# Un problema de geometría:

## Entrenamientos del equipo de Nuevo León de la

## Olimpiada Mexicana de Matemáticas

**Por Héctor Raymundo Flores Cantú**

**Nivel Introductorio**

Estas notas reflejan algunas de las sesiones de entrenamiento del equipo de seleccionados de Nuevo León. El enfoque de aprendizaje está basado en problemas y las herramientas teóricas se van explicando a la par de los problemas. En particular, el objetivo de esta sesión es iniciar con el análisis de problemas menos directos que requieren una mayor concentración, reconocimiento de patrones y un análisis considerable de alternativas.

La discusión está dirigida al nivel que llamamos "Matemáticos" donde el objetivo es empezar a formalizar el lenguaje matemático y el uso de conceptos y teoremas de forma correcta. Usaremos algunos problemas de los concursos nacionales de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas.

## El problema

Empezaremos con un problema de geometría del examen del concurso nacional de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas del año 2012. Aunque este es el problema 1 del examen, realmente no era "fácil".

**Problema 1** *Sean $\mathcal{C}_1$ una circunferencia con centro $O$, $P$ un punto sobre ella y $\ell$ la recta tangente a $\mathcal{C}_1$ en $P$. Considera un punto $Q$ sobre $\ell$, distinto de $P$ y sea $\mathcal{C}_2$ la circunferencia que pasa por $O$, $P$ y $Q$. El segmento $OQ$ interseca a $\mathcal{C}_1$ en $S$ y la recta*

*$PS$ interseca a $\mathcal{C}_2$ en un punto $R$ distinto de $P$. Si $r_1$ y $r_2$ son las longitudes de los radios de $\mathcal{C}_1$ y de $\mathcal{C}_2$, respectivamente, muestra que*

$$\frac{PS}{SR} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Los problemas de la olimpiada de matemáticas no son sencillos. Si tú eres de los que sólo con leer el problema ya tienes una idea del tipo de solución, entonces este problema es una pérdida de tu tiempo. Estas notas están dirigidas para aquellos que tienen incluso dificultades para entender con claridad lo que se está pidiendo o para aquellos que aun si entienden, no tienen idea de cómo empezar.

### Paso 1: LEER

Una vez dicho esto... empecemos a pensar.

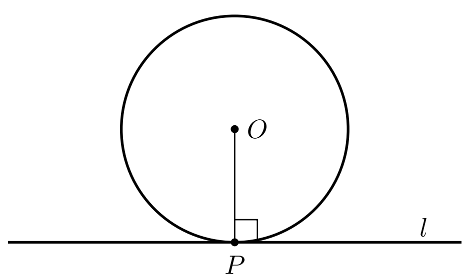
El primer paso siempre es LEER el problema y tristemente no todos saben leer. Por "leer" no me refiero a recitar lo que dice el problema, sino a realmente pensar mientras vas leyendo. Para leer de esta forma, necesitamos hacerlo poco a poco, oración por oración.
La primera oración dice:

SEAN $\mathcal{C}_1$ UNA CIRCUNFERENCIA CON CENTRO $O$,
$P$ UN PUNTO SOBRE ELLA Y $\ell$ LA RECTA TANGENTE A $\mathcal{C}_1$ EN $P$.

Antes de seguir leyendo vamos a asegurarnos de habernos familiarizado con esta oración. Si aquí hay alguna duda, ¿para qué perdemos el tiempo siguiendo con la lectura?

## Investigando la primera oración

En esta frase nos hablan de la existencia de una circunferencia que llamaremos $\mathcal{C}_1$, el centro de esa circunferencia se llama $O$ y $P$ es un punto sobre ella (o sea sobre la circunferencia). Esto es suficiente para hacer la siguiente figura. Podemos elegir cualquier punto en la circunferencia, pero usualmente conviene elegir un punto especial en el dibujo. Por ejemplo nosotros elegiremos el punto de abajo. Luego nos dicen que se traza una recta tangente a la circunferencia por el punto $P$ que se llama $\ell$. Esto significa que la recta "toca" a la circunferencia exactamente en el punto $P$.




