Las simedianas y el punto de Lemoine

Por Mauricio Adrián Che Moguel y Luis Mauricio Montes de Oca Mena

Nivel Avanzado

Al igual que las bisectrices, las medianas, las alturas y las mediatrices de un triángulo, las simedianas también juegan un papel importante en la geometría del triángulo, y sin embargo son menos conocidas por la comunidad matemática olímpica. De su estudio se derivan muchos resultados interesantes que son de gran ayuda en diversos problemas de geometría euclidiana, e inclusive en problemas de Olimpiadas de Matemáticas. Existen varios enfoques para estudiar diversos resultados relativos a las simedianas de un triángulo, tanto geométricos como analíticos. En este artículo desarrollamos en su mayoría técnicas y propiedades más analíticas, aunque también presentamos algunos resultados geométricos.
El estudio de las simedianas se atribuye al geómetra matemático Émile Lemoine, cuyo trabajo se refleja en diversas áreas de las matemáticas, por ejemplo en geometría y teoría de números —tal es el caso de la conjetura de Lemoine. Como veremos más adelante, varias propiedades geométricas llevan su nombre —como el punto de Lemoine y la circunferencia de Lemoine. Antes de adentrarnos a los resultados aquí propuestos, aconsejamos al lector tener presente conocimientos generales de trigonometría, por ejemplo, el teorema de la bisectriz generelizada que será utilizado en el texto. También, al final del artículo dejamos algunos ejercicios relacionados con el contenido de este. Sin más preámbulos, presentamos la definición de simediana.

Definición 1 (Simediana)**.** *Sean ABC un triángulo, D el punto en BC de tal manera que AD es bisectriz del ángulo $\angle BAC$ y M el punto medio del lado BC. Denotemos por M' al punto en BC (M y M' en distintos semiplanos con respecto a AD) que satisface $\angle M'AD = \angle DAM$. Decimos que el segmento AM' (o en ocasiones la recta AM') es la* simediana *del triángulo ABC trazada desde A.*

En algunos casos y dependiendo del contexto, las simedianas también se definen como las rectas isogonales a las medianas, es decir, las rectas que son simétricas a las medianas con respecto a sus respectivas bisectrices internas. Como es natural en matemáticas, el estudio de conceptos básicos se facilita cuando se tienen caracterizaciones necesarias y suficientes de ellos. Las siguientes dos proposiciones caracterizan a las simedianas de manera analítica y nos permitirán probar muchos resultados de forma más simple.

Proposición 1. *Sea ABC un triángulo, M el punto medio del lado BC y M' un punto sobre el lado BC. Denotemos $AC = b$ y $AB = c$. Entonces AM' es simediana del triángulo ABC trazada desde A si y solo si*

$$\frac{BM'}{M'C} = \frac{c^2}{b^2}.$$

Demostración. Denotemos por D al punto en BC tal que AD es bisectriz de $\angle BAC$. Supongamos que AM' es simediana y sin pérdida de generalidad podemos suponer que M' está en el segmento BD y M está en el segmento DC. Del hecho que AM' es simediana se tiene que $\angle M'AD = \angle DAM$ y $\angle BAM' = \angle MAC$, así que denotemos $\alpha = \angle M'AD = \angle DAM$ y $\beta = \angle BAM' = \angle MAC$. Aplicando el teorema de la bisectriz generalizada[2] en el triángulo ABC obtenemos

$$\frac{BM}{MC} = \frac{c}{b} \cdot \frac{\operatorname{sen}(\beta + 2\alpha)}{\operatorname{sen}(\beta)},$$

pero como $BM = MC$, se tiene que $\frac{\operatorname{sen}(\beta)}{\operatorname{sen}(\beta+2\alpha)} = \frac{c}{b}$. Utilizando de nuevo el teorema de la bisectriz generalizada se llega a que

$$\frac{BM'}{M'C} = \frac{c}{b} \cdot \frac{\operatorname{sen}(\beta)}{\operatorname{sen}(\beta + 2\alpha)} = \frac{c^2}{b^2},$$

es decir $\frac{BM'}{M'C} = \frac{c^2}{b^2}$.
Finalmente, como hay un único punto en el segmento BC que lo divide en una razón dada, se sigue que M' es el único punto en el segmento BC que lo divide en razón $\frac{c^2}{b^2}$. En conclusión, AM' es simediana.

