
El poder de las proyecciones sobre una línea

Por Jesús Jerónimo Castro

Nivel Avanzado

El Teorema de Helly

Juanito dibujó varios polígonos en una cartulina los cuales quiere recortar para elaborar la tarea que la maestra de la escuela le encomendó. Como Juanito es muy inquieto y tiene espíritu aventurero, se da cuenta que si escoge dos cualesquiera de los polígonos, entonces puede hacer un corte vertical con sus tijeras de manera que atraviesa a los dos polígonos. ¿Será posible que con un sólo corte vertical atraviere a todos los polígonos al mismo tiempo? Como veremos más adelante, la respuesta es sí. La justificación de que esto es posible realizarse se fundamenta en uno de los teoremas más importantes de Geometría Combinatoria. Dicho teorema se debe al matemático austriaco Eduard Helly (1907). La versión en dimensión 1, es decir, para conjuntos de segmentos en una línea, dice lo siguiente:

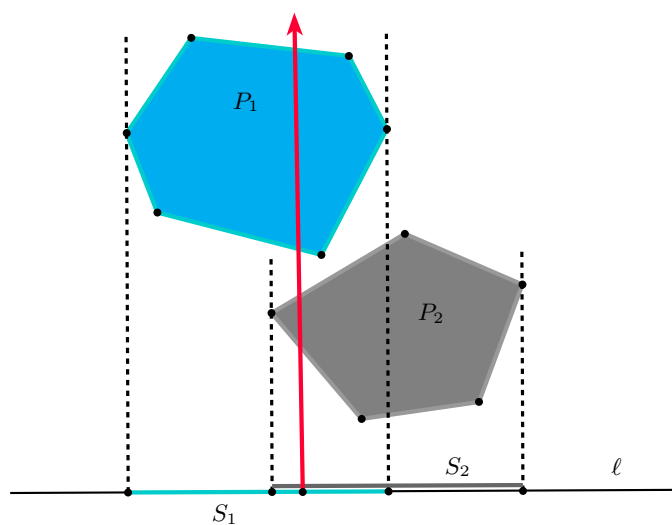
Teorema de Helly (en dimensión 1). *Sea \mathcal{F} una familia finita de segmentos sobre una línea recta. Si cualesquiera dos segmentos de \mathcal{F} tienen punto en común, entonces existe un punto en común para todos los segmentos de \mathcal{F} .*

Demostración. Supongamos que la línea coincide con la recta numérica y sea $\mathcal{F} = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ nuestra familia de segmentos. Para cada segmento $S_j, j = 1, 2, \dots, n$, denotemos por I_j y D_j sus extremos izquierdo y derecho, respectivamente. De entre todos los extremos derechos, consideremos aquél que está a la izquierda, es decir, el menor de los extremos derechos si éste es considerado como un número real. Denotemos tal extremo derecho como D_{min} . Claramente, todos los demás extremos derechos deben estar a la derecha de D_{min} . Por otro lado, si algún extremo izquier-

do I_j estuviese a la derecha de D_{min} , entonces ese segmento S_j no intersecaría al segmento cuyo extremo es D_{min} , contradiciendo las hipótesis. Por lo tanto, todos los extremos I_j están a la izquierda de D_{min} (posiblemente coincidiendo con éste) y en consecuencia D_{min} está contenido en todos los segmentos.

Observación. Notemos que la prueba también funciona si en lugar de considerar el extremo derecho más a la izquierda, consideramos el extremo izquierdo más a la derecha.

Ahora, veremos cómo aplicando una proyección de todos los polígonos de Juanito sobre una línea y utilizando el Teorema de Helly, podemos demostrar su problema.



