. Por lo tanto, solo los impares mayores o iguales que 11 son iguales a la suma de los dígitos de algún múltiplo de 11. □

Con respecto al problema, notemos que $792 = 8 \cdot 9 \cdot 11$. Luego, si n es un número sensacional, entonces n es la suma de los dígitos de un múltiplo de 9, y, por ende, n también debe ser un múltiplo de 9. También debemos notar que n es la suma de los dígitos de un múltiplo de 11. Luego, por el lema anterior, n es par o es impar mayor o igual que 11.

- Si n es par, entonces n es múltiplo de 18. Consideremos el número:

  $$T_1 = \underbrace{111\ldots11}_{n \text{ veces}}000,$$

  el cual es múltiplo de 8, 9 y 11; por lo tanto, T_1 es múltiplo de 792 y, además, la suma de sus dígitos es n.

- Si n es impar mayor o igual que 11, entonces $n = 9k$, para algún impar $k \geq 3$. Consideremos el número:

$$T_2 = 10989\underbrace{111\ldots11}_{9(k-3) \text{ veces}}000 = 10989 \cdot 10^{9k} + \underbrace{111\ldots11}_{9(k-3) \text{ veces}} \cdot 10^3.$$

Es claro que T_2 es divisible por 8 y 9. Como $10989 = 11 \cdot 999$, entonces 10989 es divisible por 11. También es fácil darse cuenta que el número $\underbrace{111\ldots11}_{9(k-3) \text{ veces}}$ es divisible por 11, pues $9(k-3)$ es par. Por lo tanto, T_2 es múltiplo de 11. De este modo, tenemos que T_2 es divisible por 792, y, además, la suma de sus dígitos es $9k$.

Por lo tanto, los números sensacionales son todos los números de la forma $9k$, donde k es cualquier entero positivo mayor que 1. □

Ejemplo 13. *Probar que existe una potencia de* 2 *que en su representación decimal contiene una sucesión de* 2017 *dígitos consecutivos iguales a cero.*

Solución. Para cada entero positivo t, definamos la función $f(t) = t - c(2^t)$. Vamos a demostrar que la función f toma valores tan grandes como se quiera. En efecto, ya que $2^{10} < 10^4$, tenemos que $2^{10w} < 10^{4w}$ para todo entero positivo w. Esto indica que $c(2^{10w}) < 4w$. Luego, $f(10w) = 10w - c(2^{10w}) > 10w - 4w = 6w$. Como w es un entero positivo arbitrario, podemos tomar w tan grande como se quiera, y, en consecuencia, $f(t)$ es tan grande como se desee.
Ahora, consideremos un entero positivo n tal que $f(n) \geq 2017$. Si observamos la siguiente sucesión:

$$2^0,\ 2^1,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4,\ \ldots,\ 2^{10^n},$$

por el principio de las casillas, existen índices $0 \leqslant j < i \leqslant 10^n$ tales que $2^i \equiv 2^j \pmod{10^n}$. Luego,

$$2^i \equiv 2^j \pmod{10^n} \Rightarrow 2^{i-j} \equiv 1 \pmod{5^n} \Rightarrow 2^{i-j+n} \equiv 2^n \pmod{10^n}.$$

La congruencia $2^{i-j+n} \equiv 2^n \pmod{10^n}$ nos indica que en los últimos n dígitos de 2^{i-j+n} hay $n - c(2^n)$ dígitos consecutivos iguales a 0 y, como $n - c(2^n) \geq 2017$, entonces 2^{i-j+n} es la potencia de 2 que estamos buscando. □

Ejemplo 14. *Probar que todo entero positivo n tiene un múltiplo cuya suma de dígitos es igual a n.*

