Triángulos Semejantes

Por Marco Antonio Flores Martínez

Nivel Básico

Los triángulos son probablemente los objetos geométricos más estudiados en un entrenamiento típico de preparación para participar en el concurso nacional de la OMM, y una de las técnicas más fundamentales para resolver problemas de geometría que involucran igualdades de ángulos o proporciones entre segmentos, es la semejanza de triángulos.

Semejanza de triángulos

Decimos que dos triángulos son semejantes, por definición, si existe una correspondencia uno a uno[3] entre los tres ángulos de uno y los tres ángulos del otro de manera que ángulos correspondientes son iguales. La idea intuitiva detrás de la definición de semejanza es que dos triángulos son semejantes si "tienen la misma forma".
Si los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes con $\angle CAB = \angle C'A'B'$, $\angle ABC = \angle A'B'C'$ y $\angle BCA = \angle B'C'A'$, escribimos $ABC \sim A'B'C'$.
Además de la definición de semejanza usada en este artículo, existen otros dos criterios muy útiles para decidir si dos triángulos son semejantes:

1. Criterio LLL (lado lado lado). $ABC \sim A'B'C'$ si $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$, es decir, las tres parejas de lados correspondientes están en la misma proporción.

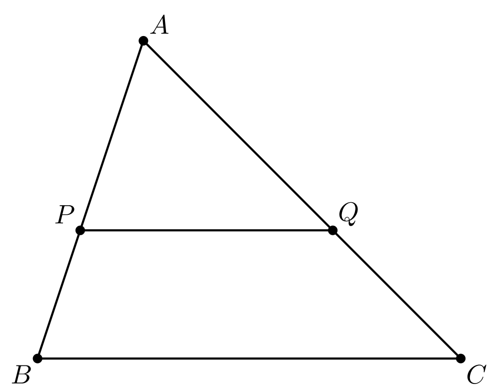
2. Criterio LAL (lado ángulo lado). $ABC \sim A'B'C'$ si $\angle CAB = \angle C'A'B'$ y $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$, es decir, existe una pareja de ángulos iguales y los lados que forman ese ángulo están en la misma proporción.

[3] Una *correspondencia uno a uno* es una correspondencia entre dos conjuntos en la que cada elemento del primer conjunto se corresponde con solo un elemento del segundo conjunto, y cada elemento del segundo conjunto se corresponde con solo un elemento del primer conjunto.

Observación 1. *La afirmación "$ABC \sim A'B'C'$ si $\angle CAB = \angle C'A'B'$, $\angle ABC = \angle A'B'C'$ y $\angle BCA = \angle B'C'A'$", que en este artículo es nuestra definición de semejanza, es también conocida como el Criterio AAA (ángulo ángulo ángulo). Cabe mencionar que, como la suma de los ángulos internos de un triángulo es siempre igual a $180°$, es suficiente que dos pares de ángulos correspondientes sean iguales para que dos triángulos sean semejantes. Por esta razón, a veces a este criterio se le llama AA (ángulo ángulo).*

A continuación enunciamos uno de los teoremas más importantes en la teoría de semejanza de triángulos:

Teorema 1. (**Tales**) *Si ABC es un triángulo y P, Q son puntos sobre las rectas AB y AC respectivamente, entonces la recta PQ es paralela a la recta BC si y sólo si $ABC \sim APQ$.*

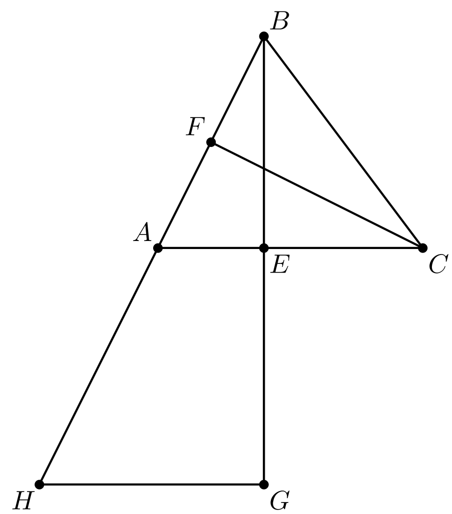


La demostración de este teorema (o de una versión equivalente, en realidad) la puedes encontrar en [BG] (ver referencias). Leerla podría resultarte muy ilustrativo, pues muestra técnicas de demostración en geometría más elementales y universales que no se tratarán en este artículo, como áreas de triángulos y argumentos por contradicción.