$\square$

Proposición 2. *Sea ABC un triángulo y M' un punto en BC. Entonces AM' es simediana del triángulo ABC si y solo si*

$$\frac{\operatorname{sen}(\angle BAM')}{\operatorname{sen}(\angle CAM')} = \frac{AB}{AC}.$$

Demostración. Utilizando el teorema de la bisectriz se llega a que

$$\frac{BM'}{M'C} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\operatorname{sen}(\angle BAM')}{\operatorname{sen}(\angle CAM')}.$$

[2] Ver en el apéndice el teorema 12.

Por la Proposición 1, AM' es simediana si y solo si $\frac{BM'}{M'C} = \frac{AB^2}{AC^2}$ si y solo si $\frac{AB}{AC} = \frac{\text{sen}(\angle BAM')}{\text{sen}(\angle CAM')}$. $\square$

De manera similar a los puntos especiales de un triángulo —como son el ortocentro, incentro, circuncentro y gravicentro, que son los puntos donde concurren las alturas, las bisectrices, las mediatrices y las medianas, respectivamente— en el caso de las simedianas también existe un punto particularmente importante. Este punto es donde las simedianas concurren y se conoce con el nombre de *punto de Lemoine* o *punto simediano*.

Teorema 1. *Las tres simedianas de un triángulo son concurrentes.*

Demostración. Sea ABC dicho triángulo. Denotemos por $BC = a$, $CA = b$ y $AB = c$. Consideremos los puntos D, E y F sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente, de tal forma que AD, BE y CF son las simedianas del triángulo ABC. Utilizando la Proposición 1 se tendrán las igualdades

$$\frac{AF}{FB} = \frac{b^2}{a^2}, \quad \frac{BD}{DC} = \frac{c^2}{b^2}, \quad \frac{CE}{EA} = \frac{a^2}{c^2},$$

por lo tanto $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{a^2}{c^2} = 1$. Es una consecuencia inmediata del teorema de Ceva[3] que las rectas AD, BE y CF son concurrentes. $\square$

Los siguientes dos resultados muestran una manera muy útil de construir geométricamente las simedianas de un triángulo. De hecho, la forma en que estas se construyen utilizan elementos y propiedades que frecuentemente aparecen en problemas de olimpiadas de matemáticas. Algunos ejemplos de estos son el circuncírculo y rectas tangentes a este en los vértices del triángulo.

Proposición 3. *Sean ABC un triángulo y Ω su circuncírculo. Sea P el punto donde las rectas tangentes a Ω, en B y C, se intersecan. Entonces, la recta AP es la simediana del triángulo ABC trazada desde A.*

Demostración. Denotemos por M' el punto donde AP interseca a BC, y por Q el punto donde AP interseca al arco $\widehat{BC}$ (arco que no contiene a A). Además sean $\alpha = \angle BAM'$, $\beta = \angle M'AC$, $AB = c$ y $AC = b$. Debido a la Proposición 2 bastará probar que $\frac{\text{sen}(\alpha)}{\text{sen}(\beta)} = \frac{c}{b}$. Del cuadrilátero cíclico $ABQC$ se tiene $\angle BCQ = \alpha$ y $\angle QBC = \beta$. Además, de la tangencia de las rectas PB y PC con Ω se obtienen las siguientes igualdades de ángulos $\angle PBQ = \alpha$ y $\angle PCQ = \beta$. De esta manera, aplicando el teorema de la bisectriz generalizada en los triángulos PBM' y PCM' obtenemos que,

$$\frac{PQ}{QM'} = \frac{BP}{BM'} \cdot \frac{\text{sen}(\alpha)}{\text{sen}(\beta)} \quad \text{y} \quad \frac{PQ}{QM'} = \frac{CP}{CM'} \cdot \frac{\text{sen}(\beta)}{\text{sen}(\alpha)}.$$

