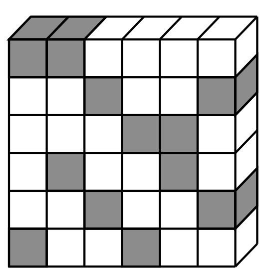
Sobre el Problema 4 del Concurso Nacional de la OMM 2013

Por María Luisa Pérez Seguí

Nivel Avanzado

Durante la coordinación del problema 4 del Concurso Nacional de 2013 surgieron algunas preguntas y observaciones que me parecieron interesantes y que describo a continuación. El problema del Concurso decía:

Problema 0. Un cubo de $n \times n \times n$ está construido con cubitos de $1 \times 1 \times 1$, algunos grises y otros blancos, de manera que en cada uno de los subprismas de $n \times 1 \times 1$, de $1 \times n \times 1$ y de $1 \times 1 \times n$ hay exactamente dos cubitos grises y entre ellos hay un número par (posiblemente 0) de cubitos blancos intermedios; por ejemplo, en la ilustración, $n = 6$ y se muestra una posible rebanada del cubo de $6 \times 6 \times 1$ (formada por 6 subprismas de $1 \times 6 \times 1$).

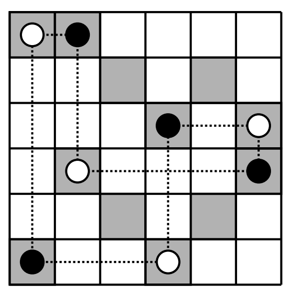


Probar que es posible sustituir la mitad de los cubitos grises por cubitos blancos para que en cada subprisma de $n \times 1 \times 1$, de $1 \times n \times 1$ y de $1 \times 1 \times n$ haya exactamente un cubito gris.

Empezaremos con un problema en el plano, como motivación para la creación del problema, en donde no es necesaria la condición de la separación entre los cubitos grises.

Problema 1. En una cuadrícula de $n \times n$ algunos cuadraditos son grises y otros son blancos, de manera que en cada renglón y en cada columna hay exactamente dos cuadraditos grises. Probar que es posible sustituir la mitad de los cuadraditos grises por blancos para que en cada renglón y en cada columna haya exactamente un cuadradito gris.

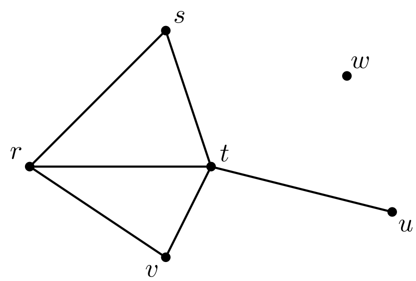
Solución 1a. Pongamos un punto en cada cuadradito gris y pongamos una línea entre una pareja de estos puntos si están en el mismo renglón o en la misma columna. Como las líneas alternan horizontal con vertical, la configuración formada es una unión de ciclos de longitud par, de manera que los puntos pueden pintarse de blanco y negro en forma alternada, lo cual corresponde a la selección buscada. La siguiente figura muestra uno de los ciclos que se forman (en dicha figura se tienen dos ciclos pero solo se está dibujando uno).



La solución anterior puede reescribirse en términos de las llamadas gráficas y, aunque no es necesario, lo que expondremos después se expresa de manera más sencilla con el lenguaje de gráficas, por lo que a continuación incluimos un pequeño resumen de lo que necesitaremos de este tema.

Gráficas

Una *gráfica* consta de dos conjuntos: uno de vértices y otro que consta de pares no ordenados de vértices, a los cuales se les llama aristas. El conjunto de vértices se suele representar por puntos y las aristas por líneas que unen los dos vértices que las forman. Un ejemplo es el siguiente:



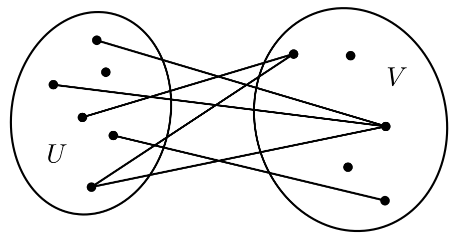
la cual consta de 6 vértices y 6 aristas. Las gráficas sirven para representar muchas cosas, por ejemplo:

- Los vértices pueden ser personas y una arista entre dos de ellas indica que son amigos.
- Los vértices pueden ser países y una arista entre dos de ellos indica que tienen frontera.
- Los vértices pueden ser islas y una arista entre dos de ellas indica que hay un puente que las conecta.