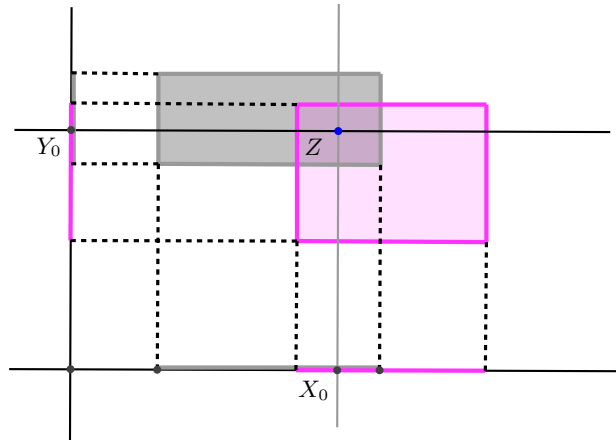
Demostración. Consideremos dos de los polígonos, digamos P_1 y P_2 y hagamos la proyección de éstos sobre ℓ , donde ℓ es la línea horizontal inferior de la cartulina. Con esto obtenemos dos segmentos S_1 y S_2 , sobre una línea. Como sabemos que hay una línea vertical que interseca a ambos polígonos, entonces el punto donde esta línea interseca a ℓ es un punto en común para los segmentos S_1 y S_2 . Esto mismo sucede para cualquier pareja de polígonos y su pareja de segmentos asociados, entonces podemos aplicar el Teorema de Helly en la recta y obtenemos que hay un punto sobre ℓ el cual le pertenece a todos los segmentos. La línea perpendicular a ℓ a través de ese punto interseca a todos los polígonos.

El siguiente resultado se obtiene mediante una aplicación directa de las ideas que hemos visto hasta ahora.

Ejemplo 1. Sea \mathcal{P} una familia finita de rectángulos de lados paralelos a los ejes de coordenadas. Supongamos que cualesquiera dos rectángulos se intersecan, entonces existe un punto común a todos los rectángulos de \mathcal{P} .

Demostración. Consideremos dos rectángulos cualesquiera y hagamos la proyección de éstos sobre el eje horizontal. Como los rectángulos se intersecan, entonces las proyec-

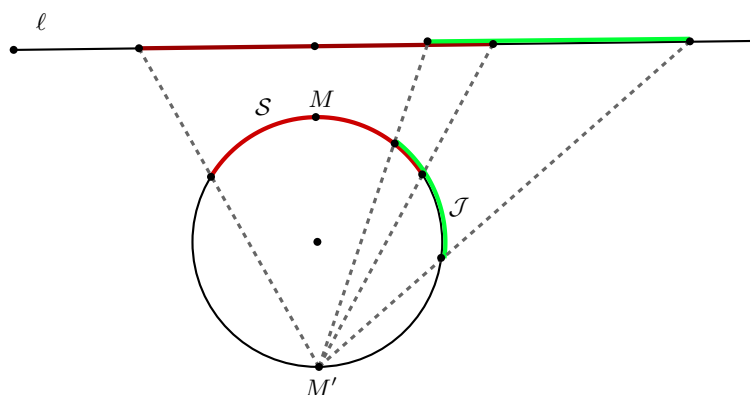
ciones sobre el eje horizontal son segmentos que también se intersecan. Esto sucede para cualquier pareja de rectángulos y por tanto, aplicando el Teorema de Helly en la línea, podemos asegurar que hay un punto X_0 común para todos los segmentos. Si usamos ahora la proyección de los rectángulos sobre el eje vertical, obtendremos un punto Y_0 común a todos los segmentos en el eje vertical. La línea vertical a través de X_0 interseca a todos los rectángulos de \mathcal{P} y lo mismo hace la línea horizontal que pasa por Y_0 . Entonces el punto Z dado por la intersección de esas dos líneas, es un punto común a todos los rectángulos de \mathcal{P} .



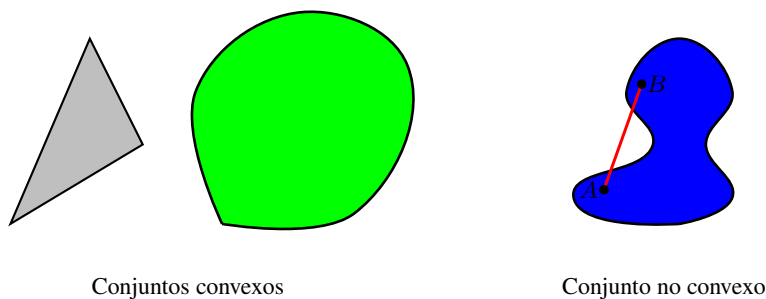
El enunciado del siguiente problema puede ser considerado como un teorema de tipo Helly en la circunferencia.

Ejemplo 2. Sea \mathcal{F} una familia de arcos circulares, sobre una misma circunferencia, y todos menores que un tercio de la circunferencia. Si cada dos de los arcos se intersecan, entonces todos los arcos de la familia tienen un punto en común.

