Contando sucesiones binarias

Por Pedro David Sánchez Salazar

Nivel Básico

Existen muchos problemas en la Olimpiada, específicamente en combinatoria, que aparentemente son diferentes pero que, desde cierto punto de vista pueden descubrir diferentes relaciones o diferentes formas de usar una misma idea.
Por ejemplo, consideremos el siguiente problema, muy conocido en combinatoria elemental.

Problema 1. *En una bolsa hay* 6 *pelotas azules y* 4 *pelotas rojas, ¿de cuántas formas podemos colocarlas en fila?*

La solución es bien conocida y consiste en colocar los diez espacios que se van a usar, y luego seleccionar cuáles cuatro de ellos tendrán pelotas rojas (y por tanto, el resto tendrán azules). La selección de cuatro de los diez espacios puede hacerse de $\binom{10}{4} = 210$ formas[3], que es la respuesta al problema.

En realidad el hecho de que fueran pelotas rojas y azules es irrelevante, lo único que era de importancia aquí era que había dos tipos de objetos que se colocaban en fila. Para simplificar, nosotros hablaremos en adelante de sucesiones de ceros y unos. Por ejemplo, los ceros representando azul y los unos representando rojo. Así, el arreglo rojo-rojo-azul-rojo... corresponde a la sucesión $0, 0, 1, 0, \ldots$, la cual, por comodidad la representaremos sin espacios como: $0010\ldots$ y a lo que también nos referiremos como una *palabra binaria* de longitud n. Una palabra binaria, a diferencia de un número binario, puede comenzar con 0.

Así, el problema inicial puede plantearse en este contexto como: *Hallar la cantidad de palabras binarias de longitud* 10 *que tienen exactamente* 4 *entradas iguales a* 1.

[3] Ver en el apéndice el teorema 4.

La generalización es inmediata:

Teorema 1. *El número de formas de colocar en fila n objetos que pueden ser de dos tipos, de manera que k sean de un tipo y $n-k$ del otro es $\binom{n}{k}$.*

Y de paso citamos también un resultado muy conocido que se obtiene de la aplicación directa del principio fundamental del conteo.

Teorema 2. *El número de palabras binarias de longitud n (sin restricción en la cantidad de unos o ceros), es igual a 2^n.*

Demostración. Dado que cada palabra se forma con n espacios, y cada espacio tiene dos opciones (puede ser 0 o 1), el número total de palabras es $\underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{n} = 2^n$.

□

Los problemas que nos van a interesar serán similares, pero con restricciones adicionales. A manera de ejemplo, consideremos el siguiente problema.

Problema 2. *¿Cuántas sucesiones binarias de longitud diez, con cuatro posiciones 1, no tienen dos 1 en posición consecutiva?*

De manera más informal: ¿cuántas palabras binarias de longitud 10 y con 4 unos no contienen 11?

Por ejemplo: 1001010001 no tiene unos consecutivos, mientras que 1001110000 tiene unos consecutivos en las posiciones 4 y 5 así como en las posiciones 5 y 6.
Antes de resolverlo, señalamos que este problema es muy común y aparece en una gran variedad de contextos. Por ejemplo, un enunciado típico sería:

¿De cuántas formas se pueden acomodar en fila a 4 niñas y 6 niños de manera que no haya 2 niñas juntas?

En este caso, las niñas corresponden a 1 y los niños a 0, cada forma de acomodar a los niños y niñas corresponde a una palabra binaria de longitud 10, y cada palabra corresponde a su vez a una forma de acomodar a todos los niños (niños y niñas).
Este problema se resuelve por la "estrategia de los separadores". Dado que los ceros "separan" a los unos, colocamos primero todos los ceros y luego seleccionamos algunos de los espacios entre ellos para colocar los unos.
Así, como tenemos 6 ceros la configuración inicial es:

$$\_\,0\,\_\,0\,\_\,0\,\_\,0\,\_\,0\,\_\,0\,\_$$

Observa que hay siete espacios, puesto que podríamos poner 1 también por "afuera" de los ceros. Cada vez que seleccionemos cuatro espacios (indicados por asteriscos en los ejemplos que siguen), obtenemos una sucesión binaria con 4 unos en donde no hay unos consecutivos.

