Una propuesta para la generación de problemas para competencias matemáticas

Por Pedro David Sánchez Salazar y Didier Adán Solís Gamboa

Nivel Intermedio

Una pieza fundamental en la organización de la olimpiada de matemáticas es sin duda el diseño de los exámenes. Un ciclo del proceso selectivo con miras al Concurso Nacional usualmente conlleva la aplicación de cinco o seis exámenes a lo largo de un período que se extiende por varios meses. Para poder elegir los problemas que conformarán dichos exámenes resulta indispensable contar con un banco de problemas al cual recurrir. Debido a la naturaleza de la Olimpiada, los problemas que conforman los distintos exámenes deben ser inéditos, por lo que contar con un acervo del cual ocupar varias decenas de ellos anualmente presenta un desafío. En este artículo compartimos una alternativa para solucionar este problema.

Generación de problemas

Concebir un problema para ser usado en una Olimpiada de Matemáticas no es algo sencillo. A diferencia de un ejercicio mecánico, un problema de olimpiada debe satisfacer ciertos criterios: poder plantearse y resolverse usando conceptos básicos, admitir distintas soluciones, ser inédito, etc. De tal suerte, el proceso de generar los problemas para un examen de olimpiada requiere una gran dosis de creatividad y experiencia.

Usualmente, para crear un problema se requiere incorporar elementos de uno o varios problemas conocidos. Este acoplamiento de técnicas requiere que el diseñador tenga una vasta experiencia en resolución de problemas de olimpiada. Sin embargo, existen

muchas ocasiones en los que gente con poca experiencia en la olimpiada requiere crear problemas. Dos casos típicos que ejemplifican esta situación son los siguientes:
(1) un estudiante queda en la pre-selección estatal y su profesor – que tiene mucho entusiasmo pero poca experiencia previa en la olimpiada – quiere brindarle acompañamiento durante el proceso selectivo;
(2) un profesor (con las mismas características) se aboca a organizar la olimpiada en su escuela, zona o distrito escolar.
En estos casos, una alternativa que permite a la gente con relativamente poca experiencia en la olimpiada crear un banco de problemas, es la modificación de problemas conocidos.
Evidentemente, cuando hablamos de modificar un problema para generar otro, estamos suponiendo que la modificación es de cierto modo sustancial, de manera que el problema modificado y el problema original tengan atributos diferentes. Dichas modificaciones pueden presentarse de diversas maneras, por ejemplo, en las hipótesis del problema, en el resultado, los elementos que lo constituyen, etc.
Otra alternativa que con frecuencia se sigue al generar problemas consiste en usar las ideas o métodos que surgen al plantear o resolver un problema y enmarcarlas en un contexto distinto. En estos casos, los enunciados de los problemas modificados suelen ser totalmente distintos respecto al problema original, aunque su planteamiento y solución compartan muchos rasgos comunes.

Un ejemplo

A continuación presentaremos un ejemplo de cómo la modificación de un problema puede dar lugar a una diversidad de nuevos problemas. Hemos escogido un problema que es un clásico en el contexto de los acertijos matemáticos, a saber, el conocido problema de los cuadrados mágicos. El enunciado es el siguiente:

Problema 0. *Dibuja una cuadrícula de 3×3. Coloca un número entre el 0 y el 8 en cada casilla de la cuadrícula, de tal forma que ningún número se repita y que la suma de los números en cada renglón, columna y diagonal principal de la cuadrícula sea la misma.*

Solución: Supongamos que podemos acomodar los números de manera que se satisfagan las condiciones del problema y llamemos S a la suma común de los tres números en cada renglón, columna o diagonal principal. Procedemos a hallar S usando una estrategia muy útil: hacer un conteo de dos maneras distintas. Primero notemos que si sumamos renglón por renglón entonces la suma de todos los números de la cuadrícula será $S + S + S = 3S$. Por otro lado, dado que los números se acomodaron sin repetir, la suma de todos los números de la cuadrícula será $0 + 1 + 2 + \cdots + 8 = \frac{8 \cdot 9}{2} = 36$. Igualando estas expresiones obtenemos $3S = 36$ y por tanto $S = 12$.
Nuestro siguiente paso será encontrar las posibles formas en que podemos sumar 12 con tres números distintos conjunto $A = \{0, 1, 2 \ldots, 8\}$, lo cual puede hacerse con relativamente poco esfuerzo si procedemos ordenadamente, listando la sumas de manera que sus sumandos estén en orden creciente. La siguiente tabla muestra las únicas