Demostración. Sea \mathcal{S} el arco de \mathcal{F} que tiene mayor longitud y sea M su punto medio. Consideremos el punto M' localizado en el extremo opuesto del diámetro que pasa por M . Sea ℓ una recta perpendicular al diámetro MM' que no corte a la circunferencia, como se muestra en la figura. Ahora, consideremos un arco cualquiera \mathcal{J} de la familia. Como \mathcal{J} debe intersecar a \mathcal{S} y su longitud es menor que un tercio de la circunferencia, y la mitad de \mathcal{S} es menor que un sexto de la circunferencia, tenemos que \mathcal{J} no alcanza a cubrir a M' , y lo mismo sucede para todos los demás arcos de la familia. Proyectamos todos los arcos de la familia sobre ℓ desde el punto M' . De este modo obtenemos una familia de segmentos sobre ℓ , los cuales se intersecan de dos en dos. De nuevo, por el Teorema de Helly, tenemos que existe un punto en común a todos estos segmentos, digamos X . Se sigue que el segmento $M'X$ interseca a todos los arcos de \mathcal{F} . Sea Y el punto donde $M'X$ interseca a la circunferencia, entonces Y es un punto en común a todos los arcos de \mathcal{F} .

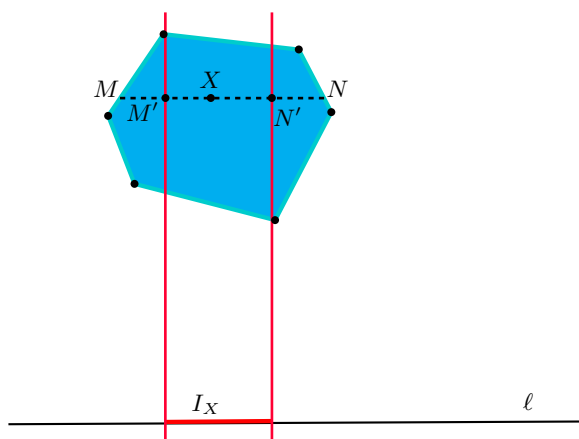


Muchos de los problemas de Geometría Combinatoria tratan sobre conjuntos convexos, entonces, es necesario entender en este momento qué es un conjunto convexo. Básicamente un conjunto es convexo si *no tiene abolladuras*. De manera más formal, un conjunto K es convexo si para cualesquiera dos puntos A y B en K , se cumple que el segmento AB también está en K . Por ejemplo, en la siguiente figura los dos primeros conjuntos son convexos y el tercero no lo es.



Veamos ahora cómo utilizando el Teorema de Helly podemos obtener un criterio para saber si un conjunto tiene simetría en una dirección dada.

Ejemplo 3. Sea S una figura convexa y sea ℓ una línea dada. Supongamos que la figura S tiene la siguiente propiedad: dados cualesquiera dos puntos $\{A, B\} \subset S$, existe una línea L , perpendicular a v , tal que los reflejados de A y B con respecto a L también pertenecen a S . Entonces, S tiene un eje de simetría perpendicular a ℓ .



Demostración. Sea $X \in S$ un punto arbitrario y sea MN la cuerda de S a través de X y paralela a ℓ . Sean M' y N' los puntos medios de los segmentos MX y XN , respectivamente. Claramente, se puede reflejar X (en la dirección paralela a ℓ) de manera que el punto reflejado esté en S siempre y cuando se refleje X con respecto a una línea perpendicular a ℓ y la cual interseque al segmento $M'N'$. Definimos el segmento I_X como la proyección del segmento $M'N'$ sobre ℓ . Ahora, como sabemos que para cualesquiera dos puntos $A, B \in S$ existe una línea perpendicular a ℓ , con respecto a la cual podemos reflejar a ambos, tenemos que los segmentos I_A e I_B se intersecan. De esta manera, obtenemos una familia de segmentos sobre ℓ los cuales se intersecan por pares. Se sigue, por el Teorema de Helly, que existe un punto Y sobre ℓ el cual pertenece a todos estos segmentos. La línea ortogonal a ℓ a través de Y es un eje de simetría ortogonal de S . La demostración de que este eje es único es sencilla y se deja como ejercicio.