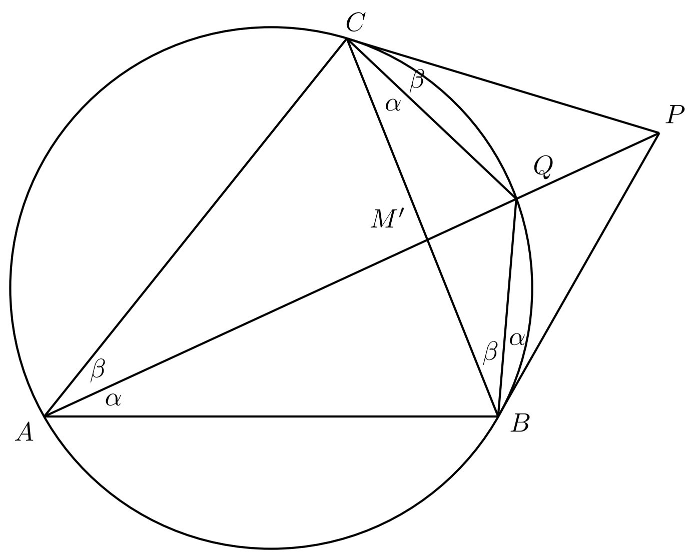
Igualando estas dos últimas ecuaciones y usando el hecho de que $CP = BP$ (debido a la tangencia de los segmentos) se llega a que $\frac{BM'}{M'C} = \left(\frac{\text{sen}(\alpha)}{\text{sen}(\beta)}\right)^2$. Por último notemos

[3] Ver en el apéndice el teorema 15.

que por el teorema de la bisectriz generalizada en el triángulo ABC se tiene la igualdad

$$\frac{BM'}{M'C} = \frac{c}{b} \cdot \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\operatorname{sen}(\beta)},$$

y en conclusión $\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\operatorname{sen}(\beta)} = \frac{c}{b}$, que es lo que se quería probar. $\square$



Como observación adicional, la Proposición 3 nos permite probar, de manera alterna a la demostración del Teorema 1, que las simedianas de un triángulo son concurrentes. A saber, las rectas tangentes al circuncírculo del triángulo ABC por los vértices, forman un triángulo cuyo punto de Gergonne[4] es el punto de Lemoine del triángulo ABC.

Proposición 4. *Sea ABC un triángulo con circuncírculo Ω. La recta tangente a Ω en A interseca a la recta BC en D. Desde D se traza otra recta tangente a Ω, además de AD, la cual interseca a Ω en E. Entonces, AE es la simediana del triángulo ABC trazada desde A.*

Demostración. Denotemos por F al punto donde AE y BC se intersecan. Por el resultado anterior, la recta BD es la simediana de los triángulos BAE y CAE trazada desde los vértices B y C, respectivamente. Esto implica que $\frac{BE^2}{BA^2} = \frac{EF}{FA} = \frac{CE^2}{CA^2}$, de

[4]En un triángulo ABC, sean D, E y F los puntos de tangencia del incírculo con los lados BC, CA y AB, respectivamente. Por el teorema de Ceva, las rectas AD, BE y CF concurren. El punto de intersección se conoce como *punto de Gergonne*.

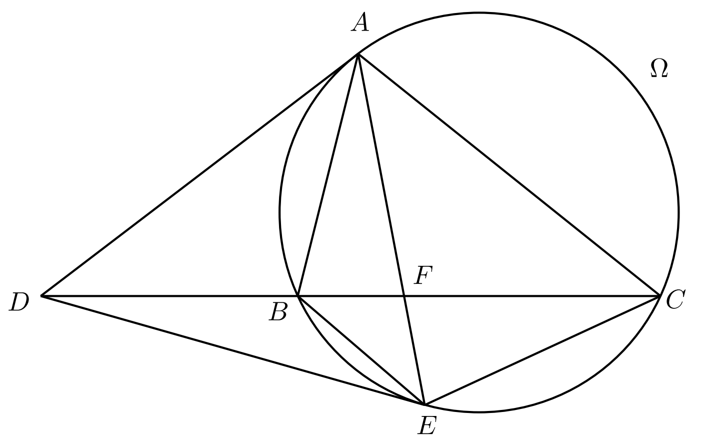
donde $\frac{BE}{BA}=\frac{CE}{CA}$. Por otro lado, debido a la semejanza de los triángulos AFC y BFE, así como a la de los triángulos AFB y CFE se tiene que