Si una arista a consta de los vértices u y v, escribimos $a = uv$. En este caso decimos que v es *vecino* de u (y, a su vez, u es vecino de v). El *grado* de un vértice v es el número $\delta(v)$ de aristas que lo contienen. Por ejemplo, en la gráfica anterior, el conjunto de vértices es $\{r, s, t, u, v, w\}$ y las aristas son rs, rt, rv, st, tv y tu; los grados de los vértices son: $\delta(r) = 3$, $\delta(s) = 2$, $\delta(t) = 4$, $\delta(u) = 1$, $\delta(v) = 2$ y $\delta(w) = 0$.

Un *ciclo* en una gráfica es una sucesión de aristas que comienza en un vértice, recorre algunos vértices y llega al que iniciaron. Si k es el número de aristas se dice que el ciclo tiene *longitud* k. Por ejemplo, en la gráfica de arriba hay dos ciclos de longitud 3, a saber, (rs, st, tr) y (rt, tv, vr), y uno de longitud 4: (rv, vt, ts, sr). No es difícil demostrar que cuando una gráfica tiene todos sus vértices de grado 2, entonces es la unión de ciclos ajenos.

Decimos que una gráfica $\mathcal{G}$ es *bipartita* si el conjunto de vértices se puede partir en dos subconjuntos no vacíos U y V de manera que entre los vértices de cada conjunto no haya aristas. En este caso escribimos $\mathcal{G} = (U, V)$. El siguiente es un ejemplo de una gráfica bipartita.



Tenemos la siguiente caracterización de gráficas bipartitas.

Proposición. Una gráfica es bipartita si, y solo si, no tiene ciclos de longitud impar.

Demostración. $(\Rightarrow)$ Consideramos una gráfica bipartita. Coloreamos los vértices de uno de los conjuntos de rojo y los del otro, de azul. Dado que no hay aristas entre vértices del mismo conjunto, en cualquier ciclo, los vértices estarán alternando estos dos colores y no es posible que haya ciclos de longitud impar.

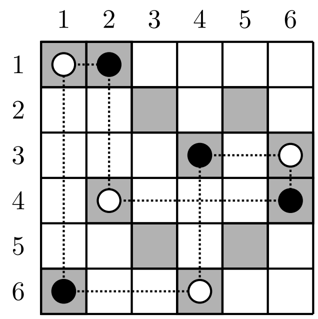
$(\Leftarrow)$ Supongamos que cierta gráfica no tiene ningún ciclo de longitud impar. Tomemos un vértice cualquiera v y pintémoslo de azul. Ahora, pintemos todos los vértices vecinos de v de rojo; posteriormente, pintemos de azul a todos los vértices vecinos de estos rojos, y así sucesivamente. Si en algún momento un vértice debe ser pintado de dos colores distintos, eso quiere decir que hemos llegado hasta él por dos caminos de distinta paridad, y por lo tanto forman un ciclo de longitud impar, lo cual es imposible. Por lo tanto, los vértices de color azul y los vértices de color rojo forman una partición del conjunto de vértices de la gráfica, lo que significa que la gráfica es bipartita.

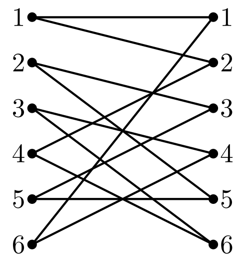
En el lenguaje de gráficas la solución del problema 1 se puede reescribir como sigue:

Solución 1b. Construyamos la gráfica en que los vértices son los cuadraditos grises y se pone una arista entre dos vértices si, y solo si, los cuadraditos que representan están en el mismo renglón o en la misma columna. Cada vértice tiene grado 2, así que es unión de ciclos ajenos. Como las aristas se alternan entre horizontal y vertical, no hay ciclos de longitud impar, así que se pueden pintar de blanco vértices alternados en cada ciclo.

Una segunda solución del problema 1, la cual motivará la solución del problema 4, está basada en el lenguaje de gráficas bipartitas. Esta requiere algo de práctica en gráficas, pues los vértices terminarán siendo renglones o columnas de nuestra cuadrícula.

Solución 1c. Construyamos la gráfica bipartita (U, V) en que los elementos de U son los renglones, los de V son las columnas y hay arista de $u \in U$ a $v \in V$ si, y solo si, el cuadradito en posición (u, v) es gris.



