Escogiendo la gráfica adecuada

Por Jorge Garza Vargas

Nivel Intermedio

Tanto en la olimpiada como en investigación en matemáticas, la teoría de gráficas es de suma importancia dentro del área de combinatoria. Las gráficas, por ser estructuras abstractas y simples, pueden ser utilizadas para modelar y resolver problemas de diversa índole. En ocasiones la dificultad de un problema reside en "escoger la gráfica adecuada", es decir, abstraer la información del problema, transformándolo en un problema de teoría de gráficas. Una vez enunciado el problema en el lenguaje de gráficas, se puede hacer uso de toda la maquinaria desarrollada en esta teoría.
En este artículo se presentarán algunas nociones básicas de la teoría de gráficas utilizadas en la olimpiada de matemáticas, resultados elementales en el área, y aplicaciones a problemas en donde a primera vista no es claro que la construcción de una gráfica pueda ser de ayuda en la resolución del problema.

Una gráfica consiste de objetos de dos tipos, vértices y aristas. Los vértices son representados por puntos y las aristas por líneas que unen parejas de vértices. A lo largo de este texto solo consideraremos gráficas simples, es decir, gráficas en donde entre cualesquiera dos vértices hay a lo más una arista y en donde ninguna arista une a un vértice consigo mismo. En la figura 1 se muestran tres gráficas distintas.
Diremos que dos vértices son *adyacentes* si están unidos por una arista. En la gráfica A de la figura 1, u_1 y v_1 son adyacentes pues están conectados por la arista e_1. El *grado* de un vértice es la cantidad de vértices que son adyacentes a él. Entonces, en la figura 1 el grado de u_1 es 4, el de u_2 es 3 y el de u_3 es 2. Este simple concepto es suficiente para resolver el siguiente problema.

Problema 1. *Sea $n > 1$ un entero. Demuestra que en una fiesta de n personas hay dos personas que conocen a la misma cantidad de personas.*

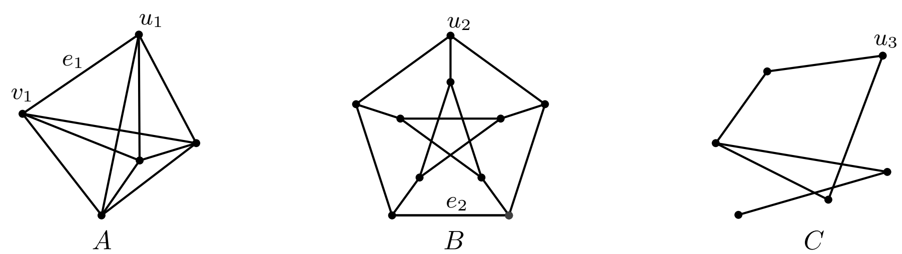

Figura 1: *u_1 es un vértice de la gráfica A y e_2 es una arista de la gráfica B. La gráfica A tiene 5 vértices y 10 aristas, la B tiene 10 vértices y 15 aristas, mientras que la C tiene 6 vértices y 6 aristas.*

Una forma de resolver este problema es construyendo una gráfica. Pondremos un vértice por cada persona en la fiesta y uniremos dos vértices por una arista si las personas asociadas a dichos vértices se conocen. El problema se traduce a la siguiente proposición:

Proposición 1. *Si G es una gráfica con n vértices, hay dos vértices en G que tienen el mismo grado.*

Demostración. Notemos que el grado de cualquier vértice en G es un número entre 0 y $n-1$. Además, si G tiene un vértice aislado, es decir un vértice con grado 0, G no puede tener otro vértice con grado $n-1$, pues este estaría conectado con todos los demás vértices, incluyendo al de grado 0, lo cual es una contradicción. Análogamente, si un vértice de G tiene grado $n-1$, todos los demás vértices tendrán un grado positivo. Por lo tanto, el grado de los vértices de G solo puede asumir $n-1$ valores distintos y dado que hay n vértices, por el principio de casillas, hay dos vértices en G con el mismo grado. $\square$

El Problema 1 puede ser resuelto directamente sin tener que recurrir al lenguaje de gráficas. En este caso, enunciar el problema en lenguaje de gráficas permite obtener un resultado más general, en donde la escencia del problema se esclarece. Por ejemplo, utilicemos la proposición anterior para obtener un resultado general sobre poliedros. Un *poliedro* es un sólido de caras planas poligonales. Diremos que dos caras son adyacentes si tienen un lado en común. Notemos entonces que la cantidad de lados de una cara en un poliedro es igual a la cantidad de caras a las que esta es adyacente. Con esta observación es evidente que el siguiente problema es equivalente al anterior.