De esta figura, podemos ya empezar a decir algo. En particular sabemos que...

**Patrón 1**

*...una recta tangente a una circunferencia*
*siempre es perpendicular*
*al radio que va del centro al punto de tangencia.*

Es decir, en nuestra figura la recta hace un ángulo de $90^\circ$ con el radio del círculo. Como no se nos ocurre nada más qué decir, debemos seguir con la lectura.

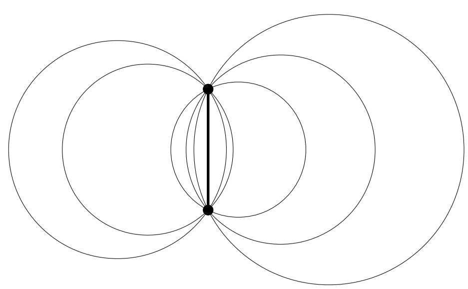
# Investigando la segunda oración

La segunda oración dice:

CONSIDERA UN PUNTO $Q$ SOBRE $\ell$, DISTINTO DE $P$ Y
SEA $\mathcal{C}_2$ LA CIRCUNFERENCIA QUE PASA POR $O$, $P$ Y $Q$.

Ahora debemos pensar en otro punto $Q$ sobre la recta y nos piden que imaginemos una circunferencia que pasa por los tres puntos que hasta ahora hemos definido. Trazar una circunferencia por tres puntos no es algo fácil, así que nos detendremos un momento para seguir pensando antes de seguir leyendo.

El punto $Q$ podría ser cualquiera en la recta, conviene que pensemos cómo se ve la figura al considerar diferentes opciones para este punto. Si suponemos que los otros dos puntos $O$ y $P$ están fijos entonces, ¿qué podemos decir sobre las circunferencias que pasan por esos dos puntos? Olvidemos por un momento la circunferencia $\mathcal{C}_1$, veamos solo $O$ y $P$.
Las circunferencias que pasan por dos puntos fijos se ven de la siguiente forma.

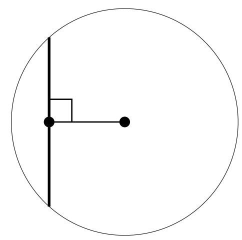


Si aún no tienes respuesta a la pregunta anterior, entonces marca los centros de los círculos. ¿Qué podemos decir sobre esos centros?
No es muy difícil sospechar que todos esos centros estarán en una recta que es perpendicular y pasa por el punto medio del segmento. De hecho es posible que ya sepas lo siguiente.

**Patrón 2**

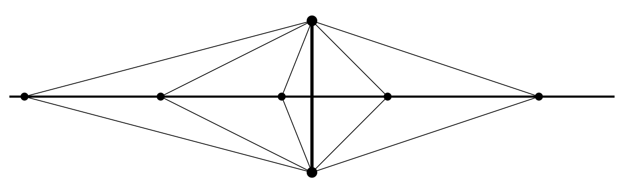
*En una circunferencia, una cuerda es perpendicular*
*al segmento que va de su punto medio al centro.*

La figura correspondiente es la siguiente.



Este hecho geométrico nos permite asegurar que los centros de todos los círculos que pasan por dos puntos forman una recta que es perpendicular al segmento y pasa por el punto medio. Esta recta es tan especial que tiene nombre, se llama *MEDIATRIZ* del segmento.

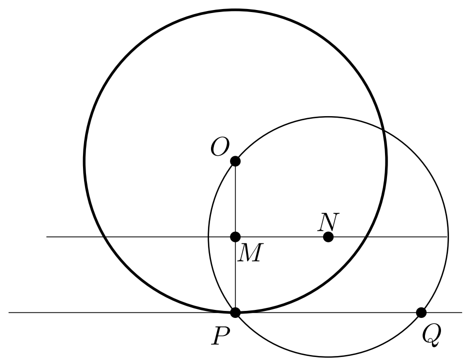
**Definición 1** *Dado un segmento, la recta que es perpendicular al segmento y pasa por su punto medio, se llama* mediatriz del segmento.



