Contando con dos dígitos

Por Marco Antonio Figueroa Ibarra

Nivel Intermedio

¿Alguna vez te has preguntado por qué usamos diez dígitos para escribir los números? ¿Se podrán escribir usando más o usando menos de diez dígitos? Si es así, ¿por qué no escribimos los números con menos dígitos? Así nos tendríamos que aprender menos dígitos en la primaria.

Ciertamente se pueden escribir todos los números con cualquier número de dígitos (a partir de dos dígitos). Por ejemplo, el sistema de numeración maya consistía en escribir los números del 0 al 19 (los cuales pueden ser considerados dígitos) y con ellos construían su sistema de base 20 (inspirados en la astronomía, contaban con 18 meses de 20 días y 5 días sobrantes al año). En este artículo nos enfocaremos principalmente en un sistema de numeración muy importante y útil: el sistema binario, en el cual se escriben los números con los dígitos 0 y 1 solamente. Una aplicación muy importante de este sistema numérico es que es usado por todas las computadoras. Es por ello que las memorias USB, las memorias RAM y demás memorias de computadora vienen en potencias de 2. ¿O has visto alguna memoria USB de 3, 5 o 6 gigabytes?

Antes de comenzar, recordemos: ¿en qué consiste el sistema de numeración decimal que siempre utilizamos? El sistema de numeración decimal consiste en un método de númeración posicional tal que cada posición vale 10 veces más que la de su derecha. Es decir, la posición de las unidades vale 1, la posición de las decenas vale 10, la de las centenas vale 100, etc. En cada posición ponemos un dígito del 0 al 9 y con esto podemos representar cualquier número usando sólo 10 dígitos.

Notamos que no usamos nada en particular del número 10. Podemos hacer el mismo planteamiento y numerar todos los números con d dígitos, donde d es cualquier entero mayor que 1. El valor de cada posición (contando de derecha a izquierda) está dado por la siguiente tabla.

Posición	k	$\dots$	4	3	2	1
Valor	d^{k-1}	$\dots$	d^3	d^2	d^1	d^0

Ya que tenemos los valores de las distintas posiciones, necesitamos tener d dígitos diferentes. Si $d \leq 10$, podemos usar los mismos dígitos: 0, 1, 2,$\dots$, $d-1$. Pero si $d > 10$, podemos usar los 10 dígitos que ya conocemos y agregar unos nuevos. Por ejemplo, en base 16 es usual usar los diez dígitos conocidos y las letras A, B, C, D, E y F. En base dos es usual usar el 0 y el 1. Así, un número n está escrito en base dos $n = a_k a_{k-1} a_{k-2} \cdots a_1 a_0$ si

$$n = a_k 2^k + a_{k-1} 2^{k-1} + a_{k-2} 2^{k-2} + \cdots + a_1 2^1 + a_0 2^0.$$

Donde cada a_i es 0 o 1. Por ejemplo, el número 13 queda de la forma

$$13 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0,$$

por lo que su representación en base dos es 1101_2 (a veces se agrega el sufijo dos para distinguir la base: 1101_2). Un buen ejercicio es hacer la lista de los números del 1 al 32 en base dos. Nota que, de la misma manera que en base 10 un número es múltiplo de 10 si y sólo si termina en 0, un número escrito en base 2 será par si y sólo si termina en 0. ¿Cómo se verán los múltiplos de 4 y de 8 en base dos? ¿Cómo se verán los que dejan residuo 2 al ser divididos entre 4? ¡Es muy fácil deducirlo al tener la lista de los primeros números en base dos!

¿Has notado que en algunos aparatos electrónicos como computadoras o celulares, el botón de encendido tiene un dibujo formado por un círculo con un palito dentro de él? Ese símbolo es una aplicación muy sencilla del sistema binario, el cual representa un 1 dentro de un 0. El 0 indica apagado y el 1 indica encendido. Así, dicho botón sirve para cambiar de apagado a encendido y viceversa.

Cómo convertir a base dos

Para comprender bien qué es el sistema binario es necesario saber cómo podemos pasar de un número escrito en binario al mismo número en decimal y viceversa.
Para convertir un número binario a decimal, digamos el $n = 1011001_2$ primero notamos que tiene siete dígitos. Así, las posiciones valen 64, 32, 16, 8, 4, 2 y 1 y el número buscado es

$$1 \cdot 64 + 0 \cdot 32 + 1 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 64 + 16 + 8 + 1 = 89.$$

Por otro lado, para convertir un número escrito en base diez a base dos hay dos maneras muy sencillas de hacerlo. Veámoslo con el mismo ejemplo, $n = 89$. Primero lo dividimos entre 2:

$$89 = 2(44) + 1$$

obteniendo 44 de cociente y 1 de residuo. Como 2(44) es par, su representación binaria termina en 0. Luego, la representación binaria de $89 = 2(44) + 1$ debe terminar en 1. ¡Hemos encontrado el primer dígito de n! Ahora, el número 44, al ser escrito en binario, es el mismo que el 89 en binario pero sin el el dígito de la derecha. Así, podemos volver a dividir entre 2 para encontrar el siguiente dígito.

$$89 = 2(2(22) + 0) + 1 = 2^2(22) + (0)2^1 + (1)2^0$$

Luego, la representación binaria de 89 debe terminar en 01 y tenemos que continuar con el 22. Así, llegamos a

$$\begin{aligned} 89 &= 2(2(22) + 0) + 1 \\ &= 2(2(2(11) + 0) + 0) + 1 \\ &= 2(2(2(2(5) + 1) + 0) + 0) + 1 \\ &= 2(2(2(2(2(2) + 1) + 1) + 0) + 0) + 1 \\ &= 2(2(2(2(2(2(1) + 0) + 1) + 1) + 0) + 0) + 1. \end{aligned}$$

Luego, la representación binaria de 89 es 1011001_2. Para ello sólo usamos algunas divisiones entre 2.

Otra forma de obtener la representación binaria de un número es usando el siguiente resultado: dado que, en la representación en base dos sólo se usan los dígitos 0 y 1; y que cada posición es una potencia distinta de 2, obtenemos que todo número tiene una única representación como suma de potencias distintas de 2. Así, escribiremos al 89 como suma de potencias de 2. La más grande que no se pasa es 64 y la consideraremos (es fácil ver que si no la usamos, no alcanzaremos el número deseado) y tenemos que $89 = 64+25$, luego, la potencia más grande que no se pasa de 25 es 16 y $89 = 64+16+9$. Luego, elegimos la potencia 8 y queda