Problema 2. *Demuestra que en cualquier poliedro hay dos caras con la misma cantidad de lados.*

Solución. Construyamos una gráfica en donde pondremos un vértice por cada cara del poliedro, dos vértices estarán conectados por una arista si sus caras asociadas son adyacentes. Observemos también que la gráfica tiene más de un vértice, pues todo poliedro tiene más de una cara. Con esto, como la cantidad de lados de una cara es igual al grado del vértice asociado en la gráfica, el problema se reduce a demostrar que en la gráfica hay dos vértices con el mismo grado, lo cual se sigue de la Proposición 1. □

La gráfica que construimos en la solución del problema anterior es conocida como la gráfica dual del poliedro. El dual de un poliedro es nuevamente un poliedro, en la figura 2 se muestran un tetraedro, un cubo y un icosaedro con sus respectivos duales. Con frecuencia, cuando se trabaja con un objeto conformado por regiones planas, construir una gráfica cuyos vértices representen a las regiones y cuyas aristas representen la adyacencia entre regiones, puede ser de suma utilidad. El siguiente problema fue tomado del libro *Putnam and Beyond* [2], en donde se presenta una solución sencilla utilizando inducción. La solución que presentaremos utilizando gráficas es mucho más técnica, sin embargo, además de ser estética, ejemplifica varios métodos estándar usados en la teoría de gráficas.

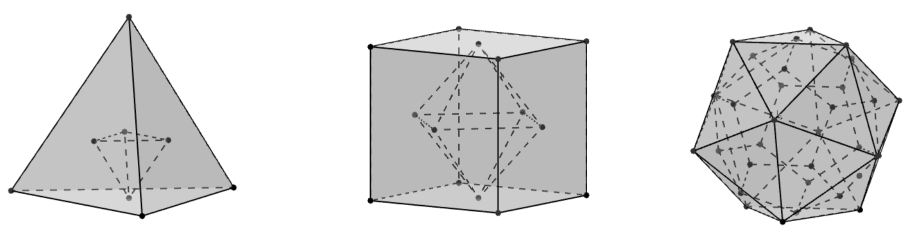

Figura 2: *A la derecha se puede apreciar que el dual del icosaedro es el dodecadedro, el dual del dodecaedro es nuevamente el icosaedro. En general, el dual del dual de un poliedro es el poliedro original. De los 5 sólidos platónicos, el tetraedro es el único autodual, esto se muestra en la imagen de la izquierda.*

Problema 3. *Sea n un entero positivo. En el plano se trazan n líneas de forma que no haya dos de ellas paralelas ni tres concurrentes, dividiendo al plano en varias regiones. Demuestra que es posible colorear estas regiones, utilizando solo blanco y negro, de manera que cualesquiera dos regiones adyacentes tengan distinto color.*

Para resolver este problema construyamos una gráfica G, en donde pondremos un vértice por cada región determinada por las n líneas y uniremos dos vértices con una arista si sus respectivas regiones son adyacentes. Notemos que si es posible colorear las regiones como se indica en el problema, entonces será posible colorear los vértices de G, de blanco y negro, de forma que no haya dos vértices adyacentes del mismo color.
En otras palabras, será suficiente demostrar que los vértices de G se pueden separar en dos conjuntos, de forma que cualesquiera dos vértices en un mismo conjunto no estén conectados por una arista. En teoría de gráficas, cuando un conjunto de vértices cumple

que ningún par de sus vértices está conectado por una arista, decimos que el conjunto es *independiente*. Si los vértices de una gráfica pueden separarse en dos conjuntos independientes, diremos que la gráfica es *bipartita*. En la figura 3, se muestran tres gráficas bipartitas.

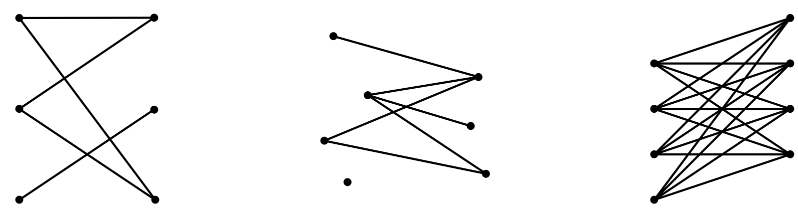

Figura 3: *La gráfica de la derecha tiene dos* componentes *(conjuntos independientes) de tamaño 4. Es claro que no hay otra manera de dividir a la gráfica en dos componentes independientes. En cambio, en la gráfica de enmedio, el vértice aislado puede pertenecer a cualquiera de los dos conjuntos.*

Entonces, el problema es equivalente a demostrar que G es una gráfica bipartita. En caso de que sea una noción nueva para el lector, se le recomienda intentar determinar cuáles de las gráficas en la figura 1 son bipartitas.

Necesitamos un criterio general que nos permita detectar si una gráfica es bipartita. Si el lector hizo el ejercicio de discernir a las gráficas bipartitas en la figura 1, seguramente habrá notado que los "caminos" en la gráfica proveen información importante en esta tarea.