Esta recta es el eje de simetría del segmento y tiene varias propiedades que suelen ser muy útiles en los problemas. Por ejemplo, otra cosa que no debemos olvidar es que los triángulos formados por la cuerda y el centro de un círculo son siempre isósceles. Con esto tenemos siempre dos lados iguales y dos ángulos iguales que pueden servirnos.

Pero antes de seguir con la lectura del problema, conviene que nos detengamos a pensar. ¿Qué podemos decir si consideramos todo lo que sabemos hasta ahora? Como ejercicio, mira la figura y trata de descubrir cosas que no habíamos dicho antes.

Ahora podemos regresar al problema. Retomando las dos partes que hemos analizado obtenemos la siguiente figura.

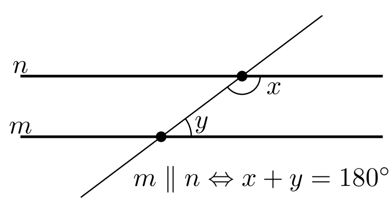



Si llamamos $N$ al centro de la circunferencia $\mathcal{C}_2$, podemos por ejemplo darnos cuenta de que la recta que pasa por $M$ y $N$ es paralela a la recta $\ell$. ¿Cómo justificas eso?

Esto es verdadero debido a que ambas son perpendiculares al segmento $OP$, pero la idea más general que sirve mucho en problemas de geometría es la siguiente. Si necesitas demostrar que dos rectas son paralelas, fíjate en los ángulos que forman con una tercera recta.

**Patrón 3**

*Si tenemos tres rectas,*
*la tercera forma un ángulo* ***x*** *con la primera recta*
*y además un ángulo* ***y*** *con la segunda,*
*entonces la primera y segunda recta son paralelas*
*si y sólo si* ***x+y***$= 180^o$.




Éste es un resultado muy conocido sobre ángulos entre paralelas, así que no nos detendremos mucho con esto. Porque aún no hemos terminado con la figura de nuestro problema.

Observa los puntos $O, Q$ y $N$. ¿Qué puedes decir acerca de ellos?

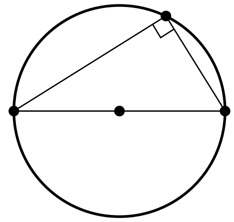
Parece que los tres están sobre una misma línea. De hecho es posible que sospeches que $OQ$ es diámetro de la circunferencia $\mathcal{C}_2$. Pero, ¿cómo podemos estar seguros de eso?

Nada de lo que hemos hecho hasta ahora nos indica que $OQ$ sea un diámetro. Para esto necesitaremos otro patrón geométrico que es muy importante reconocer.

**Patrón 4**

*El ángulo que inscribe una cuerda en una circunferencia*
*es de* $90^\circ$ *si y sólo si la cuerda es un diámetro.*

Geométricamente el patrón se ve así.



Este resultado se conoce como el *Segundo Teorema de Tales*. Aunque el resultado ya era conocido antes, se cree que Tales de Mileto fue el primero en demostrarlo usando triángulos isósceles. Otra manera fácil de convencerse es trazar el diámetro que pasa por el vértice del ángulo recto. De esta forma los dos diámetros serán diagonales de un rectángulo. También dice la leyenda que estaba tan contento que sacrificó un buey en honor a este descubrimiento. Sea como sea, es un resultado importante y suele ser una técnica posible cuando necesitamos demostrar cosas como las siguientes.

- Que un ángulo es recto (o que dos rectas son perpendiculares).
- Que una cuerda de una circunferencia es diámetro.
- Que un punto es punto medio de un segmento.

