Contando con polinomios

Por Didier Adán Solís Gamboa

Nivel Intermedio

Uno de los campos más activos dentro del ámbito de las matemáticas discretas en los últimos veinte años es la llamada *combinatoria algebraica*, la cual consiste en asociar diversas estructuras algebraicas (polinomios, matrices, etc.) a objetos de naturaleza combinatoria (arreglos, gráficas, politopos, geometrías finitas, etc.). El propósito de este escrito es presentar algunas técnicas basadas en el uso de polinomios y series formales (es decir, polinomios con un número infinito de términos) que resultan útiles para plantear y resolver problemas de conteo en el contexto de la Olimpiada de Matemáticas. Esperamos que el lector que explore por primera vez estas ideas encuentre en ellas herramientas lo suficientemente útiles y versátiles; en tanto que el lector con más experiencia en la resolución de problemas de combinatoria encuentre en este material un interesante primer acercamiento al vasto mundo de las funciones generadoras.

La idea fundamental

Recordemos que un polinomio $p(x)$ es una expresión algebraica de la forma

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$$

donde x es una variable algebraica y $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ($a_n \neq 0$) son números reales llamados *coeficientes*. El número n recibe el nombre de *grado* del polinomio.
Saber sumar y multiplicar polinomios es una de las habilidades básicas en la Olimpiada y constituye el fundamento del álgebra elemental. Quizá en estos momentos ya efectuemos estas operaciones de forma mecánica. Sin embargo, para conseguir nuestros fines conviene prestarle un poco más de atención a la forma en que estas operaciones se realizan.

El siguiente ejemplo encierra la idea básica detrás de todo lo que iremos desarrollando en este material: ***identificar coeficientes de polinomios con el resultado de un conteo.*** Por ejemplo, sabemos que el coeficiente del término a^2b en $(a+b)^3$ es 3 ya que

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Por otro lado, este coeficiente coincide con el número de palabras de tres letras que pueden formarse usando dos letras a y una letra b. La conexión queda clara si desarrollamos paso a paso (y sin simplificar) la expresión $(a+b)^3$:

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)(a+b)\\ &= (a+b)[a(a+b)+b(a+b)]\\ &= (a+b)(aa+ab+ba+bb)\\ &= a((aa+ab+ba+bb)+b(aa+ab+ba+bb)\\ &= aaa+aab+aba+abb+baa+bab+bba+bbb.\end{aligned}$$

Así resulta fácil observar que el término $3a^2b$ se obtiene al sumar las palabras aab, aba y baa. Visto de otra forma, el coeficiente del término en a^2b "lleva la cuenta"del número de palabras que se pueden formar con dos a y una b.
Procediendo con la misma lógica podemos establecer la célebre fórmula del Binomio de Newton.

Ejemplo 1 ***(Teorema del Binomio)*** *Sea n un número natural. Demuestra que*

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n}b^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i.$$

Solución. Efectuemos el producto

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\cdots(a+b)}_{n}$$

como lo hicimos anteriormente (es decir, paso a paso) para obtener una suma de palabras. Notemos que aquellas palabras que tienen i letras b y $n-i$ letras a se agrupan para obtener el término en $a^{n-i}b^i$. Por tanto, el coeficiente de dicho término es igual al número de palabras con i letras b y $n-i$ letras a. Si pensamos en cada factor $(a+b)$ como una caja donde están colocadas la letra a y la letra b, entonces cada una de estas palabras se forma tomando i de estas cajas y escogiendo en ellas la letra b en tanto que en las restantes cajas se escoge la letra a. Por tanto, existen $\binom{n}{i}$ palabras con i letras b y $n-i$ letras a, con lo cual se concluye la demostración.

Ahora apliquemos esta misma técnica de comparación entre coeficientes de polinomios para demostrar un famoso resultado en Teoría de Números.