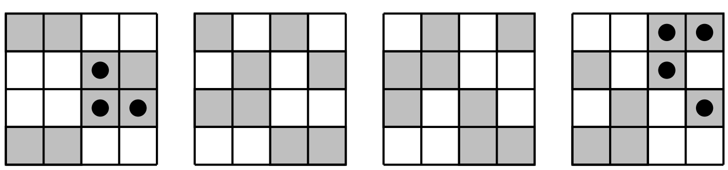


Como cada vértice tiene grado 2 y es bipartita, la gráfica es unión de ciclos de longitud par, así que resolvemos el problema escogiendo alternadamente aristas de cada ciclo y repintamos de blanco los cuadraditos representados por esas aristas.

Ahora veamos que la hipótesis de separación de los cuadraditos grises es necesaria en el cubo.

Problema 2. Prueba que es falso el resultado del problema anterior en dimensión 3, es decir, que existe un cubo de $n \times n \times n$ construido con cubitos de $1 \times 1 \times 1$, algunos grises y otros blancos, en el que en cada uno de los subprismas de $n \times 1 \times 1$, de $1 \times n \times 1$ y de $1 \times 1 \times n$ hay exactamente dos cubitos grises, pero en el que no se pueden sustituir algunos cubitos grises por blancos de manera que quede exactamente uno por cada subprisma.

Solución 2. Bastará construir un ejemplo en el que algún ciclo en la gráfica correspondiente tenga longitud impar. En la siguiente figura se muestran las cuatro rebanadas de un cubo de $4 \times 4 \times 4$ y se señalan los vértices que forman el ciclo.



Procedamos ahora a resolver el problema del Concurso Nacional (problema 0) de dos maneras distintas: la primera (y más difícil) será usando un procedimiento similar al que vimos en el plano.

Solución 0a. Indiquemos con tres coordenadas las posiciones relativas de los cubitos dentro del cubo grande y construyamos una gráfica como sigue:

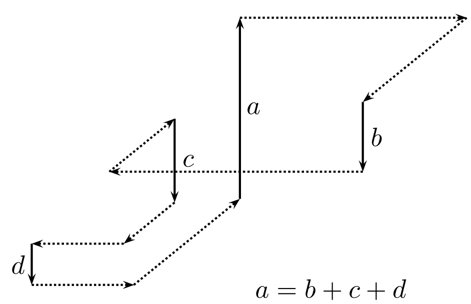
Reemplazamos cada cubito negro por un vértice y ponemos una arista entre todas las parejas de vértices que tengan exactamente dos coordenadas iguales (es decir, que los

cubitos que representen estén en un mismo subprisma de $\mathcal{P}$).
La gráfica construida satisface las siguientes dos condiciones:

1. Cada vértice está en un ciclo. En efecto, si algún vértice no estuviera en ningún ciclo, necesariamente habría vértices que están al final de algún camino y esos vértices tendrían grado 1, lo que contradice la condición del problema.

2. La gráfica no tiene ciclos de longitud impar. Para ver esto podemos proceder de cualquiera de las siguientes formas:

   - La condición de que los cubitos negros están separados a distancia impar nos dice que cada arista une dos puntos cuya suma de coordenadas tiene distinta paridad, y por tanto el ciclo se tiene que cerrar con una cantidad par de aristas y así poder terminar con la misma suma inicial.
   - Al caminar sobre las aristas, lo que se mueve en el camino en un sentido (horizontal, vertical o hacia el fondo), tiene que regresar en sentido inverso y, como todas las longitudes son impares, la única forma de lograrlo es que la paridad del número de segmentos en cada una de las tres direciones sea par.



Tenemos entonces que los vértices se pueden pintar con rojo y con azul de manera alternada en los ciclos. Los cubitos de cada prisma de $\mathcal{P}$ están representados uno por un vértice azul y el otro por un vértice rojo.
La separación de los cuadraditos grises en la hipótesis del problema 0 hace que haya una solución mucho más sencilla usando el procedimiento conocido como *coloración*, que consiste en partir un conjunto en subconjuntos a manera de distinguir los de cada conjunto de los demás de una manera eficiente; en este caso, se distinguen algunos cubitos grises de otros como veremos a continuación.