Formalmente, dados dos vértices u y v en una gráfica, una *trayectoria* de u a v es una sucesión de vértices y aristas adyacentes en la gráfica, empezando en u y terminando en v. Una trayectoria se puede pensar como una caminata sobre las aristas de la gráfica, haciendo pequeñas pausas en los vértices. En la figura 4 se muestran tres copias de la misma gráfica, cada una ilustrando una trayectoria distinta. Cuando una trayectoria, no repite vértices ni aristas y empieza en el mismo vértice en el que termina, la trayectoria es llamada *ciclo*. Si en una gráfica se cumple que cualesquiera dos vértices están conectados por una trayectoria diremos que la gráfica es *conexa*.

Si una gráfica es bipartita, por definición se puede dividir en dos conjuntos independientes, me manera que si dos de sus vértices, u_1 y u_2, son adyacentes, estos deberán estar en conjuntos distintos. Luego, si u_2 es adyacente a otro vértice u_3, entonces estos dos vértices deberán pertenecer a conjuntos distintos en la partición y por lo tanto u_3 y u_1 estarán en el mismo conjunto, es decir, no podrán ser adyacentes. Si continuamos este razonamiento con más vértices, $u_4, u_5, \ldots$, nos daremos cuenta que los vértices de la forma u_{2k+1} no pueden estar conectados a u_1. Se sigue que si una gráfica es bipartita, entonces la gráfica no tiene ciclos de longitud impar. Resulta ser que esta propiedad también es suficiente para que una gráfica sea bipartita. Este resultado es conocido como el teorema de König y se resume a continuación. La demostración se deja como ejercicio al lector, pues es elemental y no muy complicada. En cualquier caso, el lector puede consultar la demostración en el libro *Combinatoria para Olimpidas* [8],

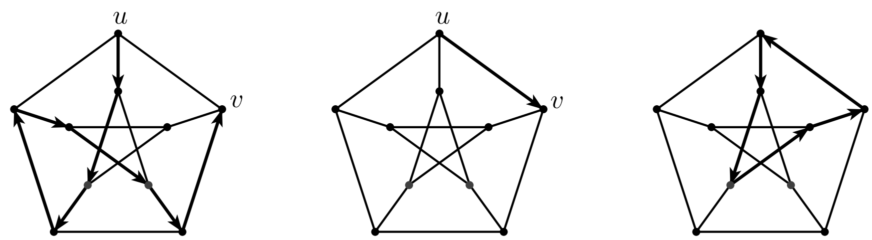

Figura 4: *Las primeras dos imágenes de la izquierda muestran una trayectoria de u a v, la primera de longitud 8, la segunda de longitud 1. La tercera imagen muestra un ciclo de tamaño 5.*

en donde se pueden estudiar otros resultados sobre gráficas bipartitas con aplicaciones interesantes.

Teorema 1 (Teorema de König)**.** *Una gráfica es bipartita si y solo si no tiene ciclos de longitud impar.*

Ahora estamos listos para concluir la solución del Problema 3.

Solución del Problema 3. Como se mencionó anteriormente, el problema se reduce a demostrar que G, la gráfica construida, es bipartita. Por el teorema de König, bastará ver que G no tenga ciclos impares. Tomemos un ciclo en G y sean $u_0, u_1, \ldots, u_k = u_0$ sus vértices. Demostraremos que el ciclo tiene longitud par. Recordemos que cada vértice corresponde a una región en el dibujo, por lo que el ciclo en G describe una caminata sobre las regiones del dibujo. Cada arista en el ciclo está asociada a una adyacencia entre regiones y dicha adyacencia está delimitada por una de las n rectas trazadas, entonces, a cada arista en el ciclo le podemos asociar una única recta en el dibujo. Ahora tomemos una de las n rectas, digamos ℓ, y observemos la cantidad de aristas a las que dicha recta fue asociada. Para esto llamemos F a la región asociada al vértice u_0. Notemos que cada arista asociada a ℓ representa un *cruce* sobre la recta cuando hacemos el recorrido en el dibujo. Como el recorrido empieza en F, la primer parte del recorrido está contenida en el semiplano determinado por ℓ que contiene a F, luego, en el primer *cruce* quedamos en el semiplano que no contiene a F. Así sucesivamente, después de los cruces impares, el recorrido transcurre en el semiplano que no contiene a F. Como el recorrido termina en F, al final se habrán hecho una cantidad par de cruces. Por lo tanto, cada recta en el dibujo está asociada a una cantidad par de aristas. Como toda arista está asociada a una única recta, concluimos que hay una cantidad par de aristas en el ciclo y por lo tanto el ciclo es par. $\square$