Cabe señalar que el teorema establece condiciones tanto necesarias como suficientes (de ahí el término "si y sólo si") para que una recta sea paralela a un lado de un triángulo, y por tanto puede ser aprovechado en ambas direcciones.

Ejercicio 1. *Usa el teorema de Tales para demostrar que si ABC es un triángulo y P, Q son puntos sobre los lados AB y AC respectivamente tales que la recta PQ es paralela al lado BC, entonces $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$.*

Ejemplo 1. *Sean ABC un triángulo y E, F los pies de las alturas desde B y C respectivamente. Un punto G sobre el rayo BE satisface que $EG = CF$, y la recta paralela al lado AC que pasa por G interseca a la recta AB en el punto H. Demuestra que $AH = AC$.*



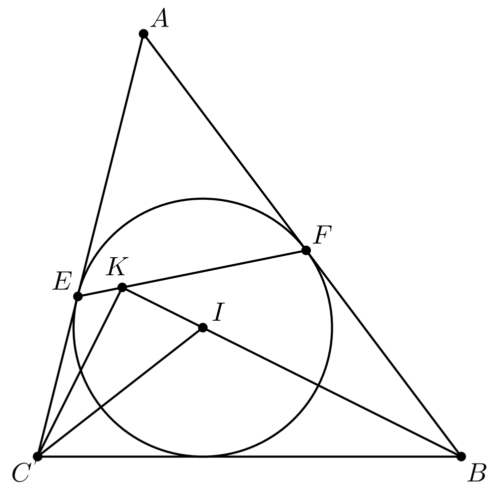
Demostración. Al notar que los segmentos AH y AC forman un triángulo, con mucha seguridad el primer acercamiento de alguien que intenta resolver este problema será intentar probar que los ángulos $\angle ACH$ y $\angle AHC$ son iguales. Pero a menos que el autor de este artículo esté pasando por alto alguna situación obvia, este acercamiento resulta en diversas complicaciones, y conviene aprovechar la teoría de semejanzas de triángulos.

Como ABE y ACF son triángulos rectángulos que comparten el ángulo $\angle BAC$, tenemos por el criterio AAA que $ABE \sim ACF$. Luego, aprovechando el hecho de que $EG = CF$ se tiene:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CF} = \frac{BE}{EG}. \tag{1}$$

Ahora bien, como a estas alturas el lector ya llevó a cabo el ejercicio 1, sabemos que el que AC y HG sean paralelas implica que $\frac{BE}{EG} = \frac{AB}{AH}$, así que por (1) tenemos que $\frac{AB}{AC} = \frac{AB}{AH}$, de donde $AC = AH$. $\square$

Ejemplo 2. *El incírculo del triángulo ABC toca a los lados AB y AC en F y E, respectivamente. La bisectriz del ángulo ABC corta a EF en K. Demuestra que CK es perpendicular a BK.*



Demostración. Definimos I como el incentro de ABC, $\angle BAC := 2\alpha$ y $\angle ABC := 2\beta$. Como $AE = AF$ (puesto que son tangentes a un círculo desde un punto común), tenemos $\angle AFE = 90° - \alpha$, así que $\angle BFK = 90° + \alpha$. También, como $\angle BCI = 90° - \alpha - \beta$, $\angle BIC = 90° + \alpha$. Entonces, por el criterio AAA tenemos que $BFK \sim BIC$, de donde:

