
Sangaku, el segundo teorema de Mikami-Kobayashi

Por Julio César Magaña Cáceres

Nivel Intermedio

La historia de Japón se divide por eras. Cada uno de estos periodos recibe el nombre del respectivo emperador que gobierna. La era Tokugawa, también conocida como Edo, inició en el siglo XVII y finalizó en el siglo XIX. En esta época, Japón estuvo en aislamiento de otros países por cuestiones religiosas, manteniendo su relación solo con China y Corea. Esta política se conoce como *sakoku* o país cerrado. Durante el *sakoku*, algunas personas se entretenían resolviendo problemas de matemáticas, generalmente de geometría, que encontraban escritos en tablas de madera colgadas en los muros y techos de los templos budistas y sintoístas de todo Japón. Estos problemas, son llamados *sangaku*, cuya traducción literal es *tablas de madera* (ver Figura 1).



Figura 1: Cuatro sangaku del santuario Itsukushima en Hiroshima (1885).

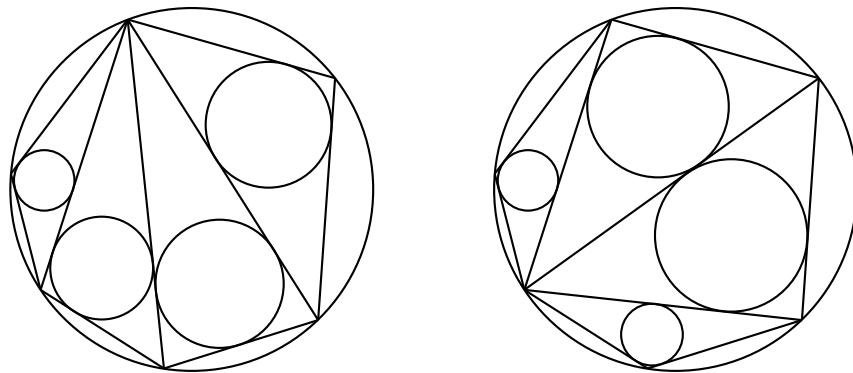
En este artículo vamos a enunciar y demostrar dos sangaku que fueron colgados en el templo de Zenkoji en la ciudad de Nagano y que actualmente son conocidos como los teoremas de Mikami-Kobayashi. El que ahora se conoce como *Segundo teorema*, fue colgado en el año 1796, mientras que el que se conoce como *Primer teorema*, fue colgado en el año 1804. Sin embargo, ambos aparecieron con anterioridad en el libro *Shinpeki Sanpo* del autor Fujita Kagen, en el año 1789 (ver Figura 2).



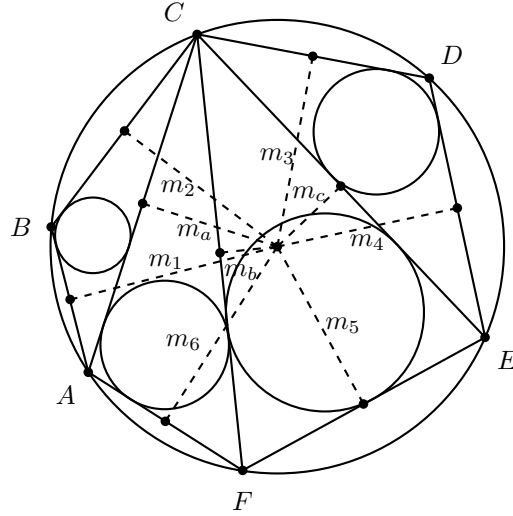
Figura 2: Templo de Zenkoji en la ciudad de Nagano y la ilustración del Segundo teorema de Mikami-Kobayashi en el libro *Shinpeki Sanpo*.

El Primer teorema de Mikami-Kobayashi trata sobre circunferencias inscritas en una triangulación de un polígono convexo cíclico, en donde por *triangulación* entenderemos el trazo de todas las diagonales del polígono desde un vértice específico.