El resultado del problema anterior es parecido en naturaleza al famoso *teorema de los cuatro colores*. Este teorema establece que cualquier mapa, en donde los países son regiones conexas, puede ser coloreado utilizando solo cuatro colores, de manera que no

haya dos países colindantes con el mismo color. Este teorema, a pesar de poder enunciarse en términos elementales, duró más de cien años sin resolverse. Dado un mapa, la gráfica obtenida al poner un vértice por cada país y una arista por cada colindancia es la gráfica dual del mapa. Con esto, el problema se reduce a demostrar que en cualquier gráfica proveniente de un mapa, se pueden colorear los vértices, utilizando solo cuatro colores, de manera que no haya dos vértices adyacentes con el mismo color. Es fácil demostrar que las gráficas que provienen de un mapa son precisamente aquellas que se pueden dibujar en el plano de manera que sus aristas no se intersecten. A las gráficas que cumplen dicha propiedad se les llama *gráficas planas*. A la mínima cantidad de colores necesarios para colorear los vértices de una gráfica de modo que no haya dos adyacentes del mismo color se le conoce como *número cromático*. Por ejemplo, las gráficas bipartitas tienen número cromático menor o igual a dos. Entonces, el teorema de los cuatro colores es equivalente a la proposición de que todas las gráficas planas tienen número cromático menor o igual a cuatro. La primera demostración de la proposición anterior utilizó fuertemente herramientas computacionales. Una demostración reciente, más esclarecedora hace uso de teoría desarrollada en el área de lógica [4].
Notemos que la gráfica C de la figura 5, en donde se muestran tres gráficas planas, es equivalente a la gráfica C presentada en la figura 1, sin embargo, la primera vez que esta gráfica fue dibujada, sus aristas sí se intersectaban. Aunque en este caso fue posible volver a dibujar la gráfica de forma *plana*, hay gráficas para las cuáles esto es imposible. Se deja como ejercicio al lector demostrar que la gráfica A de la figura 1 no es una gráfica plana.

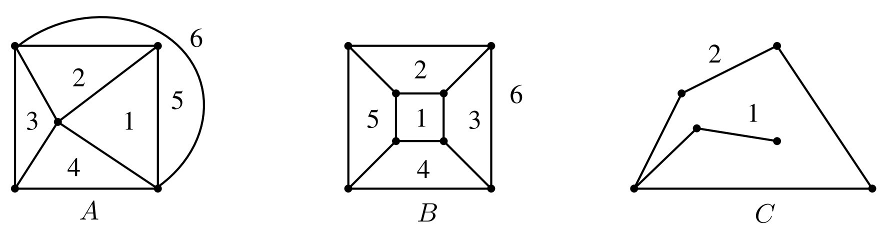

Figura 5: *Hemos numerado las caras en cada gráfica plana.*

Los resultados sobre mapas y gráficas planas son numerosos. Nosotros nos limitaremos a presentar un sencillo resultado probado por uno de los más grandes matemáticos de la historia, Leonard Euler.

Teorema 2 (Identidad de Euler)**.** *Sea G una gráfica plana y conexa. Sea V su número de vértices, A su número de aristas y C su número de caras. Entonces se cumple que $V + C - A = 2$.*

A la invariante $V + C - A$ se le conoce como la característica de Euler-Poincaré y es de suma importancia en el estudio de superficies. Por ejemplo, notemos que los poliedros convexos pueden ser representados como gráficas planas. La gráfica B de la figura 5 es equivalente al cubo. En un inicio podrá resultar extraño el considerar la parte exterior de las gráficas planas como una cara, como se muestra en la figura 5, esto viene del hecho de que para el teorema de Euler en realidad estamos pensando a las gráficas planas dentro de la superficie de una esfera, en vez de en un plano. Dada una esfera, podemos hacer una perforación en uno de sus polos e irla extendiendo poco a poco en un plano. La figura 6 muestra al cubo pensado como una división de la superficie de una esfera en regiones poligonales. Comparando esto con la gráfica plana en la figura 5 que representa al cubo, es claro que la parte “exterior” de la gráfica no es más que la parte restante de la esfera que nos queda cuando esta se convierte en un plano con el procedimiento descrito anteriormente.

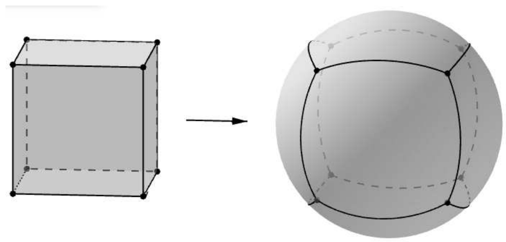

Figura 6: El cubo se puede pensar como un mapa en una esfera.

La mayoría de los poliedros a los que estamos acostumbrados se pueden pensar como una división de la esfera en regiones poligonales. Sin embargo, al dividir otros tipos de superficies en polígonos, como la dona (formalmente el *toro*), obtenemos poliedros de una naturaleza disinta. En la figura 7 se muestra un poliedro toroidal. El lector podrá verificar que en este caso el número $V + C - A$ no es dos, sino 0. De hecho, cualquier poliedro toroidal cumple que su característica es cero. Entonces, la característica de Euler-Poincaré es capaz de discernir entre mapas en el toro y mapas en la esfera. Un desarrollo más detallado, accesible y ameno, se puede encontrar en el capítulo 12 del libro *The Shape of Space* [10].