8 sumas posibles:

S_1	$0+4+8$
S_2	$0+5+7$
S_3	$1+3+8$
S_4	$1+4+7$
S_5	$1+5+6$
S_6	$2+3+7$
S_7	$2+4+6$
S_8	$3+4+5$

Dado que en total necesitamos 8 sumas (3 para los renglones, 3 para las columnas y 2 para las diagonales) podemos concluir que cada una de las sumas debe aparecer exactamente una vez en el acomodo. Ahora bien, notemos que cada casilla de la cuadrícula contribuye en 2, 3 o 4 sumas diferentes, dependiendo su ubicación: la casilla central contribuye en 4 sumas (un renglón, una columna y las dos diagonales), las casillas de las esquinas están en 3 sumas (una correspondiente a renglón, otra a columna y la tercera a una diagonal) y las casillas restantes aportan a 2 sumas únicamente (un renglón y una columna). Esta observación nos permitirá avanzar en la solución, pues los números del conjunto A también se dividen en exactamente tres categorías, dependiendo si aparecen en 2, 3 o 4 sumas, respectivamente.

Número	Sumas que lo contienen	Cantidad de sumas
0	S_1, S_2	2
1	S_3, S_4, S_5	3
2	S_6, S_7	2
3	S_3, S_6, S_8	3
4	S_1, S_4, S_7, S_8	4
5	S_s, S_5, S_8	3
6	S_5, S_7	2
7	S_2, S_4, S_6	3
8	S_1, S_3	2

Combinando la observación con la tabla anterior, podemos agrupar los números de A en tres clases y además indicar en qué posible posición de la cuadrícula se encontrarán, como se observa en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline * & \mathrm{O} & * \\ \hline \mathrm{O} & \mathrm{X} & \mathrm{O} \\ \hline * & \mathrm{O} & * \\ \hline \end{array} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{O} & \longleftrightarrow & \{0,2,6,8\} \\ * & \longleftrightarrow & \{1,3,5,7\} \\ \mathrm{X} & \longleftrightarrow & \{4\} \end{array}$$

Podemos ver que el número 4 necesariamente debe estar en el centro. Si nos fijamos ahora en el grupo $\{0,2,6,8\}$ podemos ver que se divide en dos parejas: $\{0,8\}$ y $\{2,6\}$, cada una de los cuales aparece en una sola suma (S_1 y S_7, respectivamente). De este modo, al ubicar un elemento de cada conjunto, digamos el 0 y el 2, los restantes quedan determinados (el 8 quedará opuesto al 0 y el 6 opuesto al 2) por lo que solo resta acomodar los elementos de las esquinas. Pero siendo un poco observadores notaremos que en dicho caso los valores de las esquinas también quedan determinados. Por ejemplo, en el acomodo que se presenta a continuación, la esquina superior izquierda solo puede contener al número 7, ya que es el único que comparte una suma con el 0 (la suma S_2) y con el 2 (la suma S_6).

$*$	O	$*$
O	4	O
$*$	O	$*$

$\Rightarrow$

$*$	0	$*$
2	4	O
$*$	O	$*$

$\Rightarrow$

$*$	0	$*$
2	4	6
$*$	8	$*$

$\Rightarrow$

7	0	5
2	4	6
3	8	1

$\square$

Ahora procedemos a ilustrar cómo este sencillo y conocido problema puede dar origen a una gama de problemas con muy diversos matices. El primer paso a considerar será tratar de extraer los aspectos claves que conforman el problema. Una buena idea es tratar de enunciar el problema en los términos más simples y generales. En otras palabras, trataremos de responder la pregunta *¿De qué se trata el problema?* de la manera más sencilla posible.

Por ejemplo, en el caso de nuestro problema podemos decir que se trata de acomodar un conjunto de números (el conjunto $\{0, 1, \ldots, 8\}$) en un arreglo de casillas (la cuadrícula) de manera que se cumplan ciertas relaciones con respecto a una operación (que las sumas sean iguales). A partir de este enunciado simplificado podemos enlistar los elementos básicos que conforman el problema, a saber, (1) el conjunto de números, (2) la operación usada, (3) la forma en que las casillas están dispuestas, (4) lo que se pide hallar. Modifiquemos cada uno de estos elementos.