Teorema 1 (Primer teorema de Mikami-Kobayashi). *En cada polígono convexo cíclico, la suma de los radios de las circunferencias inscritas a los triángulos de cualquier triangulación es constante.*



Demostración. La demostración será por inducción en el número de lados del polígono convexo. Primero analizaremos el caso particular de un hexágono convexo cíclico. Consideremos la siguiente figura.



Denotemos por r_1, r_2, r_3 y r_4 los radios de las circunferencias inscritas a los triángulos ABC, ACF, FCE y ECD respectivamente. Si R es el radio de la circunferencia circunscrita al polígono, aplicando el teorema de Carnot² a los triángulos anteriores tenemos que,

$$\begin{aligned} R + r_1 &= m_1 + m_2 - m_a, \\ R + r_2 &= m_a + m_6 - m_b, \\ R + r_3 &= m_5 + m_b + m_c, \\ R + r_4 &= m_3 + m_4 - m_c, \end{aligned}$$

donde m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 y m_6 denotan las distancias del centro de la circunferencia circunscrita a los lados del polígono, y m_a, m_b y m_c denotan las distancias del centro de la circunferencia circunscrita a los segmentos AC, CF y CE , respectivamente.

Esto implica que

$$\sum_{j=1}^4 r_j = \left(\sum_{i=1}^6 m_i \right) - 4R.$$

Observemos que la expresión anterior no depende de la triangulación elegida, pues tal expresión ya no depende de los radios de las circunferencias.

El argumento usado en el hexágono se puede aplicar a un cuadrilátero convexo cíclico para demostrar que $\sum_{j=1}^2 r_j = \left(\sum_{i=1}^4 m_i \right) - 2R$, lo cual constituye el caso base de la inducción.

²El teorema de Carnot establece que en todo triángulo, la suma de las distancias (con signo) desde el circuncentro a los lados del triángulo es igual a la suma de los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita. El signo del segmento es negativo si el segmento se encuentra completamente afuera del triángulo, y es positivo en cualquier otro caso.

Supongamos que para un polígono convexo cíclico de $n > 3$ lados y cualquier triangulación, se tiene que $\sum_{j=1}^{n-2} r_j = (\sum_{i=1}^n m_i) - (n-2)R$, donde los m_i 's denotan las distancias del centro de la circunferencia circunscrita a los lados del polígono, y consideremos un polígono convexo cíclico $A_1 \dots A_{n+1}$ de $n+1$ lados. Aplicando la hipótesis de inducción en el polígono convexo cíclico $A_1 \dots A_n$, con una triangulación desde el vértice A_1 , obtenemos

$$\sum_{j=1}^{n-2} r_j = \left(\sum_{i=1}^{n-1} m_i \right) + m_a - (n-2)R,$$

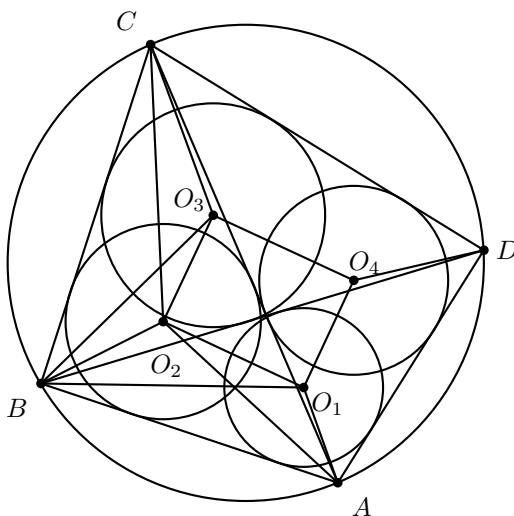
donde m_a es la distancia del centro de la circunferencia circunscrita al segmento $A_n A_1$. Aplicando el teorema de Carnot al triángulo $A_1 A_n A_{n+1}$, tenemos que $R + r_{n-1} = m_n + m_{n+1} - m_a$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n-1} r_j &= \left(\sum_{i=1}^{n-1} m_i \right) + m_a - (n-2)R + m_n + m_{n+1} - m_a - R \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n+1} m_i \right) - (n-1)R. \end{aligned}$$

Esto concluye la inducción. \square

Teorema 2 (Segundo teorema de Mikami-Kobayashi). Si $ABCD$ es un cuadrilátero cíclico y O_1, O_2, O_3, O_4 son los centros de las circunferencias inscritas a los triángulos ABD, ABC, BCD y CDA respectivamente, entonces $O_1 O_2 O_3 O_4$ es un rectángulo.