Ejemplos:

$$\_\,0\,\underline{*}\,0\,\_\,0\,\underline{*}\,0\,\underline{*}\,0\,\_\,0\,\underline{*} \to 0100101001$$
$$\underline{*}\,0\,\_\,0\,\_\,0\,\underline{*}\,0\,\_\,0\,\underline{*}\,0\,\underline{*} \to 1000100101$$

Pero no sólo cada elección corresponde a una palabra binaria que no contenga 11, sino cada palabra que no contiene 11 corresponde a una elección de cuatro espacios. Por tanto, debe haber la misma cantidad de elecciones que de palabras binarias sin 11.
Dado que hay siete espacios y se escogen cuatro de ellos, el número de elecciones es $\binom{7}{4} = 35$, y por tanto, hay 35 sucesiones binarias de longitud 10 en donde no aparecen dos unos consecutivos con cuatro unos.
El argumento se puede usar para demostrar el siguiente resultado general.

Teorema 3. *El número de palabras binarias formadas por m ceros y n unos, de manera que no haya dos unos consecutivos es $\binom{m+1}{n}$.*

Vamos a variar un poco el enunciado del problema anterior para obtener uno nuevo.

Problema 3. *¿Cuántas palabras binarias de longitud 10 no tienen dos unos consecutivos?*

Hacemos notar que la diferencia es que ahora la cantidad de unos (o ceros) no está dada sino que puede ser cualquier valor.

Una estrategia muy común cuando se pide calcular una cantidad en un problema, es intentar el problema con algunos casos más pequeños para tratar de hallar alguna regla o patrón que nos permita resolver el problema original. Por ello, procedemos a analizar el problema con sucesiones de menor longitud.

- Si $n = 1$, hay 2 posibilidades: 0, 1.
- Si $n = 2$, hay 3 posibilidades: 00, 01, 10.
- Si $n = 3$, hay 5 posibilidades: $000, 001, 010, 100, 101$.
- Si $n = 4$, hay 8 posibilidades: $0000, 0001, 0010, 0100, 0101, 1000, 1001, 1010$.
- Si $n = 5$, hay 13 posibilidades: 00000, 00001, 00010, 00100, 00101, 01000, 01001, 01010, 10000, 10001, 10010, 10100, 10101.

Al parecer, el número de formas para cierta longitud n lo podemos hallar sumando el número de formas para $n - 1$ y $n - 2$. Continuando el patrón:

$$2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots$$

obtenemos como respuesta 144. Sin embargo, sabemos que existe la posibilidad de que el patrón sea aparente, que en realidad no continúa siempre de la misma forma. Necesitamos una justificación.

Denotemos por c_n al número de sucesiones binarias de longitud n que no tienen dos unos consecutivos. Así, por ejemplo, $c_1 = 2, c_2 = 3$ y $c_3 = 5$.

Ahora, hay dos casos dependiendo de si la sucesión inicia con 0 o inicia con 1.

- Cuando la sucesión inicia con cero, es de la forma

  $$\texttt{0}\,\_\,\_\,\_\,\ldots\,\_$$

  donde falta por llenar $n-1$ posiciones, lo cual por definición puede hacerse de c_{n-1} formas.

- Cuando inicia con uno, la segunda posición queda obligada a ser cero, por lo que debe tener la forma

  $$\texttt{1}\;\texttt{0}\,\_\,\_\,\_\,\ldots\,\_$$

  donde falta por llenar $n-2$ espacios y que, por definición, puede hacerse de c_{n-2} formas.

Por lo tanto,

$$c_n = c_{n-1} + c_{n-2}, \qquad (n > 2) \tag{1}$$

con lo cual queda probado que el patrón efectivamente continúa y la respuesta sí es 144.

Ahora, lo más seguro es que hayas notado que la recurrencia (1) es similar a la de Fibonacci, o incluso reconociste la serie de números que escribimos arriba. Sin embargo sería un error decir que el número de palabras binarias de longitud n sin dos unos consecutivos es el n-ésimo número de Fibonacci.

Recordemos que los números de Fibonacci están definidos por la relación

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \qquad (n > 1) \tag{2}$$

con las condiciones iniciales $F_0 = 0$ y $F_1 = 1$, por lo que tenemos $F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5$, etcétera. De esta forma, el resultado general para este problema es el siguiente:

Teorema 4. *El número c_n de palabras binarias de longitud n en donde no aparecen dos unos consecutivos es igual al $(n+2)$-ésimo número de Fibonacci, esto es, $c_n = F_{n+2}$.*

En este punto hacemos una pausa para mencionar brevemente una conexión de los problemas anteriores con problemas de acomodos.