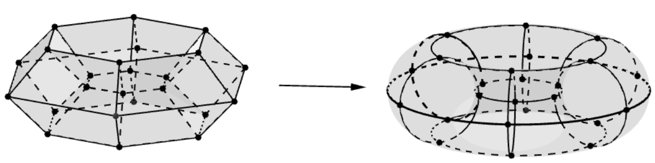

Figura 7: Notemos que en este caso $V = 24, C = 24$ y $A = 48$. Por lo tanto, $V + C - A = 0$.

Habiendo visto que el Teorema 2 es también válido para poliedros, no es difícil demostrar que existen exactamente cinco poliedros regulares (convexos). Es decir, los sólidos platónicos (el tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro) son los únicos poliedros regulares. Tanto la demostración del teorema anterior como el resultado sobre la caracterización de sólidos platónicos pueden ser consultados en el libro *Combinatoria Avanzada* [7], en la sección de gráficas planas.

En el Teorema 1 se dio una caracterización de las gráficas bipartitas en términos de

sus ciclos. A partir de propiedades locales de la gráfica (la paridad de sus ciclos) se concluyó una propiedad global (la propiedad de ser bipartita). En la teoría de gráficas es común encontrar resultados que a partir de propiedades globales, por ejemplo la cantidad de aristas en la gráfica, se obtengan resultados estructurales. Es claro que si una gráfica tiene "demasiadas" aristas, no puede ser bipartita. ¿Cuál es la máxima cantidad de aristas que puede tener una gráfica bipartita con n vértices?
Supongamos que G es una gráfica bipartita de n vértices que se puede dividir en dos conjuntos independientes A y B. Supongamos que A tiene a vértices y que B tiene b. Entonces $n = a+b$. Como A es un conjunto independiente sabemos que no hay ninguna arista entre los vértices de A, análogamente con el conjunto B. Es decir, cualquier arista en la gráfica conecta a un vértice de A con uno de B. En el caso extremo en el que todos los vértices de A están conectados con todos los vértices de B, la gráfica G tendrá ab aristas. Utilizando la desigualdad entre media aritmética y media geométrica obtenemos que

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} = \frac{n}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad ab \leq \frac{n^2}{4}.$$

Por lo tanto, la cantidad de aristas de G es menor o igual a $\frac{n^2}{4}$. Como G es una gráfica bipartita arbitraria, podemos concluir que cualquier gráfica bipartita de n vértices tiene a lo más $\frac{n^2}{4}$ aristas, obteniendo la siguiente proposición.

Proposición 2. *Sea G un gráfica de n vértices. Si G tiene más de $\frac{n^2}{4}$ aristas entonces no es una gráfica bipartita.*

De hecho, con un argumento más complejo, podemos obtener un resultado más fuerte. Esta demostración, por ser más técnica que el resto del material presentado en el artículo, puede ser omitida en una primera lectura. Sin embargo, por ser un ejemplo canónico de la *teoría de gráficas extremales*, se recomienda revisarlo eventualmente.

Teorema 3 (Teorema de Turán)**.** *Sea G una gráfica con n vértices. Si G tiene más de $\frac{n^2}{4}$ aristas entonces G tiene un ciclo de tamaño tres.*

Demostración. Supongamos que G no tiene ningún ciclo de tamaño 3. Demostraremos que G tiene menos de $\frac{n^2}{4} + 1$ aristas. Sean $v_1, \ldots, v_n$ los vértices de G, y E la cantidad de aristas. Para cada $i = 1, \ldots, n$ sea d_i el grado del vértice v_i. Notemos que si sumamos todos los grados, cada arista "aportará" dos unidades a la suma. Entonces

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2E. \tag{1}$$

Ahora tomemos dos vértices adyacentes v_i y v_j. Por hipótesis, no hay un ciclo de tamaño 3, entonces no puede haber un vértice u que sea adyacente tanto a v_i como a v_j. Por lo tanto, el conjunto de vértices adyacentes a v_i es ajeno al conjunto de vértices adyacentes a v_j. Como dentro de los $n-2$ vértices restantes (los vértices que no son ni v_i ni v_j), v_i tiene $d_i - 1$ vecinos y v_j tiene $d_j - 1$ entonces $(d_i - 1) + (d_j - 1) \leq n-2$, de donde $d_i + d_j \leq n$. Ahora veamos que si por cada pareja de vértices adyacentes, v_i y v_j, tomamos el término $d_i + d_j$ y sumamos todos los términos, tendremos E términos en la suma, cada uno acotado por n, obteniendo que la suma está acotada por nE. Por otro lado, para cada i se tiene que d_i aparecerá tantas veces en la suma como aristas saliendo de v_i, entonces la suma será igual a la suma de todos los d_i^2. Esto se resume en la siguiente expresión

$$\sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \sum_{v_i, v_j \text{ adyacentes}} d_i + d_j \leq nE \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} d_i^2\right) \leq E \tag{2}$$