Demostración. Demostraremos primero que los cuadriláteros $CO_3 O_2 B$ y $BO_2 O_1 A$ son cíclicos.



Aplicando el resultado del Ejercicio 1 tenemos que

$$\angle CO_3B = 90^\circ + \frac{\angle CDB}{2} = 90^\circ + \frac{\angle CAB}{2} = \angle CO_2B,$$

lo que significa que el cuadrilátero CO_3O_2B es cíclico. Luego, $\angle O_3O_2B + \angle O_3CB = 180^\circ$. Aplicando nuevamente el resultado del Ejercicio 1 tenemos que $\angle BO_2A = 90^\circ + \frac{\angle BCA}{2} = 90^\circ + \frac{\angle BDA}{2} = \angle BO_1A$, lo que significa que el cuadrilátero BO_2O_1A es cíclico. Luego, $\angle BO_2O_1 + \angle O_1AB = 180^\circ$. Entonces,

$$\begin{aligned} \angle O_3O_2B + \angle BO_2O_1 &= (180^\circ - \angle O_3CB) + (180^\circ - \angle O_1AB) \\ &= 360^\circ - (\angle O_3CB + \angle O_1AB) \\ &= 360^\circ - \left(\frac{\angle DCB + \angle DAB}{2} \right) \\ &= 360^\circ - 90^\circ = 270^\circ. \end{aligned}$$

Se sigue que $\angle O_1O_2O_3 = 360^\circ - (\angle O_3O_2B + \angle BO_2O_1) = 360^\circ - 270^\circ = 90^\circ$. Análogamente se demuestra que $\angle O_2O_3O_4 = \angle O_3O_4O_1 = \angle O_4O_1O_2 = 90^\circ$. Por lo tanto, $O_1O_2O_3O_4$ es un rectángulo. \square

El *Segundo teorema de Mikami-Kobayashi* lo podemos aplicar para resolver el problema 6 del concurso nacional de la 26^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas, realizada en Guanajuato, Guanajuato, en el año 2012. De los 196 participantes en esta olimpiada, sólo 6 lo resolvieron completamente obteniendo 7 puntos, y 134 participantes obtuvieron cero puntos de calificación. Veamos cómo aplicar el Teorema 2 en la solución de este problema.

Ejemplo 1 (OMM, 2012/6). Considera un triángulo acutángulo ABC con circuncírculo C . Sean H el ortocentro del triángulo ABC y M el punto medio de BC . Las rectas AH , BH y CH cortan por segunda vez a C en D , E y F , respectivamente. La recta MH corta a C en J , de manera que H queda entre M y J . Sean K y L los incentros de los triángulos DEJ y DFJ , respectivamente. Muestra que KL es paralela a BC .

Demostración. De acuerdo con el Ejercicio 2, tenemos JM es bisectriz del ángulo $\angle FJE$. Dado que JB es bisectriz del $\angle FJD$ y JC es bisectriz del $\angle DJE$, los puntos K y L están sobre los segmentos CJ y BJ , respectivamente. Sabemos que H es el incentro del triángulo DEF . Por el Segundo teorema de Mikami-Kobayashi, KL es la diagonal del rectángulo $KHLI$ formado por los incentros respectivos (I es el incentro del triángulo FJE). Como JM es bisectriz del $\angle FJE$ entonces I está sobre JM y este segmento biseca a KL . Por lo tanto, los triángulos KJL y BJC son semejantes y KL es paralela a BC . \square