$$\frac{BF}{AF}=\frac{BE}{AC} \text{ y } \frac{CF}{AF}=\frac{CE}{AB},$$

respectivamente. Así

$$\frac{BF}{CF}=\frac{\frac{AF\cdot BE}{AC}}{\frac{AF\cdot CE}{AB}}=\left(\frac{AB}{AC}\right)\left(\frac{BE}{CE}\right)=\left(\frac{AB}{AC}\right)\left(\frac{AB}{AC}\right)=\frac{AB^2}{AC^2},$$

por lo que AE es simediana. $\square$



Otro resultado de importancia para nosotros es el siguiente.

Proposición 5. *Sea ABC un triángulo. Se escogen puntos D y E sobre las rectas AB y AC, respectivamente (los puntos son distintos de B y C). Entonces la simediana del triángulo ABC trazada desde A biseca al segmento DE si y solo si los puntos D, B, C y E son concíclicos.*

Demostración. Se demostrará el caso cuando D y E son puntos que están en el interior de los lados AB y AC, respectivamente, pues en otro caso se puede trazar una recta paralela a la original que interseque a los segmentos AB y AC interiormente. Denotemos por M al punto en BC tal que AM es simediana y sea L el punto donde AM interseca a DE. También, sean $AB=c$, $AC=b$, $\alpha=\angle BAM$ y $\beta=\angle MAC$. Debido a que AM es simediana se tiene $\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\operatorname{sen}(\beta)}=\frac{c}{b}$. Utilizando el teorema de la bisectriz generalizada en el triángulo ADE se tiene que

$$\frac{EL}{LD}=\frac{AE}{AD}\cdot\frac{\operatorname{sen}(\beta)}{\operatorname{sen}(\alpha)}=\frac{AE}{AD}\cdot\frac{b}{c},$$

es decir

$$\frac{EL}{LD} = \frac{AE}{AD} \cdot \frac{AC}{AB}. \tag{1}$$

Supongamos que los puntos D, B, C y E son concíclicos. De la potencia desde A hacia el circuncírculo del cuadrilátero $DBCE$ se obtiene $\frac{AE}{AD} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$ y sustituyendo en la ecuación (1) se tiene que $EL = LD$. Por otro lado, si L es punto medio de DE, de la ecuación (1) se tiene que $\frac{AE}{AD} = \frac{c}{b}$, lo que implica que el cuadrilátero $DBCE$ es cíclico. □

En la Proposición 5, cuando los puntos D, B, C y E son concíclicos también se dice que DE es *antiparalela* a BC. De hecho, dado un punto P fuera del lado BC existe una única antiparalela al lado BC que pase por P. Esto se hace construyendo el circuncírculo del triángulo BPC y de esta forma considerar los puntos D' y E' que resultan de intersecar el circuncírculo con los lados AB y AC, respectivamente. Así, la antiparalela a BC por P se construye trazando la paralela a $D'E'$ que pasa por P.

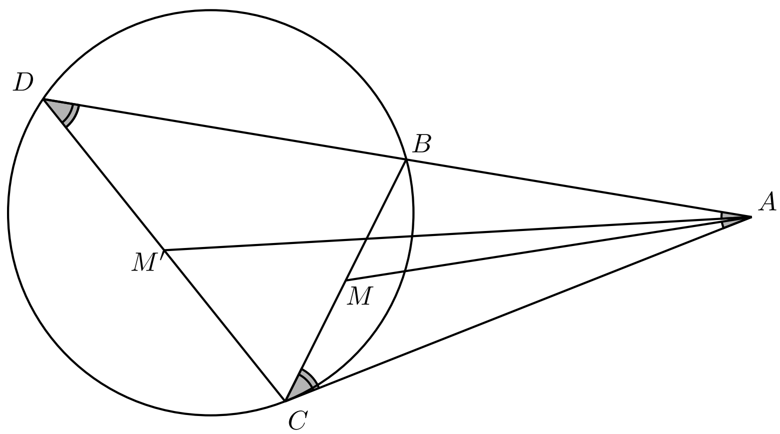
Un caso especial de la Proposición 5 es el siguiente.