Ahora vamos a analizar otra pregunta que intriga al inquieto de Juanito: *sobre la mesa se ha derramado el refresco y, las moscas que no tardan en aparecer, se posan sobre ésta dispuestas a acabar con el dulce líquido. Juanito tiene un matamoscas circular y cuando se dispone a dar el primer golpe con éste, se da cuenta que cualesquiera tres de las moscas que él escoja, hay una manera de aplastarlas de un sólo golpe. ¿Será posible aplastar a todas las moscas juntas de un sólo golpe?*

Como pronto veremos, la respuesta a este problema también es afirmativa. De nuevo, su explicación se debe al Teorema de Helly, pero ahora en el plano.

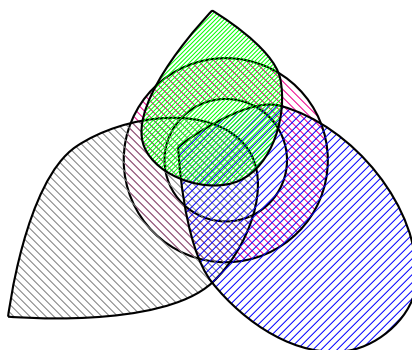
Teorema de Helly (en dimensión 2). *Sea \mathcal{F} una familia finita de conjuntos convexos en el plano. Si cada tres conjuntos convexos de \mathcal{F} tienen un punto común, entonces todos los miembros de \mathcal{F} tienen un punto en común.*

Demostración. Probaremos el teorema para el caso cuando los conjuntos convexos son polígonos. La idea de la prueba para el caso general es la misma sólo que con algunas complicaciones técnicas.

Sea \mathcal{F}' la familia que consiste de todas las intersecciones de pares de polígonos. Claramente, los elementos de \mathcal{F}' son de nuevo polígonos, segmentos o puntos. Sin embargo, si alguno de los elementos de \mathcal{F}' es un punto X , no hay nada que hacer pues tenemos la hipótesis que cualesquiera tres elementos de \mathcal{F} tienen punto en común, entonces, considerando los dos polígonos cuya intersección es X y cualquier otro polígono tenemos que la intersección de estos tres es X . Se sigue que todos los polígonos de \mathcal{F} contienen a X .

Supongamos ahora que ningún elemento de \mathcal{F}' es un punto. Dado que \mathcal{F}' tiene una cantidad finita de elementos, existe una dirección d en la cual ningún polígono de \mathcal{F}' tiene un segmento paralelo a esta dirección. Sea ℓ una línea perpendicular a d . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que ℓ es horizontal (puesto que podemos rotar el plano sin alterar la configuración). Cada miembro de \mathcal{F}' se proyecta en un segmento sobre ℓ y para cada uno de estos segmentos consideremos su extremo izquierdo y su extremo derecho. De entre todos los extremos izquierdos consideremos el que está más a la derecha y nombrémosle P' . Sea $\mathcal{M} \in \mathcal{F}'$ el polígono para el cual su proyección izquierda sobre ℓ es P' y sea P el punto de \mathcal{M} el cual se proyecta en P' . Sean \mathcal{A} y \mathcal{B} los polígonos de \mathcal{F} para los cuales su intersección es \mathcal{M} . Consideremos ahora un polígono cualquiera de la familia \mathcal{F} , digamos \mathcal{K} (distinto de \mathcal{A} y \mathcal{B}). Dado que $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{K} \neq \emptyset$ y las proyecciones izquierdas de $\mathcal{K} \cap \mathcal{A}$ y $\mathcal{K} \cap \mathcal{B}$ están a la izquierda de P' , tenemos que sobre la línea PP' hay un punto $Z \in \mathcal{K} \cap \mathcal{A}$ y un punto $W \in \mathcal{K} \cap \mathcal{B}$. No es difícil ver, analizando las posibles posiciones de P, Z y W sobre PP' , que \mathcal{K} contiene al punto P . Dado que \mathcal{K} era arbitrario, tenemos que todo polígono de \mathcal{F} contiene a P .