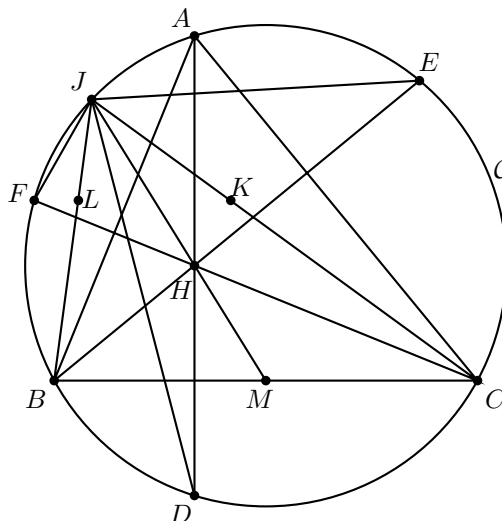
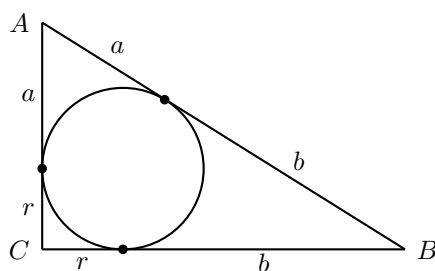


Figura 3: Problema 6 del concurso nacional de la 26ª OMM.

A continuación demostraremos dos resultados básicos que servirán posteriormente para resolver otros problemas sangaku.

Lema 1. Consideremos un triángulo rectángulo ABC con ángulo recto en C . Si r es el radio de la circunferencia inscrita del triángulo, entonces $2r = AC + BC - AB$.

Demostración. El resultado es inmediato por las propiedades de tangencia que se muestran en la siguiente figura.



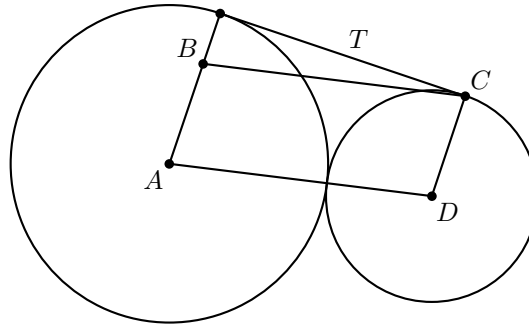
□

Lema 2. Consideremos dos circunferencias, tangentes exteriormente y de radios R_1 y R_2 . Si T es la longitud de la tangente común, entonces $T = 2\sqrt{R_1R_2}$.

Demostración. Si $R_1 = R_2$, el resultado es inmediato.

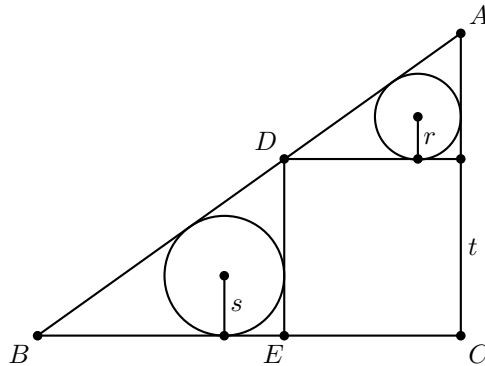
Si $R_1 > R_2$, consideremos la siguiente figura, donde A y D son los centros de las

circunferencias, C es un punto de tangencia y B es el punto tal que el cuadrilátero $ABCD$ es un paralelogramo.



Por el teorema de Pitágoras $(R_1 + R_2)^2 = T^2 + (R_1 - R_2)^2$. Simplificando la expresión obtenemos el resultado. El caso $R_1 < R_2$ es análogo. \square

Ejemplo 2. En un triángulo rectángulo se inscribe un cuadrado de lado t , como se muestra en la figura. Encuentra t en términos de los radios de las circunferencias inscritas a los triángulos pequeños.