Utilizando la desigualdad entre la media aritmética y la media cuadrática, obtenemos

$$\frac{4E^2}{n^2} = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} d_i\right)^2 \leq \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} d_i^2\right) \leq E, \tag{3}$$

donde la primera igualdad se sigue de la ecuación (1). De la expresión (3), se sigue que $\frac{4E^2}{n^2} \leq E$ y por lo tanto $E \leq \frac{n^2}{4}$, como se quería demostrar. □

El caso en el que n es par, la gráfica bipartita cuyos conjuntos independientes tienen $\frac{n}{2}$ vértices cada uno y en donde cualesquiera dos vértices en conjuntos distintos están conectados por una arista, tiene exactamente $\frac{n^2}{4}$ aristas. Como la gráfica es bipartita, no tiene ciclos pares, en particular no tiene ciclos de tamaño tres, por lo tanto la cota anterior no puede ser mejorada. Es natural preguntarse si podemos enunciar un teorema que nos indique cuántas aristas son "suficientes" para garantizar la existencia de ciclos más grandes. De hecho podemos garantizar algo más fuerte, la existencia de conjuntos de vértices en donde cualquier par está conectado por una arista. Diremos que una gráfica es *completa* si cualesquiera dos de sus vértices están conectados por una arista.

Teorema 4 (Teorema de Turán generalizado)**.** *Sea G una gráfica de n vértices y sea r un entero positivo. Si G tiene más de $\frac{(r-2)n^2}{2(r-1)}$ aristas, entonces hay una subgráfica completa de tamaño r, es decir, un conjunto de r vértices en G con la propiedad de que cualesquiera dos vértices en el conjunto están conectados por una arista.*

En el caso en el que $r = 3$, se obtiene el Teorema 3. Se deja como ejercicio al lector demostrar que la cota dada en el teorema anterior es la mejor que se puede dar. Es decir, para todo n, existe una gráfica con $\lfloor \frac{(r-2)n^2}{2(r-1)} \rfloor$ aristas que cumple que entre cualesquiera r vértices hay dos que no están conectados por una arista. Diversas demostraciones del último teorema pueden ser consultadas en el artículo *Turán's Graph Theorem* [1].
Ahora utilizaremos este resultado para resolver uno de los problemas de la competencia internacional de matemáticas para alumnos de secundaria (IMC) del año 2011.

Problema 4. *Desde un punto O se trazan 15 rayos. ¿Cuál es la mayor cantidad de ángulos obtusos que estos rayos pueden determinar?*
Nota: A cada pareja de rayos se le asocia el ángulo que determinan que mide menos de $180°$.

Solución. Construyamos una gráfica G poniendo un vértice por cada rayo y uniendo dos vértices por una arista cuando el ángulo determinado por los respectivos rayos es obtuso. Notemos que entre cualesquiera cuatro rayos que tomemos habrá dos de ellos determinando un ángulo agudo. Por lo tanto, en G no habrá subgráficas completas de tamaño 4. Si E es la cantidad de aristas en G, aplicando la versión general del teorema de Turán con $r = 4$ y $n = 15$ obtenemos

$$E \leq \frac{4-2}{2(4-1)} 15^2 = 75.$$

Por lo tanto, G tiene a lo más 75 aristas y en el dibujo a lo más hay 75 ángulos obtusos. Para ver que es posible tener 75 ángulos agudos, tomemos un triángulo equilátero con circuncentro en O. Para cada vértice del triángulo trazamos cinco rayos "muy parecidos" al rayo que une a O con el respectivo vértice. Es claro que en este acomodo la cantidad de ángulos obtusos es $3 \cdot 25 = 75$. $\square$

Cuando discutimos el teorema de los cuatro colores se habló sobre colorear vértices. El colorear aristas también es una técnica común y poderosa. Colorear es una forma de clasificar. Por ejemplo, cuando construimos gráficas en donde los vértices representan ciertos objetos que están relacionados entre sí, si las relaciones entre dichos objetos se puede clasificar de manera útil, es conveniente colorear las aristas. Aristas del mismo color indicarán que las relaciones entre los respectivos vértices, o los objetos asociados a dichos vértices, son parecidas en algún sentido. Ilustraremos esto con el siguiente problema tomado del libro *A Course in Combinatorics* [6].