Proposición 6. *Sean ABC un triángulo y M un punto sobre el segmento BC. Se escoge un punto D sobre la recta AB tal que el circuncírculo del triángulo BCD es tangente a AC. Entonces, AM es la simediana del triángulo ACD si y solo si M es el punto medio de BC.*

Demostración. Es claro que D está del mismo lado que B con respecto a A y podemos suponer sin pérdida de generalidad que $AB < AD$. El hecho de que el circuncírculo del triángulo BCD sea tangente a AC implica que $\angle CDA = \angle ACB$ y como los triángulos ABC y ACD comparten el ángulo en A, se sigue que son semejantes. Ahora bien, sea M' el punto en DC tal que $\angle DAM' = \angle MAC$. Debido a la semejanza anterior, se tiene que

$$\frac{CM'}{M'D} = \frac{BM}{MC},$$

de modo que M es punto medio de BC si y solo si M' es punto medio de CD. Sin embargo, como AM' y AM son isogonales con respecto a la bisectriz interna del ángulo en el vértice A, M' es punto medio de CD si y solo si AM es simediana del triángulo ACD. Por lo tanto, M es el punto medio de BC si y solo si AM es simediana del triángulo ACD. □



Algunos problemas clásicos de geometría están vinculados con minimizar o maximizar cierta cantidad, en algunas ocasiones es el perímetro, el área o simplemente alguna distancia en particular. Nuestro objetivo será minimizar la suma de los cuadrados de las distancias de un punto a los lados de un triángulo. Para ello primero tenemos las siguientes dos proposiciones.

Proposición 7. *Sean ABC un triángulo y L un punto en su interior (posiblemente sobre los lados). Denotemos por D y E a las proyecciones de L sobre los lados AB y AC, respectivamente. Entonces L está sobre la simediana del triángulo ABC trazada desde A si y solo si*

$$\frac{LD}{LE} = \frac{AB}{AC}.$$

Demostración. Denotemos por $\alpha = \angle DAL$ y $\beta = \angle LAE$. Debido a que los triángulos ADL y AEL son triángulos rectángulos, tenemos que

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\operatorname{sen}(\beta)} = \frac{\frac{LD}{AL}}{\frac{LE}{AL}} = \frac{LD}{LE},$$

es decir $\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\operatorname{sen}(\beta)} = \frac{LD}{LE}$. De esta última igualdad, la equivalencia es inmediata de la Proposición 2. □

Proposición 8. *Sea L el punto de Lemoine de un triángulo ABC. Si d_A, d_B y d_C son las distancias desde L hacia los lados $a = BC$, $b = CA$ y $c = AB$, respectivamente, entonces*

$$\frac{d_A}{a} = \frac{d_B}{b} = \frac{d_C}{c} = \frac{2(ABC)}{a^2 + b^2 + c^2},$$

donde (ABC) denota el área del triángulo ABC.