Solución. Consideremos $a = BC$ y $b = AC$. Por el Lema 1 tenemos que

$$\begin{aligned} 2s &= t + (a - t) - BD, \\ 2r &= t + (b - t) - DA. \end{aligned} \tag{1}$$

Usando la semejanza de los triángulos pequeños, tenemos que

$$\frac{t}{b - t} = \frac{a - t}{t} = \frac{a}{b} = \frac{s}{r}. \tag{2}$$

Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo BDE , así como la segunda y tercera

igualdades de (2) tenemos que

$$BD = \sqrt{(a-t)^2 + t^2} = \sqrt{t^2 \frac{a^2}{b^2} + t^2} = \sqrt{t^2 \frac{s^2}{r^2} + t^2}.$$

Sustituyendo BD y la tercera igualdad de (2) en la ecuación (1), obtenemos

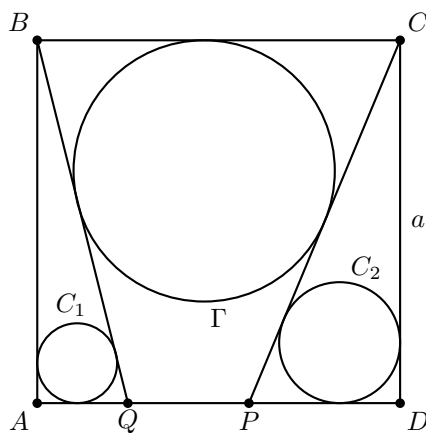
$$2s = t + t \frac{s}{r} - \sqrt{t^2 \frac{s^2}{r^2} + t^2} = t + t \frac{s}{r} - t \frac{\sqrt{s^2 + r^2}}{r} = t \left(\frac{s+r - \sqrt{s^2 + r^2}}{r} \right),$$

de donde $2sr = t(s+r - \sqrt{s^2 + r^2})$. Despejando t y multiplicando por $\frac{s+r+\sqrt{s^2+r^2}}{s+r+\sqrt{s^2+r^2}}$ obtenemos que

$$t = \frac{2sr}{s+r - \sqrt{s^2 + r^2}} = s+r + \sqrt{s^2 + r^2}.$$

Ejemplo 3. Los puntos P y Q están sobre el lado AD del cuadrado $ABCD$, como se muestra en la figura. La circunferencia Γ es tangente a QB , BC y CP . Sean a , r_1 y r_2 el lado del cuadrado y los radios de las circunferencias inscritas a los triángulos AQB y PCD , respectivamente. Si r es el radio de Γ , demuestra que

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a - 2r_1} + \frac{1}{a - 2r_2}.$$



Demostración. Denotemos AQ por k y PD por ℓ . Entonces, $QP = a - (k + \ell)$. Usando el Lema 1 tenemos que

$$QB = a + k - 2r_1, \quad (3)$$

$$PC = a + \ell - 2r_2. \quad (4)$$

Usando el teorema de Pitágoras en el triángulo ABQ tenemos que $QB = \sqrt{k^2 + a^2}$. Sustituyendo esta expresión en la relación (3) y despejando k obtenemos que

$$k = \frac{2r_1(a - r_1)}{a - 2r_1}. \quad (5)$$

Aplicando ahora el teorema de Pitágoras en el triángulo PCD tenemos que $PC = \sqrt{a^2 + \ell^2}$. Sustituyendo esta expresión en la relación (4) y despejando ℓ obtenemos que

$$\ell = \frac{2r_2(a - r_2)}{a - 2r_2}. \quad (6)$$

Calculemos el área del trapecio $PQBC$ de dos maneras distintas. De la fórmula estándar

$$(PQBC) = \frac{(QP + BC)a}{2} = \frac{[(a - (k + \ell)) + a]a}{2} = \frac{2a^2 - a(k + \ell)}{2}.$$

Por otro lado, si O es el centro de Γ , entonces

$$\begin{aligned} (PQBC) &= (QOB) + (BOC) + (COP) + (POQ) \\ &= \frac{(QB + BC + PC)r + PQ(a - r)}{2}. \end{aligned}$$

Sustituyendo las relaciones 3, 4 y la expresión para QP en la relación anterior obtenemos que,