Ejemplo 2 *Sea $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_m^{\alpha_m}$ un número natural escrito en su descomposición en primos. Halla en términos de los primos p_i y de los números α_i, una fórmula para $\sigma(n)$, la suma de los divisores positivos de n.*

Solución. Observemos que cada divisor positivo de n es un número de la forma

$$d = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_m^{a_m},$$

donde $0 \leq a_i \leq \alpha_i$ para cada $i = 1, \ldots, m$ (ver el artículo de Tzaloa 1, 2013). Por tanto,

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_m^{a_m}$$

puede visualizarse como un polinomio en las variables p_i cuyos términos son precisamente los divisores de n. Notemos además que cada uno de estos divisores puede considerarse como una palabra hecha con las letras $p_1^{a_1}, p_2^{a_2}, \ldots, p_m^{a_m}$, en ese orden. Al igual que en el ejemplo anterior, queremos ver a $\sigma(n)$ como un producto de polinomios

$$\sigma(n) = d_1(n) d_2(n) \cdots d_m(n)$$

donde cada letra se toma de un factor distinto. Dado que la k-ésima letra es $p_k^{a_k}$, entonces el k-ésimo factor del producto debe contener a todos los posibles valores de a_k, es decir, $\{1, p_k, p_k^2, \ldots, p_k^{\alpha_k}\}$. Por tanto, el k-ésimo factor en $\sigma(n)$ es

$$1 + p_k + p_k^2 + \cdots + p_k^{\alpha_k} = \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1},$$

y en consecuencia

$$\sigma(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdots \frac{p_m^{\alpha_m+1} - 1}{p_m - 1}.$$

Finalizamos este apartado con un ejemplo más.

Ejemplo 3 *Para cada subconjunto $A \neq \emptyset$ del conjunto $X = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ sea $P(A)$ el recíproco del producto de todos los elementos de A. Halla $P = \sum_A P(A)$.*

Solución. Sea $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \subset X$ entonces

$$P(A) = \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_k} = \frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{a_k}.$$

Por tanto, $P(A)$ es una palabra formada con las letras $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_k}$ y en consecuencia P puede verse como un polinomio. Más aún, podemos expresar P como un producto de polinomios donde cada letra que conforma la palabra $P(A)$ debe proceder de un factor distinto. Así el producto de polinomios buscado es

$$P = \left(1 + \frac{1}{1}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

donde cada factor es de la forma $1 + \frac{1}{i}$.

Sin embargo, al expandir este producto aparece (además de todos los sumandos requeridos) un sumando 1 que corresponde a escoger el término 1 de cada factor, o de manera equivalente, a escoger $A = \emptyset$. Por tanto tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_A P(A) &= \left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\\ &= \left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{n+1}{n}\right)-1\\ &= (n+1)-1=n.\end{aligned}$$

Otra mirada al producto de polinomios

Como hemos podido constatar en los ejemplos previos, el producto de polinomios juega un papel muy importante en el empleo de esta técnica. Por tanto, resulta conveniente observar más detenidamente cómo se realiza el producto de dos polinomios. Para efectuar este análisis, resulta conveniente visualizar a los polinomios dentro del contexto más amplio de las *series formales*, es decir, expresiones algebraicas con quizá un número infinito de términos. De manera precisa, una serie formal $S(x)$ en x es una expresión de la forma

$$S(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n,$$

donde $a_0, a_1, a_2, \ldots$ son números reales.
De tal modo, un polinomio de grado N es una serie formal donde $a_N \neq 0$ y $a_n = 0$ para $n > N$. En el lenguaje de las series formales podemos expresar el producto de dos series de manera muy sencilla.

Teorema 1 *Si* $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ *y* $R(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n$ *entonces* $S(x)R(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n$ *donde*

$$c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + a_2b_{n-2} + \ldots + a_nb_0 = \sum_{i=0}^{i} a_ib_{n-i}.$$

Demostración. Notemos que el resultado de multiplicar el término a^ix^i de $S(x)$ con el término b^jx^j de $R(x)$ es $a^ib^jx^{i+j}$. Más aún, debido a las leyes de los exponentes, la única forma de obtener un término de la forma x^n en el producto $S(x)R(x)$ es tomando una pareja (i, j) tal que $n = i + j$ y realizando el producto antes mencionado. Haciendo $j = n - i$ se obtiene el resultado.
Esta fórmula nos permite interpretar una suma de productos al estilo del lado derecho de la igualdad anterior como el coeficiente de una serie formal que se obtiene de multiplicar dos series formales. Este hecho con frecuencia puede ser usado para demostrar identidades combinatorias. A continuación presentamos un ejemplo.

Ejemplo 4 ***(Identidad de Vandermonde)*** *Demuestra la siguiente igualdad*

$$\binom{n+m}{k} = \binom{n}{0}\binom{m}{k} + \binom{n}{1}\binom{m}{k-1} + \binom{n}{2}\binom{m}{k-2} + \cdots + \binom{n}{k}\binom{m}{0}.$$

Solución. En vista del Teorema del Binomio, podemos aplicar directamente la fórmula del producto de series formales para deducir que la suma en el lado derecho de la igualdad es en realidad el coeficiente de x^k en el producto

$$(x+1)^n(x+1)^m = (x+1)^{n+m},$$

con lo que el resultado se sigue de inmediato.
En ocasiones una serie formal puede admitir una *expresión cerrada*, es decir una expresión que no involucra un número infinito de términos. El siguiente ejemplo es de gran importancia.