Problema 4. *Determinar el número d_n de formas en que una cuadrícula de $2 \times n$ puede ser cubierta completamente con n dominós (piezas de 1×2) sin traslapes.*

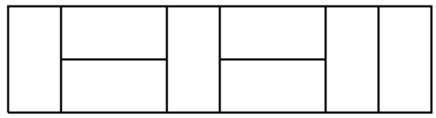

Figura 1: Cubierta de una cuadrícula de 2×8 con 8 dominós.

Por ejemplo, la Figura 1 muestra una forma de acomodar 8 dominós para cubrir una cuadrícula de 2×8.
A primera vista, este problema no parece tener relación con acomodar niños y niñas, o unos y ceros. Sin embargo, notemos que al escribir una palabra binaria sin unos consecutivos, cada vez que aparece 1 en medio de la palabra, necesariamente debe ocurrir 0 en la siguiente posición, por lo que el 10 "funciona" como un bloque. Ilustremos esto con unos ejemplos:

$$\begin{aligned} 0100010100 &= [0][10][0][0][10][10][0] \\ 1001000100 &= [10][0][10][0][0][10][0] \end{aligned}$$

Ahora, observemos que los "bloques" que sólo constan de un cero ocupan una posición, pero los que constan de 10 ocupan dos posiciones. Esta es la clave para hacer la correspondencia entre palabras binarias y arreglos: cuando aparece un cero ponemos un dominó vertical (ocupando una columna) y cuando aparezca 10 ponemos dominós horizontales.

De este modo, el acomodo en la Figura 1 corresponde a la palabra binaria

$$[0][10][0][10][0][0] = 01001000.$$

Si d_n es el número de formas de acomodar los dominós en una cuadrícula de $2 \times n$, la Figura 2 es una ilustración de por qué se cumple la recurrencia correspondiente:

$$d_n = d_{n-1} + d_{n-2}.$$

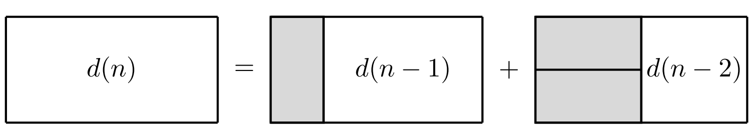

Figura 2: Obtención de la recurrencia tipo Fibonacci para acomodos de dominós.

Es natural preguntar qué pasaría si aparece 1 al final de la palabra, pues no es posible colocar un dominó horizontal en la última columna. Lo que sucede es que $d_1 = 1$,

$d_2 = 2$, por lo que d_n vuelve a ser la sucesión c_n pero recorrida, es decir, $d_n = c_{n-1}$. Combinando este último resultado con el teorema 4 obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 5. *El número de formas d_n en que se puede cubrir una cuadrícula de $2 \times n$ con n dominós es igual al $(n+1)$-ésimo número de Fibonacci, esto es, $d_n = F_{n+1}$.*

Regresando a palabras binarias, recordemos el siguiente resultado sobre combinaciones:

Teorema 6. *Para todo número entero $n \geq 0$ se cumple:*

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Vamos a dar una prueba con la idea de las palabras binarias. Por el teorema 2 sabemos que el lado derecho de la identidad está contando la cantidad de palabras binarias de longitud n (sin importar la cantidad de unos).

Por otro lado el teorema 1 nos dice que $\binom{n}{k}$ está contando el número de palabras binarias de longitud n que tienen exactamente k unos.

Concluimos la prueba notando entonces que el lado derecho de la identidad está realizando el mismo conteo que el lado derecho (palabras binarias de longitud n), pero dividiéndolo por casos dependiendo de cuántos unos tiene la palabra: $\binom{n}{0}$ es el número de palabras sin unos, $\binom{n}{1}$ es el número de palabras con sólo un 1, $\binom{n}{2}$ es el número de palabras con dos posiciones iguales a 1 y así sucesivamente.

Sabemos que el teorema anterior lo que nos está diciendo es que la suma de los números en la n-ésima fila en el triángulo de Pascal es igual a 2^n. Nos preguntamos si existe un teorema similar en el caso con restricciones.
Para ello, vamos a reescribir el teorema 3 como sigue, observando que si una palabra tiene longitud n y k unos, entonces tendrá $n-k$ ceros.