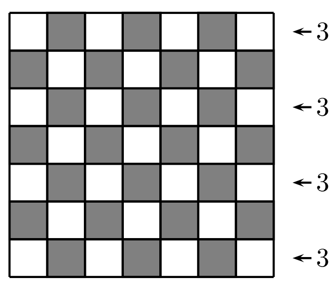
Solución 0b. Indiquemos con tres coordenadas la posiciones relativas de los cubitos dentro del cubo grande. En cada subprisma hay un cubito gris con suma de coordenadas par y otro con suma de coordenadas impar así que basta con escoger todos los de una de estas dos categorías. (Una manera equivalente de decir lo mismo es colorear todos los cubitos del cubo con los colores rojo y azul en forma alternada, como si fuera ajedrez en tercera dimensión; precisamente uno de los colores coincidirá con los cubos que

están en una posición con suma de coordenadas par y el otro color a los que tienen suma de coordenadas impar).
Algunos participantes en el Concurso Nacional intentaron demostrar que el tamaño de la cuadrícula debía ser par. Aunque no lo lograron y no era necesario probar esto para resolver el problema, quedó la incógnita. La intuición que tuvieron esos estudiantes fue buena pues la respuesta es afirmativa como veremos a continuación.

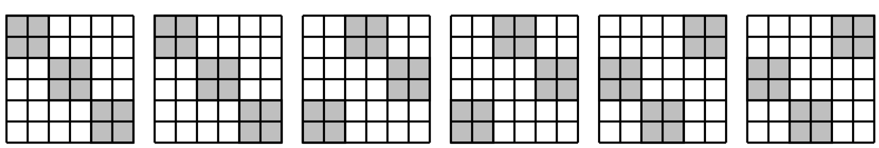
Problema 3. Determinar para qué enteros positivos n es posible construir cubos que cumplan las hipótesis del problema del concurso nacional (Problema 0).

Solución 3. Vamos a ver que es posible si, y solo si, n es par.

Primero, si n es impar, digamos, $n = 2k + 1$ no es posible porque al colorear como tablero de ajedrez con rojo y azul de manera que las esquinas sean azules, en cada uno de los $2k+1$ renglones hay que escoger un lugar rojo para poner un cubito blanco, pero cada renglón impar (hay $k + 1$ de estos) tiene k rojos (uno en cada columna par, de las cuales hay solo k). Por el principio de las casillas, se repite la elección de la columna.



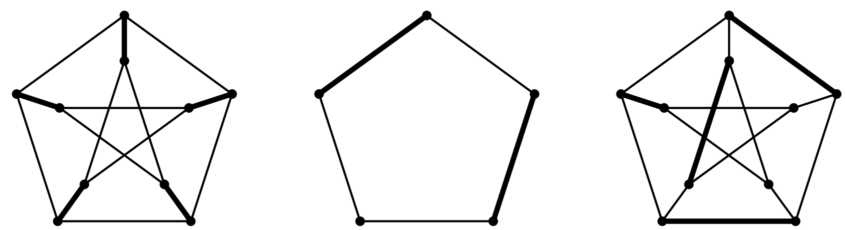
Ahora, si n es par basta repetir el cubo gris de 2×2 moviéndolo sobre las diagonales paralelas a la principal, por capas, como se ilustra en la figura a continuación en el caso $n = 6$.



Es decir, la primera capa de $n \times 2$ se construye poniendo el cubo gris de 2×2 en la diagonal; en las siguientes dos capas se ponen cubos de 2×2 grises encima de la diagonal principal y en la esquina inferior izquierda, etc.

Un problema muy bonito que usa ideas similares a la segunda solución del problema 1 requiere de un teorema de Teoría de Gráficas que expondremos abajo. Necesitamos algunas definiciones y el Teorema de Hall, el cual enunciaremos y demostraremos al final de este artículo.

Un *apareamiento* en una gráfica es cualquier conjunto de aristas ajenas entre sí. Decimos que un determinado apareamiento *satura* algún conjunto de vértices W si cada vértice de W está en alguna de las aristas del apareamiento. En el siguiente dibujo mostramos algunos apareamientos. Los segmentos del apareamiento aparecerán más gruesos que los otros.



Teorema de Hall. Sea $\mathcal{G}$ una gráfica bipartita, $\mathcal{G} = (U, V)$ con partición (U, V). Entonces es posible escoger un apareamiento que satura a U si, y solo si, para todo $S \subset U$ se tiene que el conjunto $N(S)$ que consta de los vértices de V vecinos de al menos un vértice de S tiene por lo menos tantos elementos como S (es decir, $|S| \leq |N(S)|$).

Un arreglo cuadrado de enteros no negativos tal que la suma de los elementos de cada renglón y de cada columna es la misma constante $k \in \mathbb{N}$ se llama *cuadrado mágico de suma* k.