Problema 5. *Del conjunto* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *se escogen* n *subconjuntos distintos. Demuestra que existe un entero* $1 \leq k \leq n$ *que cumple que si a cada uno de los* n *subconjuntos se le retira el elemento* k*, los subconjuntos resultantes siguen siendo distintos.*

Solución. Sean $A_1, \ldots, A_n$ los subconjuntos. Construyamos una gráfica G con vértices $v_1, \ldots, v_n$ en donde cada vértice v_i representará al conjunto A_i. Utilizaremos n colores para colorear las aristas de la gráfica. Dados dos vértices, v_i y v_j, pondremos una arista de color k entre ellos si al eliminar el elemento k los conjuntos A_i y A_j se vuelven iguales. Es claro que entre dos vértices hay a lo más una arista. El problema se reduce a demostrar que hay un color que no se utilizó en la gráfica.
Ahora veamos que podemos eliminar aristas en G sin que la cantidad de colores utilizados se altere y de forma que eventualmente la gráfica ya no tenga ciclos. Tomemos un ciclo $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_r}$, con $v_{i_1} = v_{i_r}$. Sea k un color que aparece en las aristas del ciclo. Observemos la primer arista de color k en el ciclo y supongamos que es una arista con extremos v_{i_j} y $v_{i_{j+1}}$. Entonces los conjuntos A_{i_j} y $A_{i_{j+1}}$ difieren en el elemento k. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $k \in A_{i_j}$ entonces $k \notin A_{i_{j+1}}$. Como $k \in A_{i_j}$ si recorremos el ciclo empezando en v_{i_j} y en la dirección hacia $v_{i_{j+1}}$, en el recorrido eventualmente aparecerá nuevamente un conjunto que tenga a k como elemento y la primera vez que eso suceda también aparecerá una arista de color k. Por lo tanto, borrando la arista entre v_{i_j} y $v_{i_{j+1}}$ garantizamos dos cosas, la cantidad de colores utilizados en la gráfica permanece constante, y la cantidad de ciclos en la gráfica

se reduce en uno. Continuando así llegaremos a una gráfica sin ciclos. Se deja como ejercicio al lector demostrar que una gráfica de n vértices sin ciclos tiene a lo más $n-1$ aristas. Como la gráfica final tiene la misma cantidad de colores que la original y tiene a lo más $n-1$ aristas, entonces la gráfica original tenía a lo más $n-1$ colores. Por lo tanto hay un color que no aparece en G y la demostración está concluida. $\square$

Espero que después de esta breve exposición el lector haya quedado convencido de la versatilidad de la teoría de gráficas, sin embargo esto solo es el comienzo. Recientemente, se ha encontrado un puente entre la teoría de gráficas extremal y la teoría de gráficas aleatorias. Con herramientas extraídas de dichos terrenos, Terence Tao y Ben Green dieron una brillante demostración de que para todo entero k, existe una sucesión de k primos en progresión aritmética [3]. Cuando se colorean las aristas de una gráfica, el estudio de la existencia de subgráficas específicas que cumplen que todas sus aristas tienen el mismo color, ha evolucionado en la teoría de Ramsey. El famoso matemático Paul Erdős y George Szekeres utilizaron los resultados de la teoría de Ramsey para concluir un bello teorema en el área de la geometría combinatoria, conocido como el Problema del Final Feliz [5]. En el área de politopos abstractos se utilizan gráficas para estudiar la simetría de mapas en "superficies" de cualquier dimensión y cualquier característica de Euler [11]. La teoría de gráficas está emergiendo en muchas disciplinas y la olimpiada de matemáticas es un excelente punto de partida para explorarla.
A continuación presentamos 10 problemas que pueden ser resueltos utilizando los conceptos desarrollados en este artículo.

Agradecimientos

Agradezco a Zyanya Tanahara, Rubicelia Vargas y Jorge Garza Olguín por sus valiosos comentarios sobre la escritura y presentación de este texto.

Problemas

1) Demuestra que en cualquier conjunto de 6 números se pueden escoger 3 de forma que el producto de cualesquiera dos es racional, o escoger 3 de manera que el producto de cualesquiera dos de ellos sea irracional.

2) (OMM 2014, versión alternativa) Cada uno de los números del 1 al 2015 se ha coloreado de verde o rojo. Cambiar el color de un número es pasarlo a verde si era rojo, y pasarlo a rojo si era verde.

   Diremos que dos enteros positivos m y n son cuates si alguno de los números $\frac{m}{n}$ o $\frac{n}{m}$ es un número primo. Un *paso* consiste en elegir dos números que sean cuates y cambiar el color de cada uno de los números.

   Muestra que después de realizar algunos pasos es posible hacer que todos los números del 1 al 2014 sean verdes.

3) (Teorema de Euler) Sea G una gráfica conexa que cumple que el grado de cada uno de sus vértices es par. Demuestra que sin importar en cuál vértice se comience, es

posible hacer un recorrdio moviéndose por los vértices y aristas de la gráfica, de manera que cada arista se use exactamente una vez.