Solución. Sea n un entero positivo arbitrario y sean x, y, k, enteros no negativos, tales que $n = 2^x \cdot 5^y \cdot k$, donde k es un número impar no divisible por 5. A continuación construiremos un múltiplo de n cuya suma de dígitos es igual a n. En efecto, como k y 10 son coprimos, entonces por el teorema de Euler, tenemos que $10^{\phi(k)} \equiv 1 \pmod{k}$, y, en consecuencia, $10^{\phi(k)\cdot h} \equiv 1 \pmod{k}$ para cualquier entero no negativo h. Luego,

$$A = 1 + 10^{\phi(k)} + 10^{2\phi(k)} + \cdots + 10^{(n-1)\phi(k)} \equiv n \pmod{k};$$

pero como k divide a n, entonces A es divisible por k. Note que entre los dígitos de A hay exactamente n dígitos iguales a 1 y los restantes son iguales a 0, así, $s(A) = n$. Luego, el número que estamos buscando es $A \cdot 10^{\text{máx}(x,y)}$, pues es divisible por n y la suma de sus dígitos es n. $\square$

Ejemplo 15. *Probar que existen infinitos enteros positivos que son divisibles por la suma y el producto de sus dígitos.*

Solución. Para cada entero positivo k, sea u_k el número formado por 3^k dígitos iguales a 1, es decir,

$$u_k = \underbrace{111\ldots11}_{3^k \text{ veces}}.$$

Es fácil notar que para todo entero positivo n, u_n es divisible por el producto de sus dígitos, pues ese producto es igual a 1. Demostraremos por inducción en n que u_n es divisible por la suma de sus dígitos, esto es, probaremos que u_n es divisible por 3^n para todo entero positivo n. En efecto, para el caso $n = 1$, sabemos que el número $u_1 = 111$ es divisible por 3. Supongamos que existe un entero positivo k tal que u_k es divisible por 3^k.
Observemos que,

$$u_{k+1} = \underbrace{111\ldots11}_{3^{k+1} \text{ veces}} = \underbrace{111\ldots11}_{3^k \text{ veces}}\underbrace{111\ldots11}_{3^k \text{ veces}}\underbrace{111\ldots11}_{3^k \text{ veces}} = u_k(10^{2\cdot 3^k} + 10^{3^k} + 1).$$

Como $10^{3^k} \equiv 1 \pmod 3$, el número $10^{2\cdot 3^k} + 10^{3^k} + 1$ es divisible por 3. En consecuencia, el número $u_k(10^{2\cdot 3^k} + 10^{3^k} + 1)$ es divisible por 3^{k+1}, completando así la inducción. Para terminar con el problema, basta con tomar la colección de números $\{u_n\}_{n\geq 1}$, pues esa colección es infinita y cada uno de esos números es divisible por la suma y el producto de sus respectivos dígitos. $\square$

Ejemplo 16. *(Rioplatense, Nivel 2, 2012). Encontrar el menor entero positivo n tal que*

$$s(n) = s(2n) = s(3n) = \cdots = s(2012n).$$

Solución. Sea n el número que buscamos. Primero demostraremos que $c(n) \geq 4$. En efecto,

- Si $c(n) = 1$, entonces $s(n) = n$ y $s(11n) = 2n$, pero esto implica que $n = 2n$, es decir, $n = 0$, lo cual es un absurdo, ya que n es positivo.

- Si $c(n) = 2$, entonces n es de la forma $n = \overline{ab}$. Luego, como

$$s(\overline{ab}) = s(101\overline{ab}) = s(\overline{abab}),$$

entonces $a + b = 2(a + b)$, es decir, $a + b = 0$, pero esto también es un absurdo ya que $a + b \geq 1$.

- Si $c(n) = 3$, entonces n es de la forma $n = \overline{abc}$. Luego, como

  $$s(\overline{abc}) = s(1001\overline{abc}) = s(\overline{abcabc}),$$

  entonces $a + b + c = 2(a + b + c)$, implicando que $a + b + c = 0$, pero esto nuevamente es un absurdo, pues es claro que $a + b + c \geq 1$.