Demostración. Es una consecuencia inmediata de la Proposición 7 que

$$\frac{d_A}{a} = \frac{d_B}{b} = \frac{d_C}{c} = k,$$

para alguna k. Entonces

$$k(a^2+b^2+c^2) = ka^2+kb^2+kc^2 = ad_A+bd_B+cd_C$$

y así $k = \frac{ad_A+bd_B+cd_C}{a^2+b^2+c^2}$. Por último notemos que

$$(ABC) = (ALB)+(BLC)+(CLA) = \frac{cd_C}{2}+\frac{ad_A}{2}+\frac{bd_B}{2} = \frac{ad_A+bd_B+cd_C}{2},$$

de donde $k = \frac{ad_A+bd_B+cd_C}{a^2+b^2+c^2} = \frac{2(ABC)}{a^2+b^2+c^2}$. □

Teorema 2. *Sean ABC un triángulo y L un punto en su interior. Si d_A, d_B y d_C son las distancias desde L hacia los lados BC, CA y AB, respectivamente, entonces la suma de cuadrados*

$$d_A^2+d_B^2+d_C^2$$

es mínima si y solo si L es el punto de Lemoine del triángulo ABC.

Demostración. Sean $BC = a$, $CA = b$ y $AB = c$. Para un punto P en el interior del triángulo ABC, denotemos por P_A, P_B y P_C a las proyecciones de P sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente. Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz a los conjuntos de números $\{PP_A, PP_B, PP_C\}$ y $\{a, b, c\}$ obtenemos que

$$\begin{aligned}(PP_A^2+PP_B^2+PP_C^2)(a^2+b^2+c^2) &\geq (aPP_A+bPP_B+cPP_C)^2\\ &= [2(PAB)+2(PBC)+2(PCA)]^2\\ &= 4(ABC)^2,\end{aligned}$$

es decir $PP_A^2+PP_B^2+PP_C^2 \geq \frac{4(ABC)^2}{(a^2+b^2+c^2)}$. Además, la igualdad se da si y solo si $\frac{PP_A}{a} = \frac{PP_B}{b} = \frac{PP_C}{b}$. Como es usual, primero veamos que el punto de Lemoine minimiza dicha suma de cuadrados. Sea L el punto de Lemoine del triángulo ABC. Usando la Proposición 8 se tiene que

$$d_A^2+d_B^2+d_C^2 = \left[\frac{2a(ABC)}{a^2+b^2+c^2}\right]^2+\left[\frac{2b(ABC)}{a^2+b^2+c^2}\right]^2+\left[\frac{2c(ABC)}{a^2+b^2+c^2}\right]^2 = \frac{4(ABC)^2}{a^2+b^2+c^2},$$

de donde el punto de Lemoine minimiza la suma de cuadrados. Ahora veamos que L es el único punto que minimiza esta suma. Supongamos que P es tal que la suma de cuadrados

$$PP_A^2+PP_B^2+PP_C^2$$

es la mínima posible, es decir que $PP_A^2+PP_B^2+PP_C^2 = \frac{4(ABC)^2}{(a^2+b^2+c^2)}$, lo cual implica que se tienen las igualdades $\frac{PP_A}{a} = \frac{PP_B}{b} = \frac{PP_C}{b}$. De la primera igualdad $\frac{PP_A}{a} = \frac{PP_B}{b}$ se tiene $\frac{PP_A}{PP_B} = \frac{a}{b}$ y usando la Proposición 7 se tendrá necesariamente que P está sobre la simediana trazada desde C. De manera similar, P está sobre la simedianas trazadas desde B y A. En conclusión, P es el punto de Lemoine del triángulo ABC. □

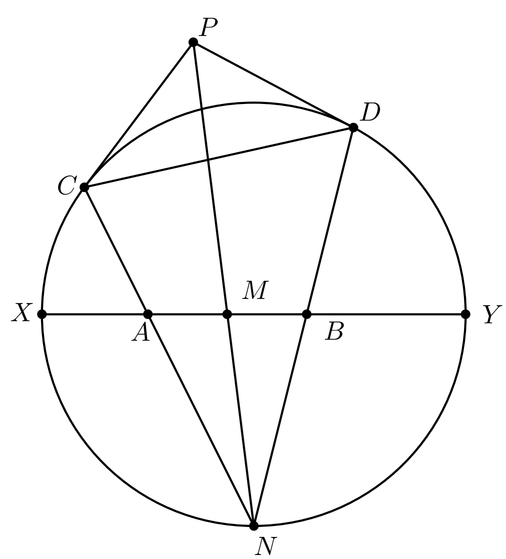
Dentro de los principales objetivos de este artículo está el de introducir a concursantes de diferentes olimpiadas de matemáticas al estudio de las simedianas y las propiedades que de ellas se derivan. Es por ello que ahora mostramos un problema de geometría que fue parte del examen de la XXVIII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas que se llevó a cabo en la Ciudad de Panamá, en septiembre del año 2013. Este apareció como Problema 2 y como veremos a continuación, se resuelve fácilmente utilizando simedianas.