4) Sea S un conjunto de $2n$ números. Una pareja de números se dice buena si su diferencia es mayor a 1 pero menor a 2. ¿Cuál es la máxima cantidad de parejas buenas que se pueden formar con elementos de S?

5) (Selectivo UNAM, IMC 2014) Se toman 2016 puntos en el plano de forma que no hay tres de ellos colineales. Se trazan todos los segmentos entre ellos. Muestra que alguna de las siguientes afirmaciones es cierta:

   - Se puede llegar de cualquier punto a cualquier otro utilizando únicamente segmentos de longitud racional.
   - Se puede llegar de cualquier punto a cualquier otro utilizando únicamente segmentos de longitud irracional.

6) Sobre una circunferencia $\mathcal{C}$ se toma un conjunto S de 2016 puntos de manera que para cualquier hexágono con vértices en S se cumple que sus diagonales no son concurrentes. Cada pareja de puntos en S se une por un segmento. ¿En cuántas regiones queda dividido el interior de $\mathcal{C}$?

7) (OMM 2013) Un cubo de $n \times n \times n$ está construido con cubitos de $1 \times 1 \times 1$, algunos negros y otros blancos, de manera en que cada uno de los subprismas de $n \times 1 \times 1$, de $1 \times n \times 1$ y de $1 \times 1 \times n$ hay exactamente dos cubitos negros y entre ellos hay un número par (posiblemente 0) de cubitos blancos intermedios. Muestra que es posible sustutuir la mitad de los cubitos negros por cubitos blancos para que en cada subprisma de $n \times 1 \times 1$, de $1 \times n \times 1$ y de $1 \times 1 \times n$ haya exactamente un cubito negro.

8) (Teorema de Dirac) Sea $n \geq 3$. En un congreso hay n matemáticos. Si se sabe que cada uno de ellos conoce a al menos $\frac{n}{2}$ de los presentes, demuestra que durante la cena es posible sentarlos a todos alrededor de una mesa, de manera que cada quien conozca a las dos personas sentadas a su lado.

9) (OMM 2016) En una cuadrícula de $n \times n$ se escriben los números del 1 al n^2 en orden, por renglones, de manera que en el primer renglón aparecen los números del 1 al n, en el segundo los números del $n + 1$ al $2n$, y así sucesivamente. Una operación permitida en la cuadrícula consiste en escoger cualesquiera dos cuadritos que compartan un lado y sumar (o restar) el mismo número entero a los números que aparecen en esos cuadritos.
   Determina para qué valores de n es posible lograr que todos los cuadritos tengan escrito el número 0 después de repetir la operación tantas veces como sea necesario y, en los casos en que sea posible, determina el mínimo número de operaciones necesarias.

10) (Lista corta de IMO 2001) Definimos un k-clan como un grupo de k personas en el cual cualesquiera dos se conocen. En una fiesta se cumple que cualquier par de 3-clanes tiene al menos una persona en común y que no hay 5-clanes. Demuestra que es posible retirar a dos personas de la fiesta de modo que esta se quede sin 3-clanes.

11) (OMM 2009) En una fiesta de n personas se sabe que entre cualesquiera 4 hay 3 que se conocen dos a dos o hay 3 que ninguno de ellos conoce a los otros. Demuestra que las personas de la fiesta se pueden separar en 2 cuartos de manera que en uno todos se conozcan y en otro no haya dos que se conozcan.

Bibliografía

1) Aigner M., *Turán's Graph Theorem*, The American Mathematical Monthly, vol. 102, 1995, pp. 808-816.

2) Andrescu T., Gelca R., *Putnam and Beyond*, Springer, 2007.

3) Colon D., Fox J., Zhao Y., *The Green-Tao Theorem: An Exposition*, EMS Surveys in Mathematical Sciences, 2014, vol. 1, pp. 249-282.

4) Gonthier G., *Formal Proof, The Four-Color Theorem*, Notices of the AMS, vol. 55, 2008.

5) Morris W., Soltan V., *The Erdös Szekeres Problem on Points in Convex Position- A Survey*, Bulletin of The American Mathematical Society, 2000, vol. 37, pp. 437-458.

6) Lint J.H., Wilson R.M., *A course in combinatorics*, Cambridge University Press, Second Edition, 2001.

7) Pérez Seguí M.L., *Combinatoria Avanzada*, Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas, Instituto de Matemáticas, UNAM, 1a Edición, 2010.

8) Soberón P., *Combinatoria para Olimpiadas*, Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas, Instituto de Matemáticas, UNAM, 1a Edición, 2010.

9) Tang. A., *IMO Training 2008: Graph Theory*.

10) Weeks J. R., *The Shape of Space*, Marcel Dekker Inc., Second Edition.

11) Wilson S., *Maniplexes: Part 1: Maps, Polytopes, Symmetry and Operators*. Symmetry 4, 2012, pp.265-275.