$$\frac{BF}{BI} = \frac{BK}{BC}. \tag{2}$$

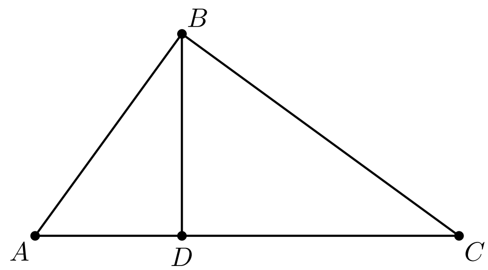
Además, como $\angle FBI = \angle KBC$, tenemos por el criterio LAL que $FBI \sim KBC$. Entonces, como $\angle IFB = 90°$ (puesto que F es punto de tangencia), tenemos que $\angle CKB = 90°$, es decir CK es perpendicular a BK. □

En las olimpiadas de matemáticas hay muchos escenarios que se presentan regularmente en los problemas de geometría, y algunos de ellos involucran semejanzas de triángulos. Por ejemplo, en muchos problemas aparecen dos o incluso las tres alturas de un triángulo, y es importante tener en cuenta que, en automático, han aparecido parejas de triángulos rectángulos semejantes, como los triángulos ABE y ACF del ejemplo anterior.

Otro escenario muy común es el de la altura sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo.

La altura de un triángulo rectángulo

Proposición 1. *Si ABC es un triángulo con $\angle ABC = 90°$ (el ángulo en B es recto) y D es el pie de la altura desde B sobre la hipotenusa AC, entonces $ABC \sim ADB \sim BDC$.*

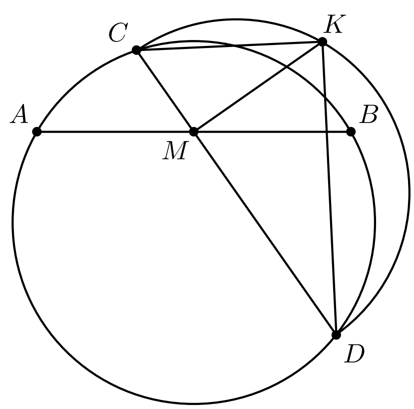


Demostración. Denotamos $\alpha := \angle CAB$. Como la suma de los ángulos internos de los triángulos ABC y de ABD es 180° y $\angle ADB = 90°$, tenemos que $\angle ABD = \angle BCA = \angle BCD = 90° - \alpha$. Además $\angle ADB = \angle ABC = \angle BDC = 90°$. Entonces, por el criterio AAA, tenemos que $ABC \sim ADB \sim BDC$. □

Corolario 1. *Si ABC es un triángulo con $\angle ABC = 90°$ y D es el pie de la altura desde B, entonces $BD^2 = AD \cdot CD$, $AB^2 = AD \cdot AC$ y $CB^2 = CD \cdot CA$.*

Demostración. Como $ABC \sim ADB \sim BDC$, tenemos por el criterio LLL que $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB}$, $\frac{BD}{CD} = \frac{AD}{BD}$ y $\frac{CB}{CD} = \frac{CA}{CB}$, de donde se siguen cada una de las afirmaciones. □

Ejemplo 3. *Sean AB una cuerda en una circunferencia y M su punto medio. Otra cuerda CD en la misma circunferencia pasa por M, y se construye una semicircunferencia con diámetro CD. La recta perpendicular a CD que pasa por M interseca a la semicircunferencia en K. Demuestra que $AM = KM$.*



Demostración. Tenemos que $\angle BAC = \angle CDB$, al ser ángulos inscritos que abarcan el mismo arco en una circunferencia, y también $\angle AMC = \angle DMB$, de manera que $AMC \sim DMB$ (la semejanza de estos dos triángulos es un caso particular de una teoría un poco más general llamada *potencia de un punto*; puedes estudiar este tema en el artículo de la edición número 4, año 1 de esta misma revista). Entonces $\frac{AM}{DM} = \frac{MC}{MB}$, de manera que:

$$MC \cdot DM = AM \cdot MB = AM^2 \tag{3}$$

Ahora bien, como CD es el diámetro de la semicircunferencia que pasa por C, D y K, tenemos que el ángulo $\angle CKD$ es recto. Luego por el corolario anterior tenemos que $KM^2 = MC \cdot DM$, así que por (3) tenemos que $AM^2 = KM^2$, de donde $AM = KM$. $\square$

Un caso particular muy importante de la semejanza de triángulos es la congruencia.