Ejemplo 5 ***(Serie geométrica)*** *La serie* $G(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ *admite la expresión cerrada* $G(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

Solución. Notemos que $xG(x) = x + x^2 + x^3 + \cdots$, y por lo tanto $(1-x)G(x) = G(x) - xG(x) = 1$, de donde el resultado se sigue de inmediato.

Ejemplo 6 *Calcula una expresión cerrada para las siguientes series formales:*

1. $A(x) = x^k + x^{k+1} + x^{k+2} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} x^{k+i}$.
2. $B(x) = 1 + x^2 + x^4 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} x^{2i}$.

Solución. Para el primer inciso, observemos que

$$A(x) = x^k(1 + x + x^2 + \cdots) = x^k G(x) = \frac{x^k}{1-x}.$$

Por otro lado, observemos que $B(x) = G(x^2) = \dfrac{1}{1-x^2}$.

El Teorema del Binomio admite una generalización que nos permite encontrar expresiones cerradas para un gran número de series formales. La demostración de este elegante y poderoso resultado queda fuera del ámbito de este artículo por lo que lo enunciaremos sin demostración.

Teorema 2 *Sea r un número real, entonces*

$$(a+b)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-k+1)}{k!} a^{r-k} b^k.$$

Observemos que cuando r es un entero no negativo entonces

$$\frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-k+1)}{k!} = \begin{cases} \binom{r}{k} & \text{si } k \le r \\ 0 & \text{si } k > r. \end{cases}$$

y en consecuencia el Teorema 2 se reduce al Teorema del Binomio.
Por otro lado, si $r = -m$ con m un entero positivo, entonces

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+x)^m} = (1+x)^r &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-k+1)}{k!} x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{m(m+1)(m+2)\cdots(m+k-1)}{k!} x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{m+k-1}{k} x^k.\end{aligned}$$

En los siguientes ejemplos delinearemos un método que nos permitirá sacar el máximo provecho a las técnicas que hemos discutido.

Aplicaciones

Ejemplo 7 *¿De cuántas formas se pueden repartir* 10 *manzanas entre* 6 *niños de manera que no sobre ninguna?*

Solución. Este es un clásico problema que se puede resolver usando la técnica de separadores. En este caso, lo abordaremos desde el punto de vista de la multiplicación de series formales. Notemos primeramente que este problema es equivalente al de hallar todas las formas en que 10 puede escribirse como suma de seis enteros no negativos, o equivalentemente, soluciones enteras a la ecuación

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_6 = 10.$$

De tal suerte, es posible plantear el problema en términos de multiplicación de polinomios: se trata de hallar el coeficiente de x^{10} en el producto de seis polinomios, donde cada uno aporta un término de la forma x^{n_i} en la construcción de una palabra o monomio. (Por ejemplo, la suma $4 + 2 + 0 + 1 + 2 + 1$ estaría representada por $x^4 \cdot x^2 \cdot 1 \cdot x \cdot x^2 \cdot x = x^{10}$.) Por tanto, buscamos el coeficiente de x^{10} en el polinomio

$$p(x) = (1 + x + x^2 + \cdots + x^{10})^6.$$

Para hallar este término usamos la conocida identidad $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ y el Teorema del Binomio.

$$p(x) = (1 + x + x^2 + \cdots + x^{10})^6 = \left(\frac{1-x^{11}}{1-x}\right)^6 = \frac{1}{(1-x)^6} \sum_{i=0}^{6} \binom{6}{i} (-x^{11})^i.$$

Así el término de x^{10} se forma con el producto de las series formales

$$R(x) = \sum_{i=0}^{6} \binom{6}{i} (-x^{11})^i \quad \text{y} \quad S(x) = \frac{1}{(1-x)^6}.$$

Como la potencia de cada término en la serie $R(x)$ es un múltiplo de 11, sólo el primer término contribuirá al término x^{10} del producto $R(x)S(x)$ y en consecuencia el término requerido es el coeficiente de x^{10} en $S(x)$, es decir,

$$\binom{6+10-1}{10} = \binom{15}{10}.$$

En este punto vale la pena notar que en el planteamiento del problema podemos usar la serie formal $G(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ en lugar del factor polinomial $p(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{10}$ ya que los términos de $G(x)$ con potencia mayor que 10 no contribuyen al coeficiente buscado.