Problema (OIM, 2013/2). *Sean X, Y los extremos de un diámetro de una circunferencia Γ y N el punto medio de uno de los arcos $\widehat{XY}$ de Γ. Sean A y B dos puntos en el segmento XY. Las rectas NA y NB cortan nuevamente a Γ en los puntos C y D, respectivamente. Las tangentes a Γ en C y D se cortan en P. Sea M el punto de intersección del segmento XY con el segmento NP. Demostrar que M es el punto medio del segmento AB.*

Solución. Observemos que NP es la simediana del triángulo CND trazada desde N. Como consecuencia de la Proposición 5 bastará probar que el cuadrilátero $CDBA$ es cíclico. Para ello notemos que

$$\angle NAB = \frac{\widehat{CX} + \widehat{NY}}{2} = \frac{\widehat{CX} + \widehat{XN}}{2} = \frac{\widehat{CN}}{2} = \angle CDN,$$

de donde se sigue que el cuadrilátero $CDBA$ es cíclico. □



Una observación interesante en la solución anterior es que en ella no se utiliza la hipótesis de que XY es un diámetro de Γ. De hecho el problema sigue siendo cierto si XY es una cuerda arbitraria de Γ y bajo la única restricción que los puntos C y D no sean antipodales (para garantizar que las tangentes en C y D se corten).

A continuación veremos otra aplicación de las simedianas en un problema que apareció en la ronda final de Polonia en el año 2000.

Problema. *Sea ABC un triángulo con $AC = BC$, y sea P un punto dentro del triángulo tal que $\angle PAB = \angle PBC$. Si M es el punto medio de AB, demuestra que $\angle APM + \angle BPC = 180°$.*

Solución. Como $\angle PAB = \angle PBC$, la circunferencia circunscrita del triángulo APB es tangente a BC en B. Además, como $AC = BC$, entonces $\angle ABC = \angle BAC$ y se sigue que $\angle PBA = \angle PAC$. Así, la circunferencia circunscrita de APB también es tangente a AC en A. Finalmente, como estas tangentes se intersecan en C, tenemos que la recta CP es la simediana de PAB correspondiente al vértice A, de modo que $\angle APM = \angle BPN$, donde N es la intersección de la recta CP con AB. No obstante, $\angle BPN + \angle BPC = 180°$ por ser C, P y N puntos colineales, de donde concluimos que $\angle APM + \angle BPC = 180°$.

Para concluir este artículo, y antes de sugerir algunos ejercicios para el lector, se tiene el siguiente resultado relacionado con el punto de Lemoine de un triángulo, mismo que está relacionado con un problema de puntos concíclicos.

Teorema 3 (Primera Circunferencia de Lemoine)**.** *Las antiparalelas a los lados de un triángulo trazadas por su punto de Lemoine generan seis puntos de intersección con los lados del triángulo. Entonces, los seis puntos están sobre una misma circunferencia.*

Demostración. Sean ABC un triángulo y L su punto de Lemoine. Sea DE la antiparalela a BC por L, con D sobre AB y E sobre CA. Análogamente, sean GF y HI las antiparalelas a AB y CA, respectivamente, con G y H sobre BC, y F e I sobre AB. Utilizando la Proposición 5 se tendrá que L es punto medio de DE, GF y HI. Por otro lado, como los cuadriláteros $AIHC$ y $BDEC$ son cíclicos se tiene que

$$\angle BIH = \angle ACB = \angle ADE,$$

de donde el triángulo ILD es isósceles. Análogamente los triángulos FLE y HIG son isósceles. De aquí que $LD = LE = LF = LG = LH = LI$ y por tanto, los puntos D, E, F, G, H e I están sobre una circunferencia con centro en L. $\square$

Ejercicios

A continuación dejamos unos ejercicios para el lector. Aconsejamos al lector intentar dichos ejercicios con lápiz y papel en mano.