Congruencia de triángulos

Decimos que dos triángulos son congruentes, por definición, si son semejantes y además la proporción entre sus lados correspondientes es igual a 1, es decir, las longitudes de sus lados correspondientes son iguales. Nota que la definición es redundante, pues si dos triángulos tienen pares de lados correspondientes iguales entonces satisfacen el criterio LLL de semejanza.
La idea intuitiva detrás de la definición de congruencia es que dos triángulos son congruentes si son "iguales" salvo (posiblemente) su posición en el plano.
Si los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes con $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$ escribimos $ABC \cong A'B'C'$.
En el caso de la congruencia de triángulos también existen dos criterios (además de la definición que hemos dado) muy útiles para decidir si dos triángulos son congruentes:

1. Criterio LAL (lado ángulo lado). $ABC \cong A'B'C'$ si y sólo si $\angle CAB = \angle C'A'B'$, $AB = A'B'$ y $AC = A'C'$, es decir, existen dos parejas de lados iguales y el ángulo comprendido entre dichos dos lados en un triángulo es igual al ángulo comprendido entre los dos lados correspondientes del otro triángulo.

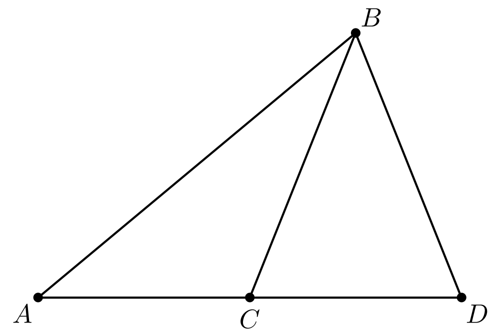
2. Criterio ALA (ángulo lado ángulo). $ABC \cong A'B'C'$ si y sólo si $\angle CAB = \angle C'A'B'$, $\angle ABC = \angle A'B'C'$ y $AB = A'B'$, es decir, existen dos parejas de ángulos iguales (lo cual implica en automático que en la tercera pareja los ángulos también coinciden) y una pareja de lados correspondientes iguales.

Observación 2. *La afirmación "$ABC \cong A'B'C'$ si $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ y $BC = B'C'$", que en este artículo es nuestra definición de congruencia, es también conocida como el Criterio LLL (lado lado lado).*

Ejercicio 2.

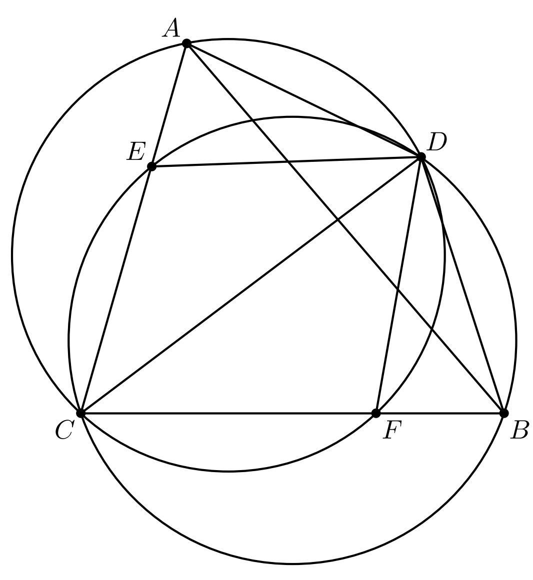
- *Usa el criterio ALA para mostrar que si $ABCD$ es un paralelogramo, entonces $ABC \cong CDA$.*
- *Usa el criterio LLL para mostrar que si ABC es un triángulo isósceles con $AB = AC$ y M es el punto medio de BC, entonces la línea AM, además de ser una mediana, es una altura y es la bisectriz del ángulo $\angle BAC$.*

La condición ALL (ángulo lado lado), que especifica la igualdad entre dos lados y un ángulo que no es el que está comprendido entre dichos lados, por sí sola no implica la congruencia de triángulos. Considera por ejemplo un triángulo isósceles BCD con $BC = BD$ y un punto A sobre la recta CD, fuera del segmento CD. Entonces los triángulos ABC y ABD comparten el lado AB, tienen $BC = BD$ y comparten el ángulo $\angle BAC = \angle BAD$, pero no son semejantes.