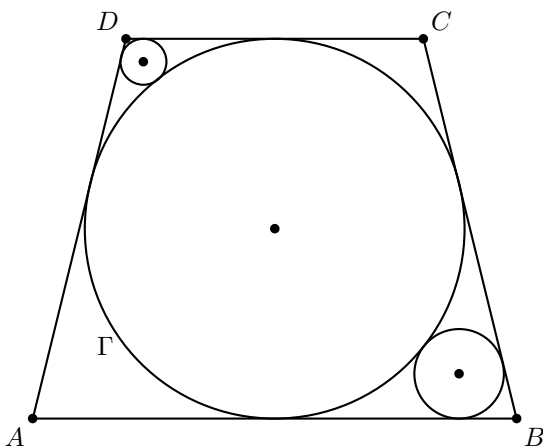
$$\begin{aligned} (PQBC) &= \frac{[(a + k - 2r_1) + a + (a + l - 2r_2)]r + (a - (k + l))(a - r)}{2} \\ &= \frac{2ar - 2r(r_1 + r_2) + 2r(k + \ell) - a(k + \ell) + a^2}{2}. \end{aligned}$$

Igualando las dos expresiones obtenidas para el área del trapecio $PQBC$ obtenemos que $a^2 = 2ar - 2r(r_1 + r_2) + 2r(k + \ell)$, de donde

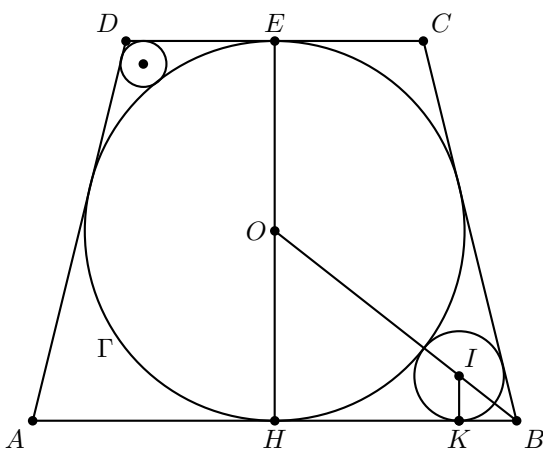
$$\frac{a^2}{r} = 2a - 2(r_1 + r_2) + 2(k + \ell) = [a - 2r_1 + 2k] + [a - 2r_2 + 2\ell]. \quad (7)$$

Finalmente, sustituyendo (5) y (6) en (7) obtenemos el resultado.

Ejemplo 4. Γ es la circunferencia inscrita al trapecio isósceles $ABCD$. Se trazan dos circunferencias tangentes a Γ , cada una tangente a dos lados del trapecio $ABCD$, como se muestra en la figura. Si los radios de las circunferencias pequeñas son 4 y 9, encuentra el valor del radio de Γ .



Solución. Consideremos la siguiente figura.



Denotemos por $a = HB$, $R = OH = OE$ y $r = IK$. Por el Lema 2, $HK = 2\sqrt{Rr}$. Usando la semejanza de los triángulos OHB e IKB tenemos que

$$\frac{IK}{KB} = \frac{OH}{HB} \Rightarrow \frac{r}{a - 2\sqrt{Rr}} = \frac{R}{a} \Rightarrow a = \frac{2R\sqrt{Rr}}{R - r}.$$

Análogamente, si s es el radio de la otra circunferencia pequeña y $b = DE$, entonces

$$b = \frac{2R\sqrt{Rs}}{R - s}.$$

Como el cuadrilátero $ABCD$ tiene una circunferencia inscrita, entonces usando nue-