1. Sea L el punto de Lemoine de un triángulo ABC y M el punto en BC tal que AM contiene a L. Demostrar que

$$\frac{AL}{LM} = \frac{BA^2 + AC^2}{BC^2}.$$

2. Sea ABC un triángulo. Denotemos por ω_B a la circunferencia que pasa por A, B y es tangente a AC. De forma similar, sea ω_C a la circunferencia que pasa por los puntos A, C y es tangente a AB. Por último, sea X el punto de intersección de ω_B y ω_C, que no es A. Probar que AX es la simediana del triángulo ABC trazada desde A.

3. En un triángulo ABC, m_A es la longitud de la mediana trazada desde A, L es el punto de Lemoine del triángulo ABC, L_B y L_C son las proyecciones de L sobre los lados AC y AB, respectivamente. Probar que

$$L_B L_C = \frac{4m_A(ABC)}{AB^2 + BC^2 + CA^2},$$

donde (ABC) denota el área del triángulo ABC.

4. Las bisectrices interna y externa del ángulo $\angle BAC$ de un triángulo ABC, intersecan a la recta BC en E y D, respectivamente. El circuncírculo del triángulo DEA interseca al circuncírculo del triángulo ABC en X. Probar que AX es la simediana del triángulo ABC trazada desde A.

5. **Segunda Circunferencia de Lemoine.** Las rectas paralelas a los lados de un triángulo que pasan por su punto de Lemoine generan seis puntos de intersección con los lados del triángulo. Demostrar que dichos seis puntos están sobre una misma circunferencia, esta se conoce como *segunda circunferencia de Lemoine* o simplemente *circunferencia de Lemoine*.

6. En un triángulo ABC el incírculo toca a los lados BC, CA y AB en los puntos D, E y F, respectivamente. Por F se traza una paralela a BC, la cual interseca a DE en N. Finalmente, AN interseca a BC en P. Probar que D es el punto medio de BP.

7. Dos circunferencias se intersecan en dos puntos. Sea A uno de los puntos de intersección. Desde un punto arbitrario que se halla en la prolongación de la cuerda común de las circunferencias dadas, están trazadas hacia una de éstas dos tangentes que tienen contacto con ésta en los puntos M y N. Sean P y Q los puntos de intersección de las rectas MA y NA, respectivamente, con la segunda circunferencia. Demostrar que la recta MN corta al segmento PQ en su punto medio.

8. Consideremos un triángulo cualquiera ABC. Llamemos P y Q los pies de las alturas trazadas desde B y C respectivamente. Consideremos también $\mathcal{M}$ la recta por los puntos medios de BC y CA, y $\mathcal{L}$ la simediana trazada desde B. Probar que las rectas PQ, $\mathcal{M}$ y $\mathcal{L}$ concurren.

9. Sea ABC un triángulo con circuncírculo Ω y sea ω una circunferencia que es tangente a los lados AB, AC y tangente internamente a Ω. Si I es el incentro de ABC, T es el punto de contacto de ω con Ω y J es la segunda intersección de TI con Ω, probar que $BJ = JC$.

10. Sea ABC un triángulo, $\mathcal{L}$ su punto de Lemoine y sea A_1 el punto en BC tal que las rectas AB, BC, CA y $A_1\mathcal{L}$ son los lados de un cuadrilátero cíclico. Análogamente se definen B_1 y C_1 en los lados CA y AB, respectivamente. Demostrar que los puntos A_1, B_1 y C_1 son colineales.

Bibliografía

1. Castro, Jesús Jerónimo. *Geometría en Olimpiadas de Matemáticas*. Universidad Autónoma de Guerrero.

2. Djukić, Dušan, et. al., *IMO Compendium*. Segunda edición. Springer.

3. Art of Problem Solving: `https://www.artofproblemsolving.com/`