Hasta este momento, todos los ejemplos previos admiten soluciones basadas en técnicas elementales. En el siguiente ejemplo se manifiestan las ventajas del uso de series formales en problemas de conteo.

Ejemplo 8 *Deeds va al mercado con la intención de comprar fruta. En su lista del mercado ha hecho las siguientes anotaciones:*

- *La cantidad de manzanas debe ser múltiplo de* 5.
- *Un número par de plátanos.*
- *No comprar más de* 4 *naranjas.*
- *Llevar a lo más una sandía.*

¿De cuántas maneras puede Deeds hacer la compra si debe llevar a casa 2013 *frutas?*

Solución. Al igual que en el ejemplo anterior, el problema se puede plantear en términos de las soluciones en enteros no negativos de la ecuación

$$n_M + n_P + n_N + n_S = 2013$$

sujeta a las condiciones

$$5 \mid n_M, \quad 2 \mid n_P, \quad n_N \leq 4, \quad n_S \leq 1.$$

Siguiendo la misma lógica que en el ejemplo anterior, a cada variable le asignaremos un polinomio con los términos adecuados de tal forma que la respectiva condición se satisfaga. Después de un breve análisis, notamos que los polinomios en cuestión son

$$\begin{array}{rcl} p_M(x) & = & 1 + x^5 + x^{10} + \cdots + x^{2010} \\ p_P(x) & = & 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2012} \\ p_N(x) & = & 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 \\ p_S(x) & = & 1 + x. \end{array}$$

Luego, debemos hallar el coeficiente de x^{2013} en el producto

$$F(x) = p_M(x)p_P(x)p_N(x)p_S(x).$$

Debido a la observación hecha en el párrafo precedente, podemos sustituir $p_M(x)$ y $p_P(x)$ por series adecuadas

$$\begin{aligned} S_M(x) &= 1 + x^5 + x^{10} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^{5k} = \frac{1}{1-x^5} \\ p_P(x) &= 1 + x^2 + x^4 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} = \frac{1}{1-x^2} \end{aligned}$$

y calcular así el producto deseado

$$\begin{aligned} F(x) &= S_M(x) S_P(x) p_N(x) p_S(x) = \frac{1}{1-x^5} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1-x^5}{1-x} \cdot (1+x) \\ &= \frac{1+x}{(1-x)^2(1-x)} = \frac{1}{(1-x)^2}. \end{aligned}$$

En consecuencia el coeficiente buscado es $\binom{2+2013-1}{2013} = \binom{2014}{2013} = 2014$.

En los últimos ejemplos de esta nota veremos cómo las técnicas descritas hasta ahora pueden aplicarse al caso de las series formales en dos variables. Como primer ejemplo procedemos a encontrar la serie que genera a los coeficientes binomiales. Para un valor fijo de n el polinomio

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

genera a la sucesión de coeficientes binomiales $\binom{n}{k} x^k$. Ahora bien, si dejamos variar n también, entonces necesitaremos de una serie formal en dos variables para generar dichos coeficientes, es decir

$$B(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k y^n.$$

Ejemplo 9 *Una forma cerrada para $B(x,y)$ está dada por*

$$B(x,y) = \frac{1}{1-(1+x)y}.$$

Solución. Como una primera aproximación, convendría considerar la suma de todas las palabras que están presentes en alguna expansión binomial, es decir

$$\hat{S}(x) = p_0(x) + p_1(x) + p_2(x) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x).$$

Notemos que en esta serie formal aparecen todos los términos posibles de la forma x^k; sin embargo, no se puede saber de cuál sumando $p_n(x)$ proviene cada uno de estos términos. Por ejemplo, un sumando x^3 podría representar a la palabra $1 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot 1 \cdot$, en cuyo caso corresponde al polinomio $p_5(x)$, o bien a la palabra $x \cdot x \cdot x$ que proviene del polinomio $p_3(x)$. Para remediar esto, introducimos la variable y para llevar la cuenta del sumando $p_n(x)$ del cual proviene el término x^k. De tal suerte, el término en $x^k y^n$ en $B(x, y)$ representa justamente al término en x^k presente en el polinomio $p_n(x)$. Por tanto, tenemos que

$$\begin{aligned} B(x, y) &= p_0(x) + p_1(x)y + p_2(x)y^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(1 + x)^n y^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}[(1 + x)y]^n = \frac{1}{1 - (1 + x)y}. \end{aligned}$$

Con esta misma técnica se puede resolver el siguiente problema.