El conjunto de números

Una manera obvia de modificar el problema consiste en tratar de cambiar el conjunto de números que se está usando.

Una primera observación es que podemos sumar una misma cantidad a todos los números de la cuadrícula y obtener un nuevo arreglo. Por ejemplo, a partir del arreglo

7	0	5
2	4	6
3	8	1

que obtuvimos para el conjunto de números $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, obtenemos el siguiente arreglo para el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$:

8	1	6
3	5	7
4	9	2

pues todas las sumas $S_1, S_2, \ldots, S_8$ aumentan exactamente en 3 unidades y por tanto en el segundo arreglo todas las sumas vuelven a coincidir (iguales a 15 en vez de 12).

Tras un breve análisis, nos damos cuenta que en general cualquier progresión aritmética de 9 números funcionaría para este fin, por lo que los siguientes son dos posibles nuevos problemas.

Problema 1. *Dibuja una cuadrícula de* 3×3*. Coloca un número del conjunto de números* $\{-3, -1, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$ *en cada casilla de la cuadrícula, de tal forma que ningún número se repita y que la suma de los números en cada renglón, columna y diagonal principal de la cuadrícula sea la misma.*

Problema 2. *Considera una cuadrícula de* 3×3 *y una progresión aritmética de* 9 *elementos. Demuestra es posible acomodar estos números en las casillas de la cuadrícula, de tal forma que ningún número se repita y que la suma de los números en cada renglón, columna y diagonal principal de la cuadrícula sea la misma.*

La operación usada

En muchas ocasiones se pueden usar analogías conocidas para modificar un problema. Por ejemplo, observando que una progresión aritmética es a la suma lo que una progresión geométrica es a la multiplicación, podemos modificar el Problema 0 para obtener el siguiente problema.

Problema 3. *Dibuja una cuadrícula de* 3×3*. Coloca un número tomado del conjunto* $\{1, 2, 4, 8, \ldots, 256\}$ *en cada casilla de la cuadrícula, de tal forma que ningún número se repita y que el producto de los números en cada renglón, columna y diagonal principal de la cuadrícula sea el mismo.*

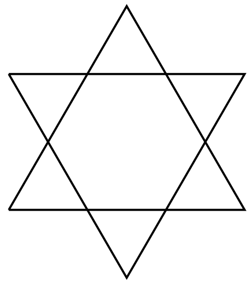
Por otro lado, podemos observar que en cualquier cuadrado mágico de 3×3 construido a partir de una progresión aritmética la suma común es divisible entre 3; por lo que siguiendo la analogía, podemos concluir que si usamos la multiplicación en vez de la suma, el producto común debiera ser un cubo. Esta observación da origen al siguiente problema:

Problema 4. *Dibuja una cuadrícula de* 3×3*. Coloca un número del conjunto* $\{4, 6, 9\}$ *en cada casilla de la cuadrícula, de tal forma que cada número se use al menos una vez y que el producto de los números en cada renglón, columna y diagonal principal de la cuadrícula sea el mismo.*

La forma en que están dispuestas las casillas

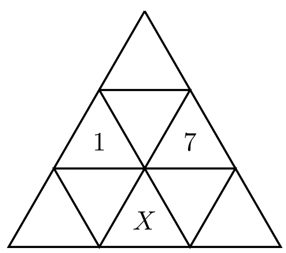
Otro aspecto que resulta natural modificar es la disposición de las casillas. En esta caso trabajaremos con otras dos formas geométricas con un alto grado de simetría: un hexágono y un triángulo. El primer problema es una variación inmediata, ya que conserva todos los demás elementos.

Problema 5. *En cada una de las* 7 *regiones de la figura se coloca un número del* 0 *al* 6 *sin repetir y de manera que la suma de los números en tres regiones colineales sea la misma. ¿Qué números pueden ir en la región central?*



El segundo problema involucra una complejidad mayor.

Problema 6. *(Concurso Estatal, Yucatán, 2008) Tony tiene un tablero triangular de lado 3 cm. como el que se muestra a continuación y 9 fichas numeradas del 1 al 9. Después de mucho trabajo Tony logró acomodar una ficha en cada triangulito del tablero, de manera que la suma de los números en cada uno de los triángulos medianos (de lado 2 cm) es la misma. En un descuido, Tony sacudió el tablero y se caen todas las fichas, salvo las fichas numeradas con en el 1 y el 7, las cuales se mantuvieron en el lugar correcto ¿Qué ficha tenía Tony en el triangulito marcado con una X?*



Lo que te pide el problema

Esta es una de las formas más comunes para generar problemas. Podemos observar que la manera de acomodar los números del 0 al 8 en las casillas no es única, por lo que tiene sentido preguntarse de cuántas formas puede hacerse esto. Más aún, dada la simetría de la figura, también es posible calcular cuántas acomodos distintos existen.