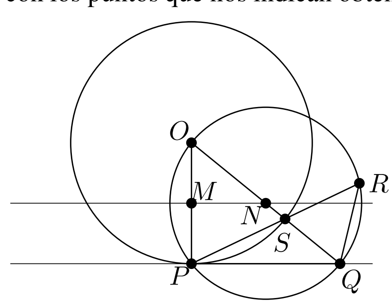
Esa segunda oración realmente tenía mucho contenido. Pero no hemos terminado de leer el problema.

# Investigando la tercera oración

La tercera oración dice:

EL SEGMENTO $OQ$ INTERSECA A $\mathcal{C}_1$ EN $S$ Y
LA RECTA $PS$ INTERSECA A $\mathcal{C}_2$ EN UN PUNTO $R$ DISTINTO DE $P$.

Si completamos la figura con los puntos que nos indican obtenemos lo siguiente.



Otra vez, antes de seguir leyendo pensemos en torno a esta figura. Observa los nuevos puntos y trata de descubrir algo nuevo.

Realmente hay muchas cosas que decir, pero no por eso vamos a detenernos. Simplemente debemos ser ordenados. Como ejercicio deberías detener la lectura y tratar de hallar la mayor cantidad posible de cosas en la figura.

Pero si te da pereza, ponemos algunas de ellas como ejercicios.

**Ejercicio 1** *Con la información de la última figura debes convencerte de lo siguiente.*

*a)* $\angle OSP = \angle QSR$.

*b)* *El triángulo* $OPS$ *es isósceles.*

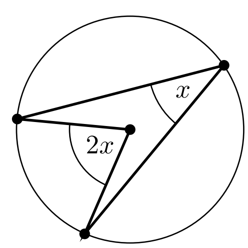
*c)* $\angle POS = 2\angle QPS$.

*d)* $\triangle POS \sim \triangle QRS$.

Los incisos a) y b) son muy fáciles y no vamos a discutirlos. Pero los incisos c) y d) pueden no ser tan evidentes para quienes no estén familiarizados con la geometría del círculo. Para esto vamos a requerir otros patrones geométricos importantes. Primero el siguiente

**Patrón 5**

*El ángulo central que abarca una cuerda mide el doble que cualquier ángulo inscrito a la misma cuerda.*

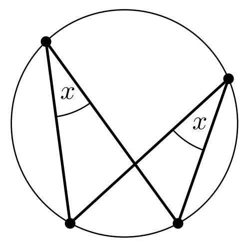



La justificación de este patrón vamos a dejarla como ejercicio. Pero si necesitas una sugerencia recomendamos trazar la recta que pasa por el centro y el vértice del angulo inscrito. Luego fíjate en los ángulos que se forman con ella y las cuerdas.

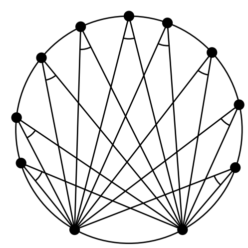
Una vez que te convences de lo anterior y si imaginas que el vértice del ángulo inscrito se mueve sobre la circunferencia, puedes convencerte de que los ángulos inscritos no cambian, porque el ángulo central siempre es el mismo. Esto significa que dos ángulos inscritos al mismo arco siempre son congruentes. Esto lo hacemos notar en el siguiente patrón.

**Patrón 6**

*Dos ángulos inscritos al mismo arco son iguales.*



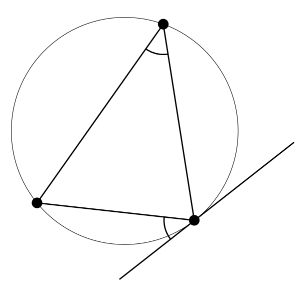

Si te imaginas muchos puntos sobre la circunferencia todos formando ángulos inscritos con el mismo arco, entonces los ángulos serán iguales. Como la figura parece un maguey, algunos conocemos a este teorema como *El Teorema del Maguey*.