Sin embargo, se sabe que si una pareja de triángulos satisface la condición ALL y el lado opuesto al ángulo en que coinciden es el lado más grande del triángulo, entonces los triángulos son congruentes. Esto implica, por ejemplo, que si el ángulo en que coinciden dos triángulos que satisfacen ALL es obtuso o recto, entonces son congruentes.

Ejemplo 4. *Se toman puntos E y F sobre los lados AC y BC, respectivamente, del triángulo ABC de manera que $AE = BF$. Los circuncírculos de ACF y BCE se intersecan de nuevo en D. Prueba que la línea CD biseca a $\angle ACB$.*



Demostración. Como $BCED$ es cíclico, tenemos que $\angle DBC = \angle DEA$, y como $ACFD$ es cíclico, tenemos que $\angle DAC = \angle DFB$. Entonces, por criterio LAL de congruencia, $DAE \cong DFB$. De aquí, $DE = DB$, así que $\angle DEB = \angle DBE$. Finalmente, como $BCED$ es cíclico, $\angle ACD = \angle DBE = \angle DEB = \angle BCD$. □

Problemas

1. En el paralelogramo $ABCD$, los puntos E y F se escogen en la diagonal AC tales que $AE = CF$. Si BE se extiende para cortar AD en H, y BF se extiende para cortar DC en G, demuestra que HG es paralela a AC.

2. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo y sean P, Q, R y S los puntos medios de los lados AB, BC, CD y DA, respectivamente. Demuestra que $PQRS$ es un paralelogramo y que el área de $ABCD$ es el doble de la de $PQRS$.

3. Sea l una recta que no interseca a los lados del triángulo ABC. Sean D, E y F los pies de las perpendiculares bajadas desde A, B y C respectivamente a l. Sean P, Q y R los pies de las perpendiculares desde D, E y F a las rectas BC, AC y AB, respectivamente. Demuestra que DP, EQ y FR son concurrentes.

4. Sean AD, BE y CF las alturas del triángulo ABC. Sean K, M y N los respectivos ortocentros de los triángulos AEF, BFD y CDE. Demuestra que los triángulos KMN y DEF son congruentes.

5. Sea $JHIZ$ un rectángulo, y sean A y C puntos en los lados ZI y ZJ respectivamente. La perpendicular desde A sobre CH interseca a la recta HI en el punto X, y la perpendicular desde C sobre AH interseca a la recta HJ en el punto Y. Demuestra que los puntos X, Y y Z son colineales.

6. (OMM, 2012) Sea ω_1 una circunferencia de centro O y P un punto sobre ella. Sea l la recta tangente por a ω_1 por P. Una circunferencia ω_2 que pasa por O y P interseca a l en Q. El segmento QO interseca a ω_1 en S y la recta PS interseca de nuevo a ω_2 en R. Si las longitudes de los radios de ω_1 y ω_2 son r_1 y r_2 respectivamente, demuestra que $\frac{PS}{SR} = \frac{r_1}{r_2}$.

7. (OMM, 2003) Sea $ABCD$ un trapecio con AB paralelo a DC. Se toman puntos P y Q sobre AB y CD respectivamente, tales que $\frac{AP}{PB} = \frac{DQ}{QC}$. Sea M la intersección de AQ con DP y sea N la intersección de PC con QB. Demuestra que la longitud de MN depende solo de las longitudes de AB y DC, y calcula su valor.

Bibliografía

- R. Bulajich, J.A. Gómez Ortega, *Geometría*, Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas, IM UNAM y SMM, México, 6ta reimpresión, 2009.