Ejemplo 10 *Una* composición *de un entero positivo n es una expresión de la forma $n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ donde a_i es un entero positivo. Por ejemplo* $3 + 1$*,* $1 + 3$*,* $2 + 2$*,* $2 + 1 + 1$*,* $1 + 2 + 1$*,* $1 + 1 + 2$ *y* $1 + 1 + 1 + 1$ *son todas las composiciones de* 4*. Halla el número $c(n, k)$ de todas las composiciones del entero n en k sumandos.*

Solución. Sea

$$C(x, y) = \sum_{n,k} c(n, k)x^n y^k$$

la serie formal asociada a $c(x, y)$. Si fijamos k entonces el problema puede plantearse en términos similares a los del ejemplo 8: cada polinomio

$$p_k^i(x) = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$$

aporta la letra x^{a_i}, $a_i \geq 1$, en la palabra $x^{a_1} x^{a_2} \cdots x^{a_k}$; por lo que el número buscado es el coeficiente de x^n en la expansión de

$$p_k(x) = p_k^1(x)p_k^2(x) \cdots p_k^k(x).$$

Al sustituir $p_k^i(x)$ por la serie formal

$$P_k^i(x) = x + x^2 + x^3 + \cdots = x(1 + x + x^2 + \cdots) = \frac{x}{1 - x}$$

obtenemos la expresión cerrada

$$P_k(x) = P_k^1(x)P_k^2(x) \cdots P_k^k(x) = \left(\frac{x}{1 - x}\right)^k.$$

Finalmente, para indicar que un término en x^n proviene de la serie $P_k(x)$ lo multiplicamos por y^k. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} C(x, y) &= P_0 + P_1(x)y + P_2(x)y^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{1 - x}\right)^k y^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{xy}{1 - x}\right)^k = \frac{1}{1 - xy/(1 - x)}. \end{aligned}$$

Reagrupamos y expandimos para obtener

$$\begin{aligned} C(x,y) &= \frac{1-x}{1-x-xy} = 1 + xy\left(\frac{1}{1-x(1+y)}\right) \\ &= 1 + xy\sum_{i=0}^{\infty} x^i(1+y)^i \\ &= 1 + xy\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\binom{i}{j}x^i y^j. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el término en $x^n y^k$ tiene por coeficiente $c(n,k) = \binom{n-1}{k-1}$.

A manera de conclusión

En esta nota hemos explorado las técnicas más básicas de conteo con polinomios. Los ejemplos que aquí presentamos ilustran que dichas técnicas se pueden aplicar en una gran variedad de contextos. Estas herramientas proveen una alternativa para plantear y resolver problemas de una manera metódica y directa. Esperamos que el lector haya sacado provecho de este material y que aplique lo aprendido en el próximo examen de la Olimpiada de Matemáticas.

Problemas

1. Demuestra la siguiente generalización del Teorema del Binomio:

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^n = \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_k=n} \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \cdots a_k^{n_k},$$

   donde $n_1, n_2, \ldots, n_k$ son enteros no negativos.

2. Demuestra que la función φ de Euler satisface

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_m}\right)$$

   donde $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m}$ es la descomposición de n en primos.

3. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $a + b + c + d = 98$ donde a, b, c, d son impares positivos?

4. Halla la suma de todas las fracciones $\frac{a}{b}$ donde a, b son divisores positivos de 27000 tales que $(a, b) = 1$.

5. Demuestra que $\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \cdots + \binom{n+r}{r} = \binom{n+r+1}{r}$.

6. Encuentra el coeficiente de x^n en la serie formal $S(x)$ que tiene la expresión cerrada

$$S(x) = \frac{1}{(1-x^2)^2}.$$

7. Si $0 \le k \le r$, demuestra que

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i \binom{r}{i}\binom{r}{k-i} = \begin{cases} (-1)^{k/2}\binom{\frac{k}{2}}{r} & \text{si } k \text{ es par,} \\ 0 & \text{si } k \text{ es impar.} \end{cases}$$

8. Un mazo de cartas está hecho de 32 cartas, todas diferentes, donde 2 son comodines y las restantes 30 están marcadas con un número y un símbolo. Los símbolos son 3 (triángulo, círculo y cuadrado) y los números son 10 (2^1, 2^2, $2^3, \ldots 2^{10}$). Los comodines no tienen símbolo y están marcados con el número 1. Para cada subconjunto X se define $S(X)$ como la suma de los números que aparecen en cada una de las cartas que están en X. ¿Cuántos subconjuntos X satisfacen $S(X) = 2013$?