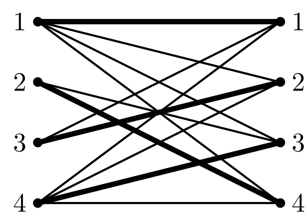
Un ejemplo sorprendente de la aplicación del Teorema de Hall nos dice exactamente cómo son los cuadrados mágicos.

Problema 4. Un arreglo cuadrado de números es cuadrado mágico si, y solo si, es la suma de cuadrados mágicos de suma 1 (estos últimos llamados *matrices de permutación*).

Solución 4. Es claro que si C es suma de cuadrados mágicos de suma 1, entonces C es cuadrado mágico, como se ilustra en el ejemplo siguiente:

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&0&2&2\\3&1&0&0\\0&2&1&1\end{bmatrix}.$$

Recíprocamente, sea C un cuadrado mágico de suma k. Procedemos por inducción sobre k. Para $k = 1$ no hay nada que demostrar. Supongamos que $k > 1$ y sea n el número de renglones de C. Construyamos la gráfica bipartita (U, V) en que U es el conjunto de renglones, V es el conjunto de columnas, y hay una arista de $u \in U$ a $v \in V$ si, y solo si, en la posición (u, v) de C hay un elemento distinto de 0. Por ejemplo, la gráfica que se construiría a partir del cuadrado mágico de arriba sería la siguiente (y se ha señalado el apareamiento que correspondería al primer cuadrado mágico de suma 1).



Veamos que esta gráfica satisface las hipótesis del Teorema de Hall. Sea $S \subset U$ y digamos que $|S| = r$. Sea l el número de columnas que tienen elementos distintos de 0 en estos renglones (es decir, $l = |N(S)|$). Sumemos de dos formas distintas todos los elementos de los renglones de S. Por renglones, la suma de ellos es rk; por columnas, su suma es menor o igual que lk. Entonces $rk \leq lk$ de donde $r \leq l$, como queríamos. Aplicando el Teorema de Hall, tenemos que hay un apareamiento de U a V que satura U. Sea C_1 el arreglo rectangular de números que tiene 1 en cada una de las posiciones de C determinadas por el apareamiento y sea $C_2 = C - C_1$; entonces C_1 es un cuadrado mágico de suma 1 y C_2 es un cuadrado mágico de suma $k - 1$, de donde, por hipótesis de inducción, tenemos el resultado.

Demostración del Teorema de Hall. La implicación ($\Rightarrow$) es clara. Supongamos entonces que para todo $S \subset U$ se tiene que $|S| \leq |N(S)|$. Procedemos por inducción sobre $|U|$. Para $|U| = 1$ la conclusión es obvia. Tomemos una gráfica bipartita (U, V) en la que $|U| > 1$ y $|S| \leq |N(S)|$ para todo $S \subset U$, y supongamos que el resultado es cierto para cualquier gráfica bipartita (U', V') que cumpla la hipótesis y en la que $|U'| < |U|$. Tenemos dos casos:

1. Para todo subconjunto propio S de U se tiene que $|S| < |N(S)|$. Tomemos un elemento u_0 de U y sea v_0 vecino de u_0. Sean $U' = U \setminus \{u_0\}$ y $V' = V \setminus \{v_0\}$. Veamos que la gráfica bipartita $\mathcal{G}' = (U', V')$ satisface las hipótesis del teorema: Sea $S \subset U'$; entonces el conjunto de sus vecinos en $\mathcal{G}'$ es el mismo que en $\mathcal{G}$ salvo tal vez un elemento menos (v_0), pero como estamos suponiendo que la desigualdad es estricta en $\mathcal{G}$, entonces en $\mathcal{G}'$ se tiene la desigualdad (no necesariamente estricta) requerida. Al completar el apareamiento que nos da la hipótesis de inducción con la arista u_0v_0 tenemos el apareamiento buscado.