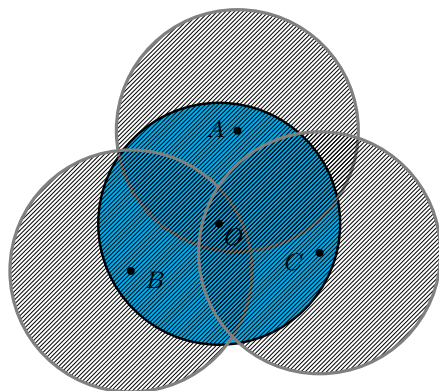
No es muy difícil ver que todas las hipótesis en el Teorema de Helly son necesarias. Por ejemplo, si consideramos todos los semiplanos cerrados de la forma $y \geq a$, para todos los enteros positivos a , podemos ver que la intersección de cualesquiera tres de estos semiplanos es no vacía. Sin embargo, no existe un punto en común a todos los semiplanos. Por otro lado, en la siguiente figura se muestran tres conjuntos convexos y un anillo (que no es convexo). Se puede observar que cualesquiera tres de esos conjuntos tienen un punto en común, pero los cuatro conjuntos no tienen ningún punto en común.



Veremos ahora cómo demostrar el siguiente problema, el cual es una versión simbólica del problema de las moscas.

Ejemplo 4. Sea \mathcal{P} un conjunto finito de puntos de manera que cualesquiera tres de los puntos se pueden cubrir con un círculo de radio 1. Entonces, se pueden cubrir todos los puntos de \mathcal{P} con un sólo círculo de radio 1.

Demostración. Sean A, B y C , tres de los puntos de \mathcal{P} . Sabemos que A, B y C , pueden ser cubiertos con un círculo de radio 1 y centro O . Entonces, si consideramos círculos de radio 1 centrados en cada uno de los puntos A, B y C , éstos contienen cada uno al punto O . Esto mismo sucede también para cualesquiera tres puntos de \mathcal{P} , y como los círculos son conjuntos convexos, por el Teorema de Helly se sigue que existe un punto en común a todos los círculos de radio 1 centrados en los puntos de \mathcal{P} . Sea Z este punto. Es fácil ver que el círculo de centro Z y radio 1 contiene a todos los puntos de \mathcal{P} .

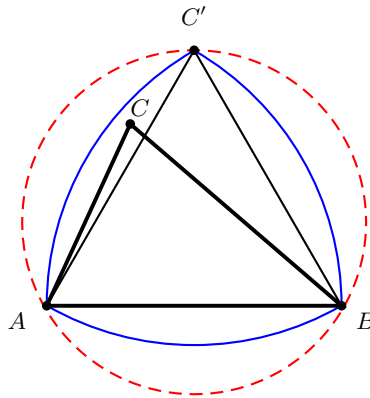


Como último ejemplo de aplicación del Teorema de Helly, veremos el siguiente teorema de Jung.

Teorema de Jung. Todo conjunto finito de puntos de diámetro menor o igual a 2 está contenido en un círculo de radio $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Recordemos que el diámetro de un conjunto es la distancia entre los dos puntos más alejados en el conjunto.

Demostración. Sea \mathcal{S} un conjunto de diámetro menor o igual a 2. Consideremos la familia \mathcal{F} la cual consiste en los discos de radio $\frac{2}{\sqrt{3}}$ centrados en los puntos de \mathcal{S} . Claramente, por el Teorema de Helly, es suficiente probar que cualesquiera tres discos de \mathcal{F} se intersecan en un punto. Para esto, consideremos los puntos $A, B, C \in \mathcal{S}$ y supongamos que $2 \geq AB \geq BC \geq CA$. Consideremos el punto C' tal que el triángulo $\triangle ABC'$ es un triángulo equilátero, como se muestra en la figura. Ahora, tracemos los discos con radio AB y centros A, B y C' , respectivamente. Tenemos que el triángulo $\triangle ABC'$ está contenido en la intersección de estos tres discos. No es difícil ver que el circuncírculo del triángulo $\triangle ABC'$ contiene a esta intersección. Como el circuncírculo del triángulo $\triangle ABC'$ tiene radio menor o igual que $\frac{AB}{\sqrt{3}}$, se sigue que $\triangle ABC'$ está contenido en un disco de radio $\frac{2}{\sqrt{3}}$.