9. Si $0 \le k \le n$, demuestra que

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k}\binom{n-k}{\lfloor (n-k)/2 \rfloor} = \binom{2n+1}{n}.$$

10. Sea $f(n,k)$ el número de subconjuntos del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ que tienen k elementos y no contienen ninguna pareja de números consecutivos. Halla $f(n,k)$.

11. Sea k un entero no negativo fijo. Encuentra una forma cerrada de la serie formal

$$\hat{B}(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} y^n.$$

12. Una partición de un entero positivo n es una manera de expresar n como la suma de enteros positivos. Por ejemplo, $3+1, 2+2, 2+1+1$ y $1+1+1+1$ son todas las particiones de 4. Demuestra que el número de particiones de n en sumandos distintos es igual al número de particiones de n en sumandos impares.

Sugerencias a los problemas

1. Al expandir el lado derecho se obtiene un polinomio, donde cada término es una palabra compuesta por n_1 letras a_1, n_2 letras a_2, etc. ¿Cuántas de estas palabras hay?

2. Un entero es primo relativo con $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m}$ si y sólo si no es divisible por ningún p_i. Usa el Principio de Inclusión-Exclusión para obtener la cantidad de números $1 < k < n$ que son divisibles por algún p_i. Interpreta la suma alternante obtenida como un producto.

3. La serie formal $I(x) = x + x^3 + x^5 + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} x^{2i-1}$ será de gran ayuda. ¿Puedes encontrar una forma cerrada de esta serie?

4. Cada fracción es de la forma $2^x3^y5^z$, con x, y, z enteros entre -3 y 3, inclusive. Cada sumando aparece exactamente una vez en el producto $(2^{-3} + 2^{-2} + \cdots + 2^3)(3^{-3} + 3^{-2} + \cdots + 3^3)(5^{-3} + 5^{-2} + \cdots + 5^3)$.

5. Interpreta $\binom{n}{0}(1)+\binom{n+1}{1}(1)+\cdots+\binom{n+r}{r}(1)$ como el coeficiente de x^r en el producto de dos series formales.

6. Expresa $\frac{1}{(1-x^2)^2}$ en fracciones parciales.

7. Calcula el coeficiente de x^k en el polinomio $p(x) = (1 + x)^r(1 - x)^r$.

8. Considera el polinomio $p(x) = (1 + x)^2(1 + x^2)^3(1 + x^4)^3 \cdots (1 + x^{1024})^3$. Para hallar el coeficiente de x^{2013} sustituye $p(x)$ por una serie formal.

9. Utiliza la Fórmula de Pascal para concluir $\binom{2n+1}{n} = \binom{2n}{n} + \binom{2n}{n-1}$. Después usa el Teorema del Binomio Generalizado (problema 1) aplicado a $p(x) = (1 + x)^{2n} = (1 + 2x + x^2)^n$. Este problema requiere una substancial cantidad de álgebra.

10. Demuestra que $f(n, k) = f(n - 1, k) + f(n - 2, k - 1)$ y considera $F_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n, k)x^k$. Demuestra que $F_k(x) = \dfrac{x^2}{1 - x}F_{k-1}(x)$ y a continuación halla una forma cerrada para $F_k(x)$.

11. Observa que $B(x, y) = \dfrac{1}{1 - (1 + x)y} = \dfrac{1}{1 - y} \cdot \dfrac{1}{1 - \frac{y}{1-y}x}$. Expande el lado derecho de la igualdad como una serie formal en x.

12. Demuestra que en ambos casos, el número buscado corresponde al coeficiente de x^n en el producto de series formales $P(x) = \dfrac{1}{1 - x} \cdot \dfrac{1}{1 - x^2} \cdots \dfrac{1}{1 - x^n}$.

Bibliografía

1. Andreescu, T. y Feng, Z. *102 combinatorial problems.* Birkhäuser, 2003.
2. Engel, A. *Problem solving strategies.* Springer-Verlag, 1998.
3. Grimaldi, R. *Matemática discreta y combinatoria.* Addison-Wesley, 1989.
4. Soberón, P. *Combinatoria para Olimpiadas Internacionales.* UNAM, 2010.
5. Wilf, H. *Generatingfunctionology.* Academic Press, 1994.