Números primos y compuestos

Por Jorge Tipe Villanueva

Nivel Introductorio

Sabemos que cualquier entero positivo n tiene como divisores a 1 y n. Si asumimos que $n > 1$ entonces n tendrá al menos dos divisores pues 1 y n son diferentes. En este artículo estudiaremos a los enteros positivos n que tienen como únicos divisores a 1 y n, estos números son los llamados números primos.

Definición 1. *Un número entero $n > 1$ es "primo" si sus únicos divisores positivos son 1 y n.*

Por ejemplo, el número 2 es primo, pues sus únicos divisores positivos son: 1 y 2. Además, el número 2 es el menor número primo.
A continuación mostramos los primeros números primos:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, \ldots$$

Podemos notar que no hay una regularidad notoria en la sucesión de números primos, ni tampoco hay una regularidad en la diferencia entre dos números primos consecutivos, ya que esta diferencia varias veces es 2 y otras veces esta diferencia puede ser muy grande (veremos un resultado al respecto más adelante). Esta incertidumbre ha ocasionado que la sucesión de números primos haya sido objeto de estudio desde hace muchos siglos, desde la búsqueda de una "fórmula" que genere todos los primos, hasta diversos problemas que permanecen aún "abiertos" (es decir, que aún no se han podido resolver).

Un ejemplo muy conocido de "problema abierto" es el *Problema de los primos gemelos*. Decimos que dos números primos son *gemelos* si su diferencia positiva es 2. Por ejemplo, 3 y 5, 5 y 7, 11 y 13, 17 y 19, 29 y 31, 41 y 43, son primos gemelos. La conjetura de los números primos gemelos sugiere que hay un número infinito de ellos.

Parece que esta conjetura es atribuida a Euclides, y por lo tanto puede considerarse el problema más antiguo de las matemáticas, aproximadamente unos 2300 años.

El 17 de abril de 2013 el matemático chino Zhang Yitang, publicó lo que, al día de hoy, parece ser una demostración de la conjetura "débil" de los primos gemelos. Tratar de demostrar que existen infinitos primos p y q tales que $|p-q|=2$ es un problema de muy difícil solución. La conjetura débil de los primos gemelos dice que existen infinitos números primos p y q tales que $|p-q|<N$ para un entero positivo fijo N. Zhang Yitang ha propuesto una demostración para el caso $N=70,000,000$.

Ahora vamos a ver propiedades acerca de los números primos que nos serán útiles en la resolución de problemas.

Proposición 1. *Si p es un número primo y $p=ab$, donde a y b son enteros positivos, entonces $a=1$ o $b=1$.*

Demostración. Supongamos que ambos enteros fueran mayores que 1, entonces los números $1, a, ab$ serían tres divisores distintos de p debido a que $1<a<ab$, lo cual es una contradicción pues p tiene exactamente dos divisores positivos. Concluimos que alguno de los números a o b es igual a 1. □

Problema 1. *Sean a y b enteros positivos, con $a>b$. Demuestre que el número a^4-b^4 no es un número primo.*

Solución. Supongamos que $p=a^4-b^4$, donde p es un número primo, entonces

$$p=(a^2+b^2)(a^2-b^2),$$

luego, por la Proposición 1, alguno de los factores mostrados es 1. Como $a^2+b^2>1$, concluimos que $a^2-b^2=1$. La última ecuación no es posible porque no hay dos cuadrados perfectos (positivos) que se diferencíen en 1. Por lo tanto, queda demostrado que a^4-b^4 no puede ser primo.

Proposición 2.

1. *El único número primo par es* 2.
2. *Los números primos mayores que* 3 *son de la forma* $6k+1$ *o* $6k-1$.
3. *Los únicos números primos consecutivos son el* 2 *y* 3.
4. *Los números* 3, 5, 7 *son los únicos tres números primos que están en progresión aritmética de diferencia común* 2.

Demostración.

1. Si $2n$ es primo, por la Proposición 1, concluimos que $n=1$. Luego, 2 es el único primo par.

2. Un número primo mayor que 3 no es múltiplo de 3 ni de 2. Como todo entero positivo deja residuo 0, 1, 2, 3, 4 o 5 al ser dividido por 6, si deja residuo 0, 2 o 4 sería par, si deja residuo 3 sería múltiplo de 3. Por lo tanto, un número primo solo puede dejar residuo 1 o 5, es decir, es de la forma $6k+1$ o $6k-1$.

3. Si n y $n+1$ son primos, uno de ellos es par, y por lo tanto igual a 2. Como 1 no es primo, el otro número primo es 3.

4. Si n, $n+2$, $n+4$ son números primos, como $0, 2, 4$ dejan distintos residuos al ser divididos por 3, entonces lo mismo sucede con los números $n, n+2, n+4$. En particular, uno de ellos tiene que ser múltiplo de 3, luego, debe ser igual a 3. Pero es claro que si uno de ellos es 3, debería ser el menor de ellos, es decir, los números serían 3, 5 y 7.

$\square$

Problema 2. *Determine si existe un entero positivo n tal que:*

a) n, $n+24$, $n+48$ *sean números primos.*

b) n, $n+26$, $n+52$ *sean números primos.*

Solución.

a) Sí existe, por ejemplo $n=5$, pues 5, 29 y 53 son números primos.

b) Supongamos que exista tal n. Como 0, 26 y 52 dejan distintos residuos al ser divididos por 3, lo mismo sucede con $n, n+26, n+52$, luego, uno de ellos tiene que ser múltiplo de 3, y como es primo debe ser igual a 3, pero el único que puede ser igual a 3 es el menor de ellos. Tendríamos que $n=3$, y los otros números serían 29 y 55, pero $55 = 5\times 11$ no es primo. Concluimos que no existe el n buscado.

Problema 3.

a) Sea n un número entero impar. Demuestre que n^2-1 es múltiplo de 8.

b) Sea $p>3$ un número primo. Demuestre que p^2-1 es múltiplo de 24.

Solución.

a) Si n es impar, entonces $n=2t+1$ para algún entero t, luego,

$$n^2 = 4t^2+4t+1 = 4t(t+1)+1 \Rightarrow n^2-1 = 4t(t+1),$$

pero es claro que $t(t+1)$ es par, entonces n^2-1 es múltiplo de 8.

b) Como $p>3$ es primo, entonces p no es múltiplo de 3. Tenemos $p\equiv \pm 1 \pmod 3$, entonces $p^2\equiv 1 \pmod 3$ lo que significa que p^2-1 es múltiplo de 3. Por la parte anterior, sabemos que p^2-1 es múltiplo de 8, entonces p^2-1 es múltiplo del mínimo común múltiplo de 8 y 3, es decir, es múltiplo de 24.

Problema 4. *Sean p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 y p_6 números primos (no necesariamente distintos) tales que*
$$p_1^2 = p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 + p_6^2.$$
Determine todos los valores que puede tomar p_1.

Solución. Digamos que entre los números p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 hay r primos impares y $5 - r$ números que son iguales a 2, entonces entre los números $p_2^2, p_3^2, p_4^2, p_5^2, p_6^2$ hay r que son congruentes con 1 en módulo 8 (por el problema anterior) y $5 - r$ que son iguales a 4, luego:
$$p_1^2 = p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 + p_6^2 \equiv r \cdot 1 + (5 - r)4 \pmod 8.$$
Pero p_1 es impar porque es mayor que 2, entonces $p_1^2 \equiv 1 \pmod 8$, por lo tanto:
$$1 \equiv r \cdot 1 + (5 - r)4 \pmod 8 \Leftrightarrow 1 \equiv 20 - 3r \pmod 8,$$
de la última relación obtenemos que $r \equiv 1 \pmod 8$, y como r está entre 0 y 5, entonces la única posibilidad es $r = 1$. Es decir, entre los números p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 hay un primo impar y cuatro primos iguales a 2. Supongamos que p_2 es impar y $p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = 2$. Reemplazando:
$$p_1^2 = p_2^2 + 16 \Rightarrow (p_1 + p_2)(p_1 - p_2) = 16,$$
donde los dos factores de la última ecuación son pares y $p_1 + p_2 > p_1 - p_2$, entonces $p_1 + p_2 = 8$ y $p_1 - p_2 = 2$, con lo cual $p_1 = 5$ y $p_2 = 3$. Hemos concluido que el único valor posible de p_1 es 5.

Definición 2. *Un número compuesto es un entero positivo que tiene más de dos divisores positivos.*

Por ejemplo, 6 es un número compuesto pues tiene más de dos divisores positivos, exactamente tiene cuatro, a saber: 1, 2, 3 y 6.

Los números primos tienen exactamente dos divisores positivos, y los números compuestos tienen más de dos. Todo número entero mayor que 1 es primo o es compuesto.

Proposición 3. *Un entero positivo es compuesto si y sólo si se puede expresar de la forma ab, donde a y b son enteros mayores que 1.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Si n es compuesto, debe tener al menos un divisor comprendido entre 1 y n (si no lo tuviera habría exactamente dos divisores positivos). Sea a un divisor de n tal que $1 < a < n$. Definimos $b = \frac{n}{a}$, y es claro que b es divisor de n y además $b > 1$ pues $n > a$. Por lo tanto, tenemos que $n = ab$, donde a y b son divisores de n mayores que 1.
($\Leftarrow$) Supongamos que $n = ab$, donde a y b son enteros mayores que 1. Como $b > 1$, entonces $a < n$. Luego, tenemos que $1, a, n$ son divisores distintos de n, debido a las desigualdades $1 < a < n$. Concluimos que n tiene más de dos divisores, y por lo tanto es compuesto. $\square$

Proposición 4. *Todo entero $n > 1$ tiene al menos un factor primo.*

Demostración. Todo entero $n > 1$ tiene al menos dos divisores, como el 1 siempre es divisor, entonces podemos decir que todo entero $n > 1$ tiene al menos un divisor que es mayor que 1. Sea m el menor de los divisores de n que es mayor que 1. Probaremos que m es primo. Por el contrario, si m fuera compuesto, por la Proposición 3, m se podría expresar como $m = ab$ donde a y b son mayores que 1, luego, tendríamos que $1 < a < m$ y a sería un divisor de n, esto contradice el hecho de que m es el menor divisor de n mayor que 1. Por lo tanto, concluimos que m es primo. $\square$

Problema 5. *Sea $p_1, p_2, p_3, \ldots$, la sucesión de todos los números primos ordenados de menor a mayor. Si $n \geq 2$, demuestre que $p_n + p_{n+1}$ se puede expresar como el producto de al menos tres enteros mayores que 1 (no necesariamente diferentes).*

(Baltic Way, 1992)

Solución. Como $n \geq 2$, entonces p_n y p_{n+1} son números primos impares, en consecuencia $p_n + p_{n+1}$ es par y el número $m = \frac{p_n + p_{n+1}}{2}$ es entero. Como $p_n < m < p_{n+1}$ vemos que m no puede ser primo (ni tampoco puede ser 1), entonces m es compuesto, y como tal, se puede expresar de la forma $m = ab$, donde a y b son enteros mayores que 1. Finalmente notemos que $p_n + p_{n+1} = 2m = 2ab$ está expresado como el producto de tres enteros mayores que 1.

Problema 6. *¿Cuál es el mayor entero positivo par que no puede expresarse como la suma de dos números impares compuestos?* *(AIME, 1984)*

Solución. Demostraremos que 38 es el mayor entero positivo par que no puede expresarse como la suma de dos números impares compuestos.
Los números compuestos impares menores que 38 son 9, 15, 21, 25, 27, 33 y 35. Notemos que no hay dos de ellos que sumen 38, es decir, 38 no se puede expresar como la suma de dos impares compuestos. Por lo tanto, para completar la solución, vamos a demostrar que todos los números pares mayores que 38 se pueden expresar como la suma de dos impares compuestos.
Todo número N, que es par y mayor que 38, tiene alguna de las formas $(40 + 6k)$, $(42 + 6k)$ o $(44 + 6k)$, donde $k \geq 0$ es un entero.

- $N = (40 + 6k)$ se puede expresar como la suma de dos impares compuestos de la siguiente forma:
$$N = (6k + 15) + 25,$$
pues 25 y $(6k + 15) = 3(2k + 5)$ son compuestos.

- $N = (42 + 6k)$ se puede expresar como la suma de dos impares compuestos de la siguiente forma:
$$N = (6k + 33) + 9,$$
pues 9 y $(6k + 33) = 3(2k + 11)$ son compuestos.

- $N = (44 + 6k)$ se puede expresar como la suma de dos impares compuestos de la siguiente forma:
$$N = (6k + 9) + 35,$$

pues 35 y $6k+9=3(2k+3)$ son compuestos.

Problema 7. *Un conjunto está formado por* 15 *números naturales coprimos dos a dos, todos ellos son mayores que* 1 *y no son mayores que* 1992*. Pruebe que en el conjunto hay al menos un número primo.* *(Rusia, 1992)*

Solución. Como los números son coprimos dos a dos, no hay dos de ellos que compartan un divisor primo. Luego, si p_i es el menor divisor primo del i-ésimo número $(1 \leq i \leq 15)$, entonces los números primos $p_1, p_2, \ldots, p_{15}$ son distintos entre sí.

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $p_1 < p_2 < p_3 < \cdots < p_{15}$. Como los 15 primeros números primos son

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47,$$

concluimos que $p_{15} \geq 47$. Sea N el número del conjunto que tiene a p_{15} como menor factor primo. Si N fuera compuesto, entonces $N \geq p_{15}^2 \geq 47^2 = 2209$, que es una contradicción, pues $N \leq 1992$. Con esto concluimos que N es primo.

Hasta ahora, hemos trabajado con los números primos usando solamente la definición, pero aún no sabemos cómo es el conjunto de los números primos. En ese sentido, un primer objetivo sería determinar cuántos números primos hay, ¿habrá una cantidad finita o infinita de números primos? Esta pregunta fue respondida satisfactoriamente por Euclides, aproximadamente en el siglo III a.C. En esa época, no se tenían muchas nociones de lo que era una demostración matemática, es más, muchos de los resultados que se conocían en ese entonces carecían de una demostración formal. Euclides fue uno de los primeros que trató de dar una demostración formal y lógica a los resultados que encontraba.

El siguiente teorema es de vital importancia no sólo en la Teoría de Números sino en la matemática en general. La primera demostración que damos es la demostración original de Euclides, que aparece en su libro *Elementos*.

Teorema 1. *Existen infinitos números primos.*

Demostración. Tomemos cualquier lista finita de números primos $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Demostraremos que existe al menos un número primo adicional que no está en la lista. Sea P el producto de todos los números primos de la lista: $P = p_1p_2\ldots p_n$. Sea $q = P+1$. Entonces, q es primo o no:

- Si q es primo entonces este sería un primo que no está en la lista.
- Si q no es primo entonces, por la Proposición 4, tiene algún divisor primo p. Si este factor p estuviera en nuestra lista, entonces sería un divisor de P (debido a que P es el producto de todos los números de la lista); pero sabemos que p divide a $P+1=q$, con lo cual tendríamos que p divide a P y q, entonces p divide a la diferencia de esos dos números, es decir, p divide a $q-P=(P+1)-P=1$, lo

cual no es posible porque ningún número primo divide a 1. Por lo tanto, hemos demostrado que p no puede estar en la lista. Esto significa que existe al menos un número primo que no está en la lista.

Esto demuestra que para cualquier lista finita de números primos, existe un número primo que no está en la lista. En consecuencia, hay infinitos números primos. □

Problema 8. *Una progresión aritmética está formada por enteros positivos, y es estrictamente creciente, demuestre que al menos uno de los términos de la progresión es un número compuesto.*

Solución. Digamos que la razón de la progresión es r. Como la progresión está formada por enteros y es estrictamente creciente, entonces r es un entero positivo. Consideremos un término m de la progresión que sea mayor que 1, los siguientes términos a partir de m son de la forma $m + nr$, donde $n \geq 1$. Si hacemos $n = m$, obtenemos el número $m+mr = m(1+r)$ que pertenece a la progresión y es compuesto, pues es el producto de dos enteros mayores que 1.

Proposición 5. *Para cualquier entero positivo k, existe una secuencia de k enteros positivos consecutivos tales que todos ellos son compuestos.*

Demostración. Considere los siguientes k números consecutivos:

$$(k+1)!+2, \quad (k+1)!+3, \quad (k+1)!+4, \quad \ldots, \quad (k+1)!+(k+1).$$

Como $(k+1)!$ es múltiplo de los números $2, 3, 4, \ldots, (k+1)$, entonces, el primer número es múltiplo de 2 y es mayor que 2, el siguiente es múltiplo de 3 y es mayor que 3, y así sucesivamente, el último es múltiplo de $(k+1)$ y es mayor que $k+1$. Por lo tanto, todos estos números son compuestos. □

Este resultado nos dice que podemos encontrar "bloques" arbitrariamente grandes de números consecutivos que estén formados únicamente por números compuestos. Esto implica que la diferencia entre dos números primos consecutivos puede ser tan grande como queramos, así por ejemplo, como existen 1000 números consecutivos compuestos, podemos encontrar dos números primos consecutivos cuya diferencia sea mayor que 1000.

Ejercicios

1. Halle todos los números primos p para los cuales $2p+1$ y $4p+1$ también son números primos.

2. Halle todos los números primos p tales que el número $(8p^4 - 3003)$ también es un número primo. (México, 1997)

3. *a*) Dé un ejemplo de cuatro números primos diferentes que estén en progresión aritmética.

   b) Cuatro números primos están en progresión aritmética de diferencia $d > 0$. Encuentre el menor valor posible de d.

4. ¿Cuántos números primos menores que 100 pueden escribirse como la suma de dos números primos y también como la suma de tres números primos, no necesariamente distintos? (Perú, 2006)

5. Determine si existen

   a) cuatro

   b) cinco

   enteros positivos tales que la suma de tres cualesquiera de ellos sea un número primo. (Torneo de las Ciudades, 1995)

6. Varios enteros distintos (no necesariamente positivos) tienen la propiedad de que la suma de cada tres de ellos es positiva y es, además, un número primo. ¿Cuántos son, a lo más, estos enteros? (Argentina, 2010)

7. Dados 6 números naturales distintos, Bill calcula la suma de cada par de ellos. ¿Cuál es la mayor cantidad de números primos que puede obtener Bill? (Bielorusia, 1995)

8. Sea B un subconjunto del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$, tal que si a y b pertenecen a B, entonces $a+b$ es un número compuesto. Halla el mayor número de elementos que puede tener B. (Perú, 2008)

9. Demuestre que los números $18^5 + 1$ y $12^7 + 1$ son compuestos.

10. Halle todos los números primos de la forma $n^n + 1$ que son menores que 10^{19}.

11. Un número natural es capicúa si al escribirlo en notación decimal, se puede leer de igual forma tanto de izquierda a derecha como de derecha a izquierda, por ejemplo: 8, 23432, 6446. Sean $x_1 < x_2 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots$ todos los números capicúas. Para cada i sea $y_i = x_{i+1} - x_i$. ¿Cuántos números primos distintos tiene el conjunto $\{y_1, y_2, y_3, \ldots\}$? (Olimpiada Iberoamericana, 1993).

12. Sea $a_1, a_2, \ldots, a_n$ una progresión aritmética de diferencia 2, formada por enteros positivos. Se sabe que, para $k = 1, 2, \ldots, n$, el número $a_k^2 + 1$ es primo. Determine el mayor valor posible de n. (Rusia, 2002).

13. Un número natural n es tal que $2n+1$ y $3n+1$ son cuadrados perfectos. ¿Puede el número $5n+3$ ser primo? (Rusia, 1993).

14. Demuestre que existen 1000 enteros positivos consecutivos que contienen exactamente 10 números primos.

Problemas de práctica

A continuación presentamos los 20 problemas de práctica seleccionados especialmente para este segundo número del año 2014. Como seguramente ya habrás observado, el nivel de dificultad de los problemas que contiene esta sección varía conforme va transcurriendo el año. Es así, que el material seleccionado para el primer número es en su mayoría de nivel principiante y a partir de ahí, paulatinamente se incrementa el nivel, de manera que la selección para el cuarto (último) número del año es la que incorpora la mayor proporción de problemas avanzados. De cualquier manera, en todos los números siempre buscamos que la selección sea diversa que incluya retos interesantes y a la medida de todos.

Por último, te invitamos a contribuir al enriquecimiento de esta sección de la revista enviando problemas interesantes cuya solución desees compartir. Para ello ponemos a tu disposición la dirección `revistaomm@gmail.com`, donde con gusto recibiremos todas tus propuestas.

Problema 1. En las casillas de una cuadrícula de 20×14 se ponen algunas monedas (una moneda por casilla). Dos monedas son consideradas *vecinas* si están en la misma fila o columna y no hay otra moneda entre ellas. Si se permite que cada moneda tenga a lo más dos vecinas, ¿cuál es la máxima cantidad de monedas que se pueden poner en la cuadrícula?

Problema 2. En el triángulo ABC, los ángulos $\angle A$ y $\angle C$ miden 80° y 60°, respectivamente. ¿Cuánto mide el ángulo agudo formado por las bisectrices de los ángulos $\angle A$ y $\angle B$?

Problema 3. Sea $P(x)$ un polinomio cuadrático con coeficiente principal igual a 1. Si los polinomios $P(x)$ y $P(P(P(x)))$ tienen una raíz en común, demuestra que $P(0)P(1) = 0$.

Problema 4. Demuestra que para cualquier entero positivo $n > 2$, se tiene la siguiente desigualdad

$$n^n - 1 > n^{\frac{n+1}{2}}(n-1).$$

Problema 5. Un entero positivo n es *chilo* si $4n+1$ es múltiplo de 5. ¿Cuántos números chilos hay entre 500 y 1000?

Problema 6. En un cuadrilátero $ABCD$ el lado AB es paralelo al lado DC y $\frac{AB}{DC} = 3$. Si E es la intersección de las diagonales AC y BD y el área de $ABCD$ es $1\,cm^2$, ¿cuál es el área del triángulo ABE?

Problema 7. Determina todas las ternas de números primos (p, q, r) que satisfacen las relaciones $pq \mid r^4 - 1$, $pr \mid q^4 - 1$ y $qr \mid p^4 - 1$.

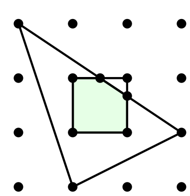
Problema 8. En un tablero de dos renglones y tres columnas, se van a escribir dos letras A, dos letras B y dos letras C, una en cada casilla. ¿De cuántas maneras se puede hacer esto de manera que no haya dos letras iguales en la misma columna?

Problema 9. Alberto, Beatriz, Carlos, Daniel y Esteban tienen cada uno un libro. Cada uno de ellos arranca 45 hojas de su propio libro y suman los 90 números de las páginas de las hojas que arrancaron. Las sumas que obtuvieron Alberto, Beatriz, Carlos, Daniel y Esteban fueron 2003, 2007, 2013, 2070 y 2073, respectivamente. Supón que sólo uno de ellos se equivocó al sumar. ¿Quién fue?

Problema 10. Gerardo y Fernando son muy amigos. En su escuela les dejan tomar de 1 a 11 talleres. Si ninguno de los dos sabe cuáles talleres va a tomar el otro, ¿cuál es la mínima cantidad de talleres que cada uno debe tomar para garantizar que por lo menos estarán juntos en un taller?

Problema 11. Sea $ABCD$ un paralelogramo y sean E y F los puntos medios de BC y CD, respectivamente. Los segmentos AE y AF intersectan a la diagonal BD en M y N, respectivamente. Demuestra que M y N dividen a BD en tres partes iguales.

Problema 12. En la figura, las distancias entre dos puntos consecutivos (horizontal y verticalmente) es igual a $1\,cm$. ¿Cuánto mide el área de la región común entre el triángulo y el cuadrado?



Problema 13. Una lámpara de techo tiene siete focos, acomodados de forma circular y cada uno de los focos tiene su propio interruptor. Un día, dicha lámpara sufre un desperfecto y los interruptores ahora cambian el estado tanto del foco original como de los siguientes cuatro focos en el sentido horario (ahora cada interruptor cambia el estado de cinco focos consecutivos).

(a) Suponiendo que inicialmente todos los focos están apagados. Muestra que, usando sólo los interruptores, es posible llegar a que todos los focos estén encendidos al mismo tiempo.

(b) Suponiendo que inicialmente todos los focos están apagados. Muestra que, usando sólo los interruptores, es posible obtener cualquier configuración de focos encendidos y apagados.

(c) Un día, un electricista altera los interruptores, de manera que ahora cada interruptor cambia de encendido a apagado al foco original y a los siguientes tres focos en el sentido horario (ahora cada interruptor cambia el estado de cuatro focos consecutivos). Muestra que si todos los focos están apagados, ahora es imposible obtener que todos los focos estén encendidos.

Problema 14. Para cada entero positivo n denotamos por $S(n)$ a la suma de sus dígitos y por $U(n)$ al dígito de sus unidades. Encuentra todos los enteros positivos n tales que $n = S(n) + U(n)^2$.

Problema 15. Cincuenta puntos se eligen en el interior de un polígono convexo de 80 lados de tal manera que entre los 130 puntos (los 80 vértices y los 50 puntos del interior) no hay tres colineales. Se divide el polígono en triángulos de manera que cada triángulo está formado por tres vértices de esos 130 puntos y tal que no quedan puntos sin ser parte de un triángulo. ¿En cuántos triángulos se dividió el polígono?

Problema 16. A es un número de dos dígitos y B es un número de tres dígitos tales que A incrementado en $B\,\%$ es igual a B reducido en $A\,\%$. Encuentra todas las parejas posibles (A, B).

Problema 17. Con los dígitos $1, 2, 3, 4, 5, 6$ se forman dos números de tres dígitos, usando cada dígito exactamente una vez. ¿Cuál es la menor diferencia que puede haber entre el mayor y el menor de ellos?

Problema 18. Una zapatería tiene 175 botas talla 8, 175 botas talla 9 y 200 botas talla 10. De estas 550 botas, 250 son para pie izquierdo y 300 son para pie derecho. Sea n el número de pares usables de botas. ¿Es posible que $n = 50$? ¿Es posible que $n = 51$? (Un par de botas usable consiste en una pareja de botas de la misma talla, una de ellas izquierda y la otra derecha. Además, una bota no puede contarse más de una vez en los pares usables.)

Problema 19. Determina todos los enteros $r > s > t$ y todos los polinomios cuadráticos de la forma $f(x) = x^2 + bx + c$ tales que b y c son números enteros, $r + t = 2s$, $f(r) = 1$, $f(s) = b$ y $f(t) = c$.

Problema 20. Se tiene un tesoro guardado en una caja cerrada con cierto número de candados. 10 personas tienen cada una llaves de algunos de los candados de tal manera que cualesquiera tres personas pueden abrir la caja pero no hay dos que puedan abrirla. ¿Cuál es la menor cantidad de candados que puede haber?