Teorema 7. *El número de palabras binarias de longitud n que contienen k unos pero sin que aparezcan unos consecutivos es $\binom{n+1-k}{k}$.*

Ahora, supongamos que queremos contar todas las palabras binarias de longitud n que no contienen 11, dependiendo de la cantidad de unos que tengan.

- Cuando no hay unos, hay $\binom{n+1}{0}$ palabras.
- Cuando hay un uno, hay $\binom{n+1-1}{1} = \binom{n}{1}$ palabras.
- Cuando hay 2 unos, hay $\binom{n+1-2}{2} = \binom{n-1}{2}$ palabras.
- Cuando hay 3 unos, hay $\binom{n+1-3}{3} = \binom{n-2}{3}$ palabras.

Y así sucesivamente.

Pero sabemos por el teorema 4 que la cantidad total de palabras binarias restringidas de longitud n es igual a F_{n+2}. Obtenemos entonces la siguiente identidad (donde se toman tantos sumandos del lado izquierdo como sea posible):

$$\binom{n+1}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n-1}{2} + \binom{n-2}{3} + \cdots = F_{n+2}$$

que se puede expresar de manera un poco más estética haciendo el cambio $m = n + 1$.

Teorema 8. *Para todo entero $m > 0$ se cumple:*

$$\binom{m}{0} + \binom{m-1}{1} + \binom{m-2}{2} + \cdots + \binom{m-k}{k} + \cdots = F_{m+1}$$

donde F_m es el m-ésimo número de Fibonacci.

Pero no sólo obtenemos una fórmula algebraica, también obtenemos un resultado sobre sumas en el triángulo de Pascal.

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \quad 8 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \qquad 34 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1
\end{array}$$

Figura 3: Sumas en el triángulo de Pascal

Observemos que si sumamos las entradas "por diagonales" del triángulo de Pascal como indica la figura 3, obtenemos siempre un número de Fibonacci, puesto que las entradas que estamos sumando son precisamente las que aparecen en el teorema 8.

Problemas

1. ¿De cuántas formas puedes descomponer n como sumas de 1 y 2? (El orden importa: por ejemplo, hay 3 formas de descomponer $n = 3$: $1+1+1, 1+2, 2+1$).

2. ¿De cuántas formas puedes descomponer n como suma de números impares? (El orden importa).

3. Una ranita quiere subir una escalera de 20 escalones. Si en cada brinco sube 2 o 3 escalones, ¿de cuántas formas puede la ranita subir la escalera y caer exactamente en el escalón 20? (Es decir, si está en el escalón 18, a fuerza tiene que dar un brinco de 2 escalones para terminar).

4. Un domador de leones quiere colocar 5 leones y 4 tigres en fila, de manera que ningún tigre quede junto a otro tigre. ¿De cuántas formas puede hacerlo?

5. ¿De cuántas formas puede hacer el domador un arreglo de 9 animales salvajes (leones o tigres) de tal manera que no haya dos tigres juntos, pero puede usar cualquier cantidad de tigres o leones?

6. ¿Cuántos subconjuntos tiene $\{1, 2, \ldots, n\}$ donde no haya elementos consecutivos?

7. Demuestra que el número de palabras binarias de tamaño n con un número impar de unos es igual al número de palabras binarias de tamaño n con un número par de unos.

8. Demuestra que si F_n es el n-ésimo número de Fibonacci, entonces
$$F_0 + F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1.$$

9. Demuestra que si F_n es el n-ésimo número de Fibonacci, entonces
$$F_0 + F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1}.$$

10. Demuestra que si F_n es el n-ésimo número de Fibonacci, entonces
$$F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n} - 1.$$

11. Sea a_n el número de palabras binarias de longitud n en las que no aparecen los bloques 101 ni 111. Determina a_{16}.

Bibliografía

1. Benjamin, T. Arthur; Quinn, Jennifer J. *Proofs that Really Count – The Art of Combinatorial Proof.* The Mathematical Association of America. Dolciani Mathematical Expositions 27, 2003.

2. Herman Jiri; Kucera, Radan; Simsa, Jaromir. *Counting and Configurations – Problems in Combinatorics, Arithmetic and Geometry.* Canadian Mathematical Society (2000).