Siguiendo esta misma idea de mover el punto, imagina que el punto se acerca a uno de los puntos fijos. ¿Qué pasa entonces con el ángulo? Resulta que en ese extremo, el ángulo se aproxima al que forma la cuerda con la recta tangente a la circunferencia en el punto fijo. Este resultado lo vamos a resaltar como otro patrón. Esto porque por alguna razón muchos alumnos tienen problemas para reconocer cuándo usarlo.

**Patrón 7**

*En una circunferencia,*
*el ángulo que una cuerda forma con la tangente en uno de sus puntos*
*es igual al ángulo inscrito en esa cuerda.*

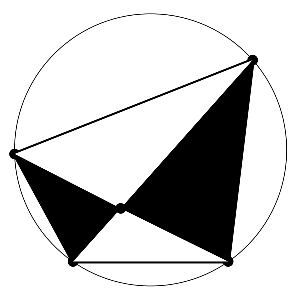


La demostración de esto, también la dejamos como ejercicio. Pero como siempre cuando hay tangentes a un círculo, puede ser buena idea trazar el segmento que va del centro del círculo al punto de tangencia.

Este patrón es el que resuelve la cuestión del inciso c) del ejercicio anterior. Pero aún tenemos que justificar el inciso d). Esto último será apenas la entrada a un tema intermedio relacionado con la geometría del círculo. Nuestra entrada es el siguiente patrón.

**Patrón 8**

*Si dos cuerdas se cortan dentro de un círculo,*
*se forman dos pares de triángulos semejantes.*



Para la justificación de este patrón, necesitaremos utilizar los conceptos de triángulos similares o triángulos semejantes. Podemos usar el teorema del Maguey para ver que sus pares de ángulos son iguales. Esto es suficiente para que sean semejantes.

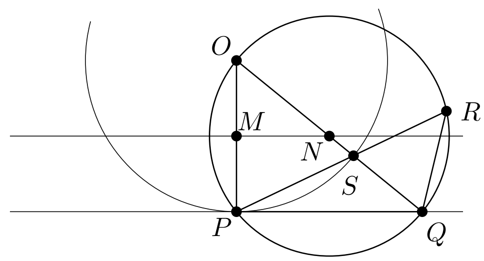
De esta igualdad se deduce directamente el inciso d). Además, si conectamos esto con el inciso b) sabremos que en nuestro problema el triángulo $SRQ$ también es isósceles, en particular sabremos que $SR = QR$.

## Investigando el final del problema

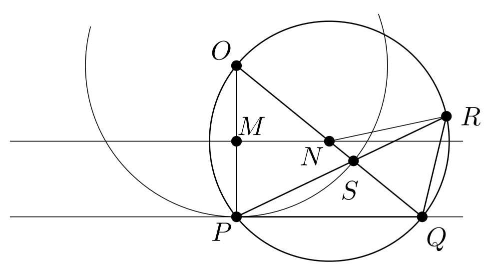
Finalmente la última parte del problema nos hace la verdadera pregunta.

Si $r_1$ y $r_2$ son las las longitudes de los radios
de $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, respectivamente,
muestra que $\frac{PS}{SR} = \frac{r_1}{r_2}$.

Para terminar vamos a necesitar otra vez la figura.




Ahora vamos a analizar la última oración. Esta nos indica el objetivo del problema y podemos identificarlo como la igualdad entre dos proporciones. El uso de triángulos semejantes es muchas veces el medio de demostrar proporciones. La dificultad es entonces encontrar los triángulos adecuados. Pero analizando lo que nos piden podemos sospechar qué triángulos podrían ser.
Los segmentos involucrados son $PS, SR, r_1$ y $r_2$. Los tres primeros ya los hemos usado en triángulos, el único que no hemos usado es $r_2$, el radio de la segunda circunferencia. Necesitamos un triángulo que tenga un lado $r_2$ y de preferencia que esté relacionado con los lados que ya hemos analizado. Los candidatos son los triángulos que se forman conectando el centro de la segunda circunferencia $N$ con puntos de la circunferencia. Como ejercicio, analiza los triángulos que tienen como lados algunos de los siguientes segmentos: $NO, NP, NQ, NR$. ¿Qué puedes decir acerca de cada uno de ellos?