Por lo tanto, $c(n) \geq 4$. Supongamos que $c(n) = 4$ y sea $\overline{a_1 a_2 \ldots a_k}$ la representación decimal de n. Notemos que $1001\overline{a_1 a_2 a_3 a_4} = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 000} + \overline{a_1 a_2 a_3 a_4}$, luego, al sumar los números $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 000}$ y $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4}$, obtenemos

$$\begin{array}{r} \overline{a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ 0\ 0\ 0} + \\ \overline{a_1\, a_2\, a_3\, a_4} \\ \hline \overline{\ldots\ a_2\, a_3\, a_4} \end{array}$$

donde podemos observar que $a_4 + a_1 > 9$, pues de lo contrario, tendríamos que

$$1001n = \overline{a_1 a_2 a_3 (a_1 + a_4) a_2 a_3 a_4},$$

lo cual implica que $s(1001n) > s(n)$, que es un absurdo.
Si $a_3 < 9$, tenemos que

$$1001n = \overline{a_1 a_2 (a_3 + 1)(a_1 + a_4 - 10) a_2 a_3 a_4},$$

pero entonces $s(1001n) > s(n)$, lo cual es un absurdo. Así, $a_3 = 9$.
Si $a_2 < 9$, entonces

$$1001n = \overline{a_1 (a_2 + 1) 0 (a_1 + a_4 - 10) a_2 a_3 a_4},$$

de donde claramente $s(1001n) > s(n)$, lo cual es un absurdo. Por lo tanto, $a_2 = 9$.
Si $a_1 < 9$, entonces

$$1001n = \overline{(a_1 + 1) 00 (a_1 + a_4 - 10) a_2 a_3 a_4},$$

pero entonces $s(1001n) > s(n)$, que también es un absurdo. Por lo tanto, $a_1 = 9$.
Como ya sabemos que $a_1 = a_2 = a_3 = 9$, entonces al calcular nuevamente $1001n$, tenemos que $1001n = \overline{1000(a_4 - 1)99a_4}$. Luego, como $s(1001n) = s(n)$, se sigue que

$$s(\overline{1000(a_4 - 1)99a_4}) = s(\overline{999a_4}) \quad \Leftrightarrow \quad 2a_4 + 18 = a_4 + 27,$$

lo cual implica que $a_4 = 9$. Basta demostrar que el número 9999 satisface las condiciones del problema para concluir que es el número buscado. En efecto, sea k un entero tal que $1 \leq k \leq 2012$. Si k es múltiplo de 10, entonces $9999k$ también es múltiplo de 10 y por lo tanto, $9999k = 10k'$ para algún entero positivo k'. Entonces, $s(9999k) = s(10k') = s(k') = s(9999\frac{k}{10})$. Luego, podemos suponer que k no es múltiplo de 10. Como $k < 10000$, se sigue que k es de la forma $k = \overline{abcd}$ donde a, b, c y d son dígitos (por ejemplo, $58 = 0058$). Como $9999 = 10000 - 1$, tenemos que

$$9999k = 10000k - k = \overline{abcd0000} - \overline{abcd}.$$

Además, $0 < d \leq 9$ implica que

$$9999k = \overline{abc(d-1)(9-a)(9-b)(9-c)(10-d)}.$$

Así, $s(9999k) = a + b + c + (d-1) + (9-a) + (9-b) + (9-c) + (10-d) = 36$ donde k es cualquier entero entre 1 y 2012, inclusive. $\square$

Ejemplo 17. *(Emerson Soriano - Lista Corta Cono Sur 2013). Una sucesión estrictamente creciente e infinita de enteros positivos es llamada n-*elegante *si se cumplen las siguientes dos condiciones:*

- *Cualesquiera dos términos de la sucesión son coprimos.*
- *La suma de los dígitos de cada término de la sucesión es n.*

Demostrar que existen infinitos enteros positivos n para los cuales es posible encontrar una sucesión n-elegante.

Solución. Vamos a demostrar que para todo entero positivo k, siempre es posible encontrar una sucesión 2^k-elegante. En efecto, consideremos el siguiente número

$$a = \sum_{i=0}^{2^k-1} 10^i.$$

y la sucesión $\{a_i\}_{i \geqslant 1}$ definida por $a_1 = a$ y, para todo entero positivo $i \geqslant 1$,

$$a_{i+1} = \sum_{j=0}^{2^k-1} 10^{j \cdot \phi(P_i)},$$

donde P_i es el producto de todos los divisores primos del producto $a_1 a_2 \cdots a_i$. Es fácil notar que dicha sucesión es estrictamente creciente, todos sus términos son coprimos con 10, y además $s(a_i) = n$, para todo entero positivo i.
Si existen $i > j$ tales que a_i y a_j no son coprimos, entonces existe un número primo p tal que a_i y a_j son múltiplos de p. Como p es factor primo de a_j, entonces p divide a P_{i-1}; por tanto, $\phi(P_{i-1})$ es divisible por $\phi(p)$. Luego, como a_j es coprimo con 10, entonces