Problemas

1. Sea \mathcal{F} una familia de arcos circulares, todos sobre una misma circunferencia. Demuestra que si cada dos de los arcos se intersecan, entonces existe un par de puntos *antipodales* (diametralmente opuestos) tales que cada arco de la familia contiene un punto del par.
2. Sean \mathcal{P}_1 y \mathcal{P}_2 dos familias finitas de segmentos sobre una línea recta. Supongamos que todos los segmentos de \mathcal{P}_1 son rojos y que todos los segmentos de \mathcal{P}_2 son verdes. Sabemos que dado un segmento rojo y dado un segmento verde estos se intersecan. Demuestra que para alguno de los dos colores todos los segmentos de ese color se intersecan.
3. Sea \mathcal{P} una familia finita de segmentos sobre una línea. Sabemos que si escogemos cualesquiera tres segmentos de \mathcal{P} entonces al menos dos de ellos tienen intersección no vacía. Demuestra que existen dos puntos sobre la línea de tal manera que cualquiera de los segmentos de \mathcal{P} contiene a alguno de esos puntos.
4. Sea \mathcal{F} una familia finita de figuras convexas en el plano de tal manera que cada dos figuras de \mathcal{F} se intersecan. Dada una línea ℓ , demuestra que existe una línea paralela a ℓ la cual interseca a todas las figuras de \mathcal{F} .
5. En el plano están dados una cantidad finita de rectángulos de lados paralelos a los ejes de coordenadas. Sabemos que hay rectángulos verdes y rectángulos rojos, además, cualesquiera dos rectángulos de distinto color se intersecan. Demuestra que para alguno de los colores, todos los rectángulos de ese color tienen un punto en común, o en caso contrario, que existen dos rectas perpendiculares, paralelas a los ejes de coordenadas, de tal manera que una de las rectas interseca a todos los rectángulos de un color y la otra recta interseca a todos los del otro color.
6. Sea \mathcal{P} una familia finita de rectángulos de lados paralelos a los ejes de coordenadas. Sabemos que de cualesquiera tres rectángulos que escojamos dos de ellos

tienen punto en común. Demuestra que existen 4 puntos de tal manera que cada uno de los rectángulos de \mathcal{P} contiene a alguno de esos puntos.

7. Considera un n -ágono convexo P , de vértices X_1, X_2, \dots, X_n . Consideremos copias homotéticas de P , denotadas por P_i , de manera que su centro de homotecia es el punto X_i y la razón de homotecia es $\frac{2}{3}$, para cada $i = 1, 2, \dots, n$. Demuestra que $\bigcap_{i=1}^n P_i \neq \emptyset$ y que $P \subset \bigcup_{i=1}^n P_i$.
8. Sea $\mathcal{P} = \{X_i + \mathcal{C}\}$ una familia finita de trasladados de una figura convexa \mathcal{C} la cual tiene centro de simetría en el origen. Supongamos que cualesquiera dos trasladados tienen al menos un punto en común. Demuestra que si consideramos la familia $\mathcal{P}' = \{X_i + \frac{4}{3}\mathcal{C}\}$, es decir, la familia de copias homotéticas de \mathcal{C} con razón $\frac{4}{3}$ y centradas en cada uno de los puntos X_i , entonces todos los trasladados en \mathcal{P}' tienen un punto en común.

Bibliografía

1. I. Yaglom and V. Boltyanski (1961). *Convex Figures*, Holt Rinehart and Winston, New York.
2. L. Danzer, B. Grünbaum, and V. Klee (1963). *Helly's theorem and its relatives*, AMS, Proc. Sympos. Pure Math., **7**, 101–180.
3. M. Huicochea and J. Jerónimo-Castro (2009). *The strip of minimum width covering a centrally symmetric set of points*, Period. Math. Hungarica. **58**, 47-58.
4. J. Jerónimo (2007). *Line transversals to translates of unit discs*, Disc. Comput. Geom. **37**, 409-417.
5. J. Jerónimo-Castro, and L. Montejano (2010). *Chakerian-Klamkin type theorems*, Journal of Convex Analysis **17**, 643-649.
6. J. Jerónimo-Castro, and E. Roldán-Pensado (2011). *Line Transversals to Translates of a Convex Body*, Disc. Comput. Geom. **45**, 329-339.
7. S.R. Lay (1982). *Convex Sets and their Applications*. Wiley-Interscience series of texts, monographs and tracts.
8. R.J. Webster (1994). *Convexity*, Oxford Univ. Press.