vamente el teorema de Pitágoras, obtenemos que

$$\begin{aligned}
 AB + DC &= AD + CB \\
 2a + 2b &= 2\sqrt{(2R)^2 + (a-b)^2} \\
 (a+b)^2 &= 4R^2 + a^2 - 2ab + b^2 \\
 ab &= R^2 \\
 \left(\frac{2R\sqrt{Rr}}{R-r}\right)\left(\frac{2R\sqrt{Rs}}{R-s}\right) &= R^2 \\
 \frac{4R^3\sqrt{rs}}{(R-r)(R-s)} &= R^2 \\
 4R\sqrt{rs} &= R^2 - (r+s)R + rs
 \end{aligned}$$

que es equivalente a la ecuación cuadrática $R^2 - (r+s+4\sqrt{rs})R + rs = 0$. Por hipótesis sabemos $r = 9$ y $s = 4$. Sustituyendo estos valores y resolviendo la ecuación cuadrática obtenemos que $R = 1$ o $R = 36$, de los cuales la única solución posible es $R = 36$.

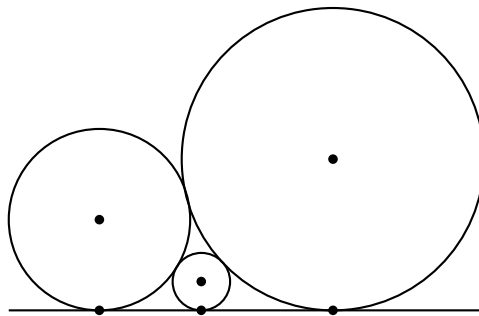
Ejercicios

A partir del Ejercicio 3, enunciaremos problemas sangaku. Todas las figuras son cortesía de las notas de Francisco Javier García Capitán ([1]).

Ejercicio 1. Considera un triángulo ABC con incentro I . Demuestra que $\angle BIC = 90^\circ + \frac{\angle BAC}{2}$.

Ejercicio 2. Usando las hipótesis del Ejemplo 1, demuestra que JM es bisectriz del ángulo $\angle FJE$.

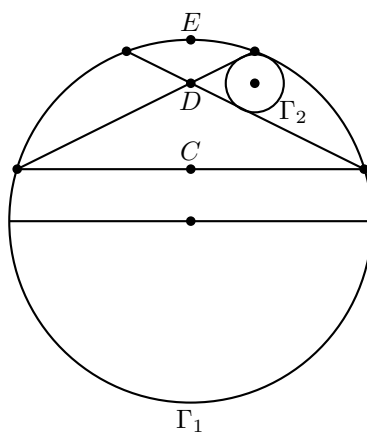
Ejercicio 3. Considera tres circunferencias tangentes a una recta por el mismo semiplano y tangentes entre sí como se muestra en la figura. Encuentra una relación entre sus radios.



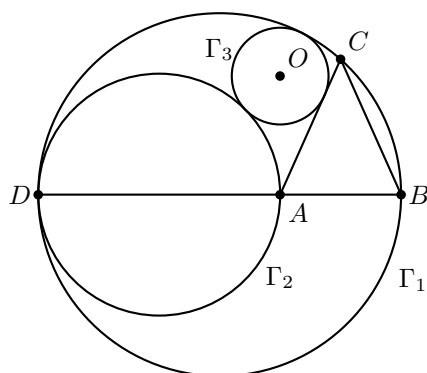
Ejercicio 4. Considera dos circunferencias Γ_1 y Γ_2 tales que Γ_2 es tangente a Γ_1 y a dos cuerdas de ella, como se muestra en la figura. Si r es el radio de Γ_2 , demuestra

que

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{CD} + \frac{1}{DE}.$$



Ejercicio 5. Sean $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ tres circunferencias y ABC un triángulo isósceles tales que, DB es diámetro de Γ_1 , DA es diámetro de Γ_2 y Γ_3 es tangente a Γ_1, Γ_2 y AC (ver figura). Si O es el centro de Γ_3 , demuestra que OA es perpendicular a DB .



Bibliografía

1. Francisco Javier García Capitán. *Resolución de Problemas Bonitos de Geometría con Métodos Elementales*. Notas, 2003.
2. Fukagawa Hidetoshi y Tony Rothman. *Sacred Mathematics: Japanese Temple Geometry*. Princeton University Press, 1943.