$$10^{j \cdot \phi(P_{i-1})} = 10^{\phi(p) \cdot \frac{j\phi(P_{i-1})}{\phi(p)}} \equiv 1 \pmod{p},$$

para todo $j = 0, 1, \ldots, 2^k - 1$. Así, $a_i \equiv 2^k \pmod{p}$, pero como a_i también es múltiplo de p, entonces 2^k es múltiplo de p. En consecuencia, $p = 2$, lo cual es un absurdo, pues a_i es impar. De este modo, concluimos que todos los términos de la sucesión mencionada son coprimos dos a dos. Por lo tanto, concluimos que la sucesión $\{a_i\}_{i \geq 1}$ es 2^k-elegante. $\square$

Ejemplo 18. *Demostrar que para todo entero positivo n existe un entero positivo k (que depende de n) que satisface simultáneamente las siguientes dos condiciones:*

- *En la representación decimal de 5^k, hay al menos n dígitos iguales a 5.*

- *La suma de los dígitos de k es menor o igual que la suma de los dígitos de n.*

Solución.

Lema 2. *$c(5^m) < m$ para todo entero $m \geq 4$.*

Prueba. Es claro que si w es un entero positivo, entonces $c(5w) = c(w)$ o $c(w)+1$, ya que $5w < 10w$ y $c(10w) = c(w) + 1$. Esto muestra que en la sucesión de las potencias de 5, la cantidad de dígitos de un término que no sea el primero, tiene un dígito más que el término anterior o se mantiene. Por lo tanto, como $5^4 = 625$, entonces $c(5^4) < 4$. En consecuencia, $c(5^m) < m$ para todo entero $m \geq 4$. □

Lema 3. *$m - c(5^m) \geq 3$ para todo entero $m \geq 10$.*

Prueba. Notemos que $5^{10} = 9765625$ y $10 - c(5^{10}) = 3$. Luego, si un entero positivo $t \geq 10$ cumple que $t - c(5^t) = 3$, entonces $(t+1) - c(5^{t+1}) \geq t+1-(c(5^t)+1) = 3$ (note que el Lema 2 implica que $t - c(5^t) > 0$ para cualquier entero $t \geq 10$). Por lo tanto, si $m \geq 10$, entonces $m - c(5^m) \geq 3$. □

Con respecto al problema, haremos la demostración por inducción en n. Observemos que para $n = 1$, basta tomar $k = 1$, pues 5^1 tiene al menos un dígito 5 y $1 = s(k) \leq s(n) = 1$. Para $n = 2$, basta tomar $k = 10$, pues $5^{10} = 9765625$ tiene al menos $n = 2$ dígitos iguales a 5 y $1 = s(k) = s(10) \leq s(n) = s(2) = 2$.
Supongamos que existe un entero $n \geq 3$ que satisface las dos condiciones, esto es, existe un entero positivo k tal que 5^k tiene al menos n dígitos iguales a 5 y $s(k) \leq s(n)$. Debemos probar que $n+1$ satisface ambas condiciones del problema. En efecto, como $n \geq 3$, k no puede ser igual a ninguno de los enteros del 1 al 9, pues ninguno de los números $5, 5^2, 5^3, \ldots, 5^9$ tiene al menos tres dígitos iguales a 5. Por lo tanto, $k \geq 10$ y por el Lema 3 se cumple que $k - c(5^k) \geq 3$.
Como 5 y $2^{c(5^k)}$ son coprimos, entonces $5^{2^{c(5^k)-1}} = 5^{\phi(2^{c(5^k)})} \equiv 1 \pmod{2^{c(5^k)}}$, pero como $2^{c(5^k)-1} \mid 10^{c(5^k)}$, entonces $5^{10^{c(5^k)}} \equiv 1 \pmod{2^{c(5^k)}}$, es decir, el número $\frac{5^{10^{c(5^k)}}-1}{2^{c(5^k)}}$ es un entero positivo.
Analicemos el siguiente número:

$$E = \left(5^{k-c(5^k)} \times \frac{5^{10^{c(5^k)}}-1}{2^{c(5^k)}}\right) \times 10^{c(5^k)}.$$