Problema 7. *En cada casilla de una cuadrícula de* 3×3 *se coloca un número del 0 al 8 de tal forma que ningún número se repita y que la suma de los números en cada renglón, columna y diagonal principal de la cuadrícula sea la misma. ¿De cuántas maneras es posible hacer esto?*

Una vez llenado el arreglo, podemos rotarlo 90° o escribir todas las filas (o las columnas) al revés, resultando nuevamente en un arreglo donde todas las sumas coinciden.

De alguna forma, esas nuevas formas de llenar el tablero son esencialmente la misma que la original, por lo que cabe preguntarnos cuántas formas esencialmente distintas hay de llenar el tablero con los números.

Problema 8. *En cada casilla de una cuadrícula de* 3×3 *se coloca un número del 0 al 8 de tal forma que ningún número se repita y que la suma de los números en cada renglón, columna y diagonal principal de la cuadrícula sea la misma. ¿De cuántas maneras esencialmente distintas es posible hacer esto? Nota: se dice que dos acomodos son esencialmente distintos si no es posible generar uno a partir del otro usando una de las simetrías del tablero.*

La misma idea

Finalizamos con una última alternativa para generar problemas que con frecuencia rinde buenos frutos. Se trata de tomar las mismas ideas que se emplearon en la solución. En este caso, la técnica sobre la cual nos enfocaremos es la de sumar las mismas cantidades de dos formas distintas. Iniciamos con una ligera variación.

Problema 9. *En cada casilla de una cuadrícula de* 3×3 *se coloca un número del 0 al 8 de tal forma que ningún número se repita y que la suma de los números en cada renglón, columna y diagonal principal de la cuadrícula sea la misma. Considera cada renglón como un número de 3 cifras y llamemos* A *a la suma de estos 3 números. De manera análoga, considera cada columna como un número de 3 cifras y llamemos* B *a esta suma. Demuestra que* $A = B$.

El siguiente problema es una modificación del problema anterior, ya que no se considera más la condición original que define los cuadrados mágicos.

Problema 10. *(Concurso Estatal, Yucatán, 1997) En una cuadrícula de* 3×3 *se colocan los números del 1 al 9 sin repetir. Considera cada renglón como un número de 3 cifras y llamemos* A *a la suma de estos 3 números. De manera análoga, considera cada columna como un número de 3 cifras y llamemos* B *a esta suma. ¿Es posible acomodar los números en la cuadrícula de manera que* $A + B = 1997$*?*

Notemos que este problema difiere en varios aspectos fundamentales del Problema 0: tanto las hipótesis como el resultado son diferentes, sin embargo conserva muchos otros aspectos del problema original como son el conjunto de nueve enteros consecutivos y la cuadrícula de 3×3. Nuestro último ejemplo no considera estos elementos tampoco. De hecho, el único aspecto fundamental que lo relaciona con el Problema 0 es la forma en que se resuelve.

Problema 11. *(Selectivo de Primarias, Yucatán, 2012). Un número de 5 cifras es fantabuloso si se escribe usando cada uno de los dígitos 1, 3, 5, 7, 9 exactamente una vez. Por ejemplo, 15379 y 73591 son números fantabulosos.*

1. *¿Cuántos números fantabulosos hay?*
2. *Encuentra el resultado de sumar todos los números fantabulosos.*

El contexto

Desde hace más de una década la Olimpiada Mexicana de Matemáticas en Yucatán convoca en su proceso selectivo a un gran número de estudiantes de educación secundaria, llegando a más del 95 % de la matrícula de educación secundaria año tras año desde 2008. En 2011 se incorpora educación primaria, alcanzando una cobertura masiva en 2012. Paralelamente al crecimiento en el número de participantes crece la demanda por cursos e instancias de formación para los profesores de los concursantes. En 2011 se oferta en educación secundaria el Curso-taller de evaluación y generación de problemas para profesores-entrenadores, en tanto que en 2012 y 2014 se imparte el Curso-taller de estrategias orientadas a la resolución de problemas para profesores-entrenadores de educación primaria. En ambos cursos se incluyó un taller de generación de problemas con 5 horas de duración. Los Problemas 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8 y 9 (así como otros muchos) fueron creados a partir del enunciado del Problema 0 en dichos talleres por profesores de educación primaria cuyos estudiantes participaban por primera vez en la fase estatal de la Olimpiada de Matemáticas.

Soluciones

1. Este es un caso particular del Problema 2 en donde la diferencia común es $d = 2$ y el valor inicial es $a = -3$.

2. Un argumento similar al mencionado para sumar un mismo número a todas las casillas nos convencerá también que es posible multiplicar todas las entradas por un mismo número y obtener otro arreglo en donde las sumas coinciden. Así, a partir del ejemplo dado con los números del 1 al 9 podemos obtener el arreglo

16	2	12
6	10	14
8	18	4

   donde todas las sumas son iguales a 30 en vez de 15.

   Entonces, para obtener un arreglo para la progresión aritmética $a, a + d, a + 2d, \ldots, a + 8d$ procedemos a multiplicar todas las casillas del arreglo formado con los números $\{0, 1, 2, \ldots, 8\}$ y obtenemos un arreglo con los números $\{0, d, 2d, 3d, \ldots, 8d\}$. Finalmente, sumamos a en cada una de las casillas y obtenemos el arreglo buscado.

3. Notando que $1 = 2^0$ y $256 = 2^8$ podemos obtener una solución usando únicamente potencias de dos. Observemos que los números son potencias de 2 consecutivas: $a^i = 2^1, i = 0, 1, \ldots, 8$. Sea P el producto común. Procediendo como en el Problema 2 obtenemos que

$$P^3 = a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdots a_8 = 2^{0+1+2+\cdots+8} = 2^{36}$$

   y en consecuencia $P = 2^{12}$. Identificando 2^i con i del Problema 0 se obtiene un arreglo con las condiciones requeridas.

A final de cuentas, estamos aprovechando la ley de los exponentes que convierte productos de una misma base en sumas de exponentes.

7	0	5
2	4	6
3	8	1

$\Rightarrow$

2^7	2^0	2^5
2^2	2^4	2^6
2^3	2^8	2^1

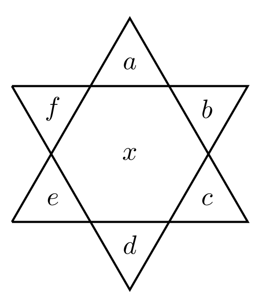
$=$

128	1	32
4	16	64
8	256	2

4. Por lo discutido en la solución del Problema 3, el producto de los 9 números debe ser un cubo perfecto. Una alternativa natural para que esta condición se cumpla es tomar 3 cuatros, 3 seises y 3 nueves. El producto común en este caso será $P = 4 \cdot 6 \cdot 9 = 216 = 6^3$. Por tanto basta con encontrar un acomodo donde en cada columna, renglón o diagonal haya exactamente un 4, un 6 y un 9 o bien tres números 6. Uno de dichos arreglos es el siguiente:

4	9	6
9	6	4
6	4	9

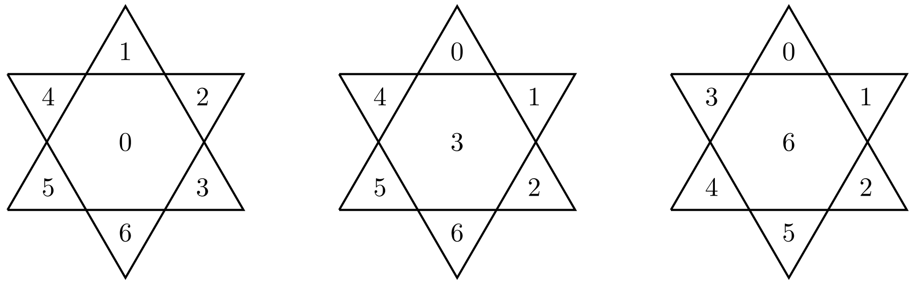
5. En este caso tenemos únicamente tres sumas y todas ellas comparten el número la casilla central. Denotemos por S a la suma común y los números que van en cada casilla como lo indica la figura:



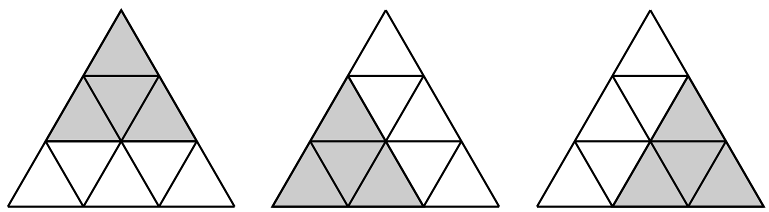
Entonces tenemos

$$\begin{aligned} 3S &= (a+x+d)+(b+x+e)+(c+x+f) \\ &= (a+b+c+d+e+f+x)+2x \\ &= 21+2x \end{aligned}$$

y reacomodando términos obtenemos $3(S-7) = 2x$. En consecuencia $3 \mid 2x$ y por tanto $3 \mid x$, así que la únicas posibles opciones son $x = 0$, $x = 3$ ó $x = 6$. Las correspondientes sumas en cada caso son $S = 7$, $S = 9$ y $S = 11$, respectivamente. Finalmente, es fácil comprobar que cada una de estas opciones da lugar a un acomodo válido, como lo indican los siguientes ejemplos:



6. Llamemos nuevamente S a la suma común. En esta figura, las siguientes tres zonas deben tener suma igual a S:

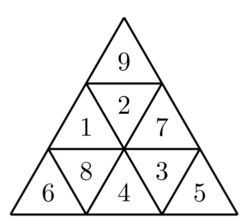


De esta manera, si sumamos las tres obtendremos como total $3S$, pero al sumarlas, las casillas con el 1, 7 y X están siendo sumadas dos veces, pues cada una aparece en dos triángulos. De esta manera, la suma de todas las casillas (sin repetición) de la figura será igual a $3S - (1 + 7 + X) = 3S - 8 - X$.

Por otro lado, la suma de todas las casillas, sin repetir, es $1+2+3+\cdots+9 = 45$. Tenemos entonces la ecuación

$$3S - 8 - X = 45.$$

Como 45 y $3S$ son múltiplos ambos de 3, necesariamente $-8 - X$ y por tanto $8 + X$ también lo serán. Entonces tenemos las posibilidades: $X = 1, X = 4, X = 7$ pero la primera y la última son imposibles porque ya se usaron esos números en otras casillas. Concluimos pues, que $X = 4$ es la respuesta. Con esa información incluso podríamos completar la figura (aunque no lo pide el problema).



7. Recordemos que el 4 necesariamente debe ir en la casilla del centro y los números del conjunto $\{0, 2, 6, 8\}$ deben ubicarse en las casillas marcadas por I, II, III y IV en la siguiente cuadrícula:

	I	
II	4	III
	IV	

Fijémonos en la casilla marcada por el I. Para ocuparla tenemos 4 opciones. Una vez que se elija el número que irá en I, el número que irá en IV queda determinado. Así, sólo quedan 2 opciones para la casilla II, con lo que queda determinado el número que irá en III. Como se comentó en el Problema 0, ya que estas 5 casillas están ocupadas, las casillas de las esquinas quedan determinadas. Por tanto hay $4 \cdot 2 = 8$ distintas formas. A continuación está la lista de los 8 arreglos:

5	6	1
0	4	8
7	2	3

1	8	3
6	4	2
5	0	7

3	2	7
8	4	0
1	6	5

7	0	5
2	4	6
3	8	1

5	0	7
6	4	2
1	8	3

3	8	1
2	4	6
7	0	5

7	2	3
0	4	8
5	6	1

1	6	5
8	4	0
3	2	7

8. Recordemos que un cuadrado tiene 8 simetrías: rotaciones de $90°, 180°, 270°$ y $360°$; y reflexiones respecto a los ejes, vertical, horizontal y los dos diagonales. Por tanto, de la solución anterior concluimos que como son 8 acomodos distintos, cada uno corresponde exctamente a una simetría y en consecuencia solo hay un arreglo esencialmente distinto. De hecho, si observamos con detenimiento los 8 arreglos del inciso anterior, podemos ver que los arreglos de la primera fila corresponden con las 4 rotaciones y los de la segunda fila con las cuatro reflexiones respecto al arreglo original presentado en el Problema 0.

   Podemos, sin embargo, argumentar de otra manera como sigue. El 4 siempre está al centro, por lo que está fijo. El 0 tiene que ir en una orilla, mas no en una esquina. Cualquiera de las cuatro orillas son esencialmente la misma al considerar rotaciones. Una vez colocado el cero, la orilla opuesta tiene que contener al 8. Las otras dos orillas necesariamente tendrán al 2 y al 6, pero considerando reflexiones, es indistinto cómo colocarlos. Y una vez que se han puesto en las casillas los números $0, 2, 4, 6, 8$, las casillas de las esquinas necesariamente quedan determinadas. Por tanto, sólo puede haber un arreglo esencialmente distinto.

9. Supongamos que tenemos un arreglo que cumple las condiciones pedidas. Representemos con variables los números que aparecen en cada casilla.

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Entonces, trabajando con renglones, los tres números obtenidos son $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, $\overline{def} = 100d + 10e + f$ y $\overline{ghi} = 100g + 10h + i$.

Al hacer la suma $\overline{abc} + \overline{def} + \overline{ghi}$ y simplificar obtendremos

$$A = 100(a + d + g) + 10(b + e + h) + (c + f + i).$$

Si denotamos por S a la suma común de todos los renglones y columnas, obtenemos

$$A = 100S + 10S + S = 111S.$$

Del mismo modo, pero trabajando ahora por columna, obtenemos los tres números $\overline{adg} = 100a + 10d + g$, $\overline{beh} = 100b + 10e + h$ y $\overline{cfi} = 100c + 10f + i$ y por tanto

$$B = 100(a + b + c) + 10(d + e + f) + (g + h + i)$$

y por un argumento similar al usado por renglones, obtenemos

$$B = 100S + 10S + S = 111S.$$

Concluimos entonces que necesariamente $A = B$.

10. No es posible acomodar los números de manera que se satisfaga $A + B = 1997$. Para llegar a esta conclusión denotemos por $a, b, c, \ldots, h, i$ a los números dígitos y acomodémoslos en la cuadrícula de la siguiente forma:

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Notemos que por la prueba del criterio de divisibilidad por 3 tenemos que $\overline{abc} \equiv a + b + c \pmod 3$, $\overline{def} \equiv d + e + f \pmod 3$ y $\overline{ghi} \equiv g + h + i \pmod 3$. Como $A = \overline{abc} + \overline{def} + \overline{ghi}$ entonces tenemos

$$A \equiv a+b+c+d+e+f+g+h+i \equiv 1+2+3+4+5+6+7+8+9 \equiv 45 \equiv 0 \pmod 3.$$

De manera similar podemos observar que a raíz de las congruencias $\overline{adg} \equiv a + d + g \pmod 3$, $\overline{beh} \equiv b + e + h \pmod 3$ y $\overline{cfi} \equiv c + f + i \pmod 3$ se concluye que $B \equiv 0 \pmod 3$ y por tanto $A + B \equiv 0 \pmod 3$. Sin embargo $1997 \equiv 2 \pmod 3$, lo que prueba la imposibilidad del acomodo.

11. Dado que hay cinco dígitos y pueden aparecer en cualquier orden, la respuesta a la primera pregunta es $5! = 120$.

Para la segunda pregunta, retomando la idea de los problemas anteriores, pensar que tenemos una cuadrícula de 120×5 y en cada renglón acomodamos los dígitos de cada número fantabuloso. Ahora, en la columna de la derecha, correspondiente a las unidades, cada uno de los dígitos aparece repetido varias veces. Para ser precisos, cada dígito aparece 24 veces, pues cada una de las $4! = 24$ formas de acomodar los dígitos restantes corresponde exactamente a un número fantabuloso diferente, es decir, a un renglón distinto. Por tanto, la suma de la columna de las unidades es $24 \cdot 1 + 24 \cdot 3 + 24 \cdot 5 + 24 \cdot 7 + 24 \cdot 9 = 24 \cdot 25 = 600$.

Pero en la segunda columna sucederá exactamente lo mismo, sólo que al ser columna de decenas, estos aportarán a la suma 10 veces más que la de las unidades, es decir, 6000. El mismo argumento aplica para las centenas, millares y decenas de millar. De este modo, la suma de todos los números fantabulosos será

$$600 + 6000 + 60000 + 600000 + 6000000 = 6666600.$$

Bibliografía

1. Guerrero, E., Sánchez, P. y Solís, D. *Estrategias orientadas a la solución de problemas*. Universidad Autónoma de Yucatán, 2012.

2. Guerrero, E., Pérez, E. y Solís, D. *Evaluación y generación de problemas*. Universidad Autónoma de Yucatán, 2011.