2. Existe un subconjunto propio S_0 de U tal que $|S_0| = |N(S_0)|$. Tomemos dicho S_0 y usemos la hipótesis de inducción para encontrar un apareamiento entre S_0 y $N(S_0)$. Sean $U' = U \setminus S_0$ y $V' = V \setminus N(S_0)$. Bastará encontrar apareamiento de U' a V'. Para ello, por hipótesis de inducción, debemos ver que la gráfica $\mathcal{G}' = (U', V')$ satisface la hipótesis. Sea $T \subset U'$; usando la hipótesis de la proposición, nuestra suposición sobre S_0 y que el número de elementos de una unión ajena de conjuntos es la suma del número de elementos de los conjuntos

tenemos

$$\begin{aligned}|T| + |S_0| &= |T \cup S_0| \leq |N_{\mathcal{G}}(T \cup S_0)| \\ &= |N_{\mathcal{G}}(T) \cup N_{\mathcal{G}}(S_0)| = |N_{\mathcal{G}'}(T) \cup N_{\mathcal{G}}(S_0)| \\ &= |N_{\mathcal{G}'}(T)| + |N_{\mathcal{G}}(S_0)| = |N_{\mathcal{G}'}(T)| + |S_0|,\end{aligned}$$

de donde, cancelando $|S_0|$, tenemos $|T| \leq |N_{\mathcal{G}'}(T)|$, que es lo que necesitábamos.

Ejercicios

1. Si v es un vértice de una gráfica, su *grado* es el número de aristas de las que v es un extremo. Sea G una gráfica en la que todos los vértices tienen el mismo grado. Si G tiene 28 aristas, ¿cuántos vértices puede tener?

2. Probar que el número de personas en el mundo que tienen un número impar de hermanos es par.

3. Dados u, v vértices en una gráfica, un *camino* C de u a v es una sucesión de vértices alternados con aristas $C = (u = v_0, a_1, v_1, a_2, \ldots, a_n, v_n = v)$ tal que para cada $i = 1, \ldots, n$, la arista a_i tiene por extremos a los vértices distintos v_{i-1} y v_i. Una gráfica G es *conexa* si dados cualesquiera dos vértices u y v existe un uv-camino. Probar que si G es una gráfica, entonces ella o su complemento $\overline{G}$ es conexa. (Nota: $\overline{G}$ es la gráfica que tiene los mismos vértices de G pero dos vértices en $\overline{G}$ forman arista si, y solo si, no la forman en G.)

4. ¿Cuál es el máximo número de aristas que puede tener una gráfica no conexa con n vértices? (*Sugerencia:* Recordar que $\binom{r}{2} = 1 + 2 + \cdots + (r-1)$.)

5. Hay un tesoro en cada cubo de $1 \times 1 \times 1$ de los 343 que forman un cubo de $7 \times 7 \times 7$. Un duende se encuentra en el cubo central; en cada momento puede pasar de un cubo a cualquier otro que comparta un cuadrado con el cubo donde está. Resulta que si regresa a un cubo por el que ya pasó, entonces un monstruo le quita todos los tesoros que ha obtenido hasta el momento. Las salidas están en las 8 esquinas del cubo. ¿Es posible que el duende salga del cubo con todos los 343 tesoros?

6. En una fiesta ningún hombre bailó con todas las mujeres, pero cada mujer bailó con al menos un hombre. Probar que hay dos parejas (m, h) y (m', h') tales que m y h bailaron entre sí, m' y h' bailaron entre sí, pero m no bailó con h' ni tampoco lo hicieron m' y h. (*Sugerencia:* Considerar un arreglo rectangular de $0'$s y $1'$s que represente el problema poniendo 1 en el lugar (i, j) si el i-ésimo hombre bailó con la j-ésima mujer y 0 si no. Tomar un renglón i con máximo número de $1'$s.)

7. Demostrar, con un diseño constructivo, que dado un número par $2n$ de equipos de volibol, es posible organizar un torneo de manera que en cada ronda haya n juegos y después de $2n-1$ rondas cada equipo haya competido exactamente una vez con cada uno de los demás.

8. En un torneo, cada participante debe competir exactamente una vez contra cada uno de los demás. Hay $2n$ participantes y ya se jugaron dos rondas. Probar que todavía se pueden partir los equipos en dos grupos de n jugadores de manera que los participantes de un mismo grupo no hayan competido todavía entre ellos.

9. En un cuarto hay n niños y n juguetes. Cada niño escoge r de los juguetes y resulta que cada juguete es escogido por r niños. Probar que se pueden organizar r rondas de juego de manera que en cada ronda cada niño juegue con alguno de los juguetes que eligió sin repetir.

Bibliografía

1. Bóna M., *A walk through combinatorics*, World Scientific, 2002.

2. Engel A., *Problem-Solving Strategies*, Springer, 1997.

3. Pérez Seguí M. L., *Combinatoria*, Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas, Instituto de Matemáticas, UNAM, 2a edición, 2009.

4. Pérez Seguí M. L., *Combinatoria Avanzada*, Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas, Instituto de Matemáticas, UNAM, 1a edición, 2010.