Simplificando E, obtenemos que $E = 5^{k+10^{c(5^k)}} - 5^k$. Por lo tanto,

$$\left(5^{k-c(5^k)} \times \frac{5^{10^{c(5^k)}}-1}{2^{c(5^k)}}\right) \times 10^{c(5^k)} + 5^k = 5^{k+10^{c(5^k)}} \tag{19}$$

Demostraremos que, para que $n+1$ cumpla la propiedad, basta con tomar $k_0 = k + 10^{c(5^k)}$. Por el Teorema 3, tenemos que

$$s(k + 10^{c(5^k)}) \leqslant s(k) + s(10^{c(5^k)}) = s(k) + 1 \leq s(n) + 1.$$

Ahora, solo falta probar que el número $5^{k+10^{c(5^k)}}$ tiene al menos $n+1$ dígitos iguales a 5. En efecto, notemos que en el lado izquierdo de la igualdad (19), el primer sumando termina en $c(5^k)$ ceros. Esto quiere decir que al sumar ambos sumandos en (19) no hay acarreo.
Por otro lado, notemos que

$$5^{10^{c(5^k)}} - 1 = \left(\prod_{i=1}^{c(5^k)} (5^{\frac{10^{c(5^k)}}{2^i}} + 1) \right) (5^{5^{c(5^k)}} - 1) \tag{20}$$

Como $5^i + 1 \equiv 2 \pmod 4$ para cualquier entero positivo i, entonces

$$\nu_2 \left(\prod_{i=1}^{c(5^k)} (5^{\frac{10^{c(5^k)}}{2^i}} + 1) \right) = c(5^k), \tag{21}$$

donde $\nu_2(a)$ denota al mayor entero no negativo tal que $2^{\nu_2(a)} \mid a$ siendo a un entero positivo.
Es claro que si w es un entero positivo impar, entonces $5^w - 1 = 4(5^{w-1} + 5^{w-2} + \cdots + 5 + 1)$, pero como $\left(5^{w-1} + 5^{w-2} + \cdots + 5 + 1\right)$ es impar, resulta que $\nu_2(5^w - 1) = 2$. En particular,

$$\nu_2 \left(5^{5^{c(5^k)}} - 1 \right) = 2. \tag{22}$$

De (20), (21) y (22), concluimos que

$$\nu_2 \left(5^{10^{c(5^k)}} - 1 \right) = c(5^k) + 2.$$

Luego, como $k - c(5^k) \geq 3$, entonces $k > \nu_2 \left(5^{10^{c(5^k)}} - 1 \right)$. Así, tenemos que

$$k - c(5^k) > \nu_2 \left(5^{10^{c(5^k)}} - 1 \right) - c(5^k).$$

Esta última desigualdad muestra que el número

$$5^{k - c(5^k)} \times \frac{5^{10^{c(5^k)}} - 1}{2^{c(5^k)}},$$

cumple que su último dígito distinto de cero es 5. Por lo tanto, en la igualdad (19) se concluye que el número $5^{k+10^{c(5^k)}}$ tiene al menos $n+1$ dígitos iguales a 5, ya que por hipótesis el número 5^k tiene al menos n dígitos iguales a 5, quedando completa la inducción. $\square$

Problemas Propuestos

Problema 1 (Putnam, 1956)**.** *Demuestra que todo entero positivo tiene un múltiplo que en su representación decimal, contiene al menos una vez a todos los dígitos del* 0 *al* 9*, inclusive.*

Problema 2 (Cono Sur, 1998). *Demuestra que al menos el* $30\,\%$ *de los elementos del conjunto*

$$\left\{1, 2, 3, \ldots, 10^6\right\},$$

cumplen que el primer dígito de 2^n*, en su representación decimal, es* 1.

Problema 3 (Rusia, 1999). *¿Existen* 19 *enteros positivos, con igual suma de dígitos, tales que la suma de todos ellos es igual a* 1999*?*

Problema 4 (Cono Sur, 2000). *Demuestra que para cada entero positivo* n*, existe un entero positivo que es divisible por el producto de sus dígitos, tal que ese producto es mayor que* 10^{2000}.

Problema 5 (Cono Sur, 2007). *Demuestra que para cada entero positivo* n*, existe un entero positivo* k *tal que la representación decimal de cada uno de los siguientes números:*

$$k,\ 2k,\ 3k,\ \ldots,\ nk,$$

contiene al menos una vez a todos los dígitos del 0 *al* 9*, inclusive.*

Problema 6 (Selectivo Perú - Cono Sur, 2009). *Determina todos los enteros positivos* n *para los cuales existen cuatro enteros positivos* $a < b < c < d$*, tales que*

$$s(a) = s(b) = s(c) = s(d) = s(a + b + c + d) = n.$$

Problema 7 (OMCC, 2003). *Diremos que un entero positivo es* tico *si la suma de sus dígitos, en el sistema decimal, es múltiplo de* 2003.

$a)$ *Demuestra que existe un entero positivo* N *tal que sus primeros* 2003 *múltiplos (positivos):* $N, 2N, 3N, \ldots, 2003N$*, son todos ticos.*

$b)$ *¿Existe algún entero positivo* N *tal que todos sus múltiplos sean ticos?*

Problema 8 (Cono Sur, 2008). *Determina todos los enteros positivos que tienen al menos un múltiplo que es un número capicúa*[4].

Problema 9 (Iberoamericana, 2016). *Sean* k *un entero positivo y* $a_1, a_2, \ldots, a_k$ *dígitos. Demuestra que existe un entero positivo* n *tal que los* $2k$ *últimos dígitos de* 2^n *son, en algún orden,* $a_1, a_2, \ldots, a_k$*,* $b_1, b_2, \ldots, b_k$*, para ciertos dígitos* $b_1, b_2, \ldots, b_k$.

Problema 10 (Selectivo Perú - Cono Sur, 2008). *Sea* a *y* b *enteros positivos, ninguno de ellos divisible por* 10*. Demuestra que existe un entero positivo* n *tal que* $s(an) > s(bn)$.

Problema 11 (Iberoamericana, 2012). *Demuestra que para todo entero positivo* n*, existen* n *enteros positivos consecutivos tales que ninguno de ellos es divisible por la suma de sus respectivos dígitos.*

[4]Un número *capicúa* es un número que se lee igual de derecha a izquierda que de izquierda a derecha.

Problema 12 (APMO, 2014)**.** *Demuestra que para todo entero positivo n, existen enteros positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ que satisfacen las siguientes condiciones:*

$$s(a_1) < s(a_2) < \cdots < s(a_n) \quad y \quad s(a_i) = p(a_{i+1})$$

para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, considerando que $a_{n+1} = a_1$.

Problema 13. *Demuestra que para todo entero $k \geqslant 2$, existe una potencia de 2 tal que, entre sus últimos k dígitos, al menos la mitad son iguales a 9.*

Problema 14 (Selectivo Perú - Ibero, 2010)**.** *Determina todos los enteros positivos N para los cuales existen tres enteros positivos a, b, c coprimos dos a dos, tales que*

$$s(ab) = s(bc) = s(ca) = N.$$

Bibliografía

1) Andreescu T., Andrica D. *Number Theory: Structures, Examples and Problems*.

2) Andreescu T., Andrica D., Feng Z. *104 Number Theory Problems*, from the training of the USA IMO team.

3) Andreescu T., Dospinescu G. *Problems from the Book*.

4) Engel A. *Problem Solving Strategies*.

5) Sato N. *Number Theory*.

6) Tipe J., Espinoza Choqquepura C. *V Olimpiada Nacional Escolar de Matemática (2008)*. Perú.

7) Bornsztein P., Caruso X., Nolin P., Tibouchi M. *Cours d-arithmétique*, Premiére Partie.

8) Sierpinski W. *250 Problems in Elementary Number Theory*.

9) Matić I., Petrović N. *The IMO Compendium*, A collection of Problems Suggested for the International Mathematical Olympiads: 1959-2009.