Es posible que te tome unos minutos, pero eventualmente debes notar que el triángulo $QNR$ es semejante a los triángulos que ya habíamos analizado. Es decir

$$\triangle POS \sim \triangle SRQ \sim \triangle QNR.$$

Se obtienen muchas proporciones, pero si nos enfocamos en las que tienen los segmentos que nos interesan obtenemos que $\frac{OP}{NQ} = \frac{PS}{QR}$. Finalmente dado que $QR = SR$, $OP = r_1$ y $NQ = r_2$, podemos concluir que $\frac{r_1}{r_2} = \frac{PS}{SR}$, que es lo que nos habían pedido.

# Conclusiones

El análisis de este problema nos deja mucho aprendizaje. Además de todos los patrones y resultados que hemos usado, nos enseña que para resolver un problema es necesario avanzar poco a poco. Normalmente es más difícil resolver problemas de este tipo, leyendo todo de una vez y haciendo una sola figura. Los problemas de geometría con figuras complejas deberían ser investigados de una forma similar a la que presentamos en esta sección. Esta es de hecho una lección estratégica.

*Los problemas complejos se analizan poco a poco.*

Otra de las lecciones del problema es la siguiente.

*La semejanza de triángulos nos sirve para conectar ángulos con proporciones.*

Si nuestro objetivo es demostrar una proporción y tenemos algunos ángulos iguales, semejanzas puede ser una técnica útil. Pero en otros problemas, buscamos demostrar que hay ángulos iguales y tenemos información sobre proporciones. Vuelve a dar una leída a este texto y toma nota de todas las lecciones que puedas.

# Ejercicios

1. Sea $AB$ un diámetro de una circunferencia $g$. Un punto $C$ se elige sobre el segmento $AB$ y se traza una recta $m$ por el punto $C$ perpendicular a $AB$. Sea $D$ el punto de intersección de la recta $m$ con la circunferencia $g$. Una segunda circunferencia $g'$ es tangente a la recta $m$ en el punto $D$ y pasa por el punto $A$. Demuestra que las circunferencias $g$ y $g'$ tienen el mismo radio.

2. Considera un punto arbitrario $O$ sobre un segmento $PQ$, de forma que no sea su punto medio. Hacia el mismo lado del segmento $PQ$ se construyen los triángulos equiláteros $OPA$ y $OQB$. Llamamos $N$ y $L$ a los puntos medios de los segmentos $PB$ y $QA$ respectivamente. Demuestra que $NLO$ es un triángulo equilátero.

3. Sobre el lado $AB$ de un triángulo $ABC$ se elije un punto arbitrario $P$. Por este punto $P$ se traza una recta $m$ que corta al triángulo en dos figuras de áreas iguales. El segundo punto de intersección de la recta $m$ con el triángulo se llama $Q$. La paralela por $Q$ al segmento $CP$ corta al lado $AB$ en el punto $D$. Demuestra que $D$ es el punto medio del lado $AB$.

4. Sea $ABCD$ un cuadrado. Con centro en el vértice $A$ se traza una circunferencia de radio igual al lado del cuadrado que pasa por los vértices $B$ y $D$. Sobre $BC$ se elige un punto $E$ y sobre $CD$ el punto $F$ de forma que $EF$ es tangente a la circunferencia. Demuestra que el ángulo $EAF$ mide $45°$.

5. En el problema anterior, asumiendo que no sabes que $EF$ es tangente a la circunferencia, demuestra que si el ángulo $EAF$ es de $45°$ entonces $EF$ tiene que ser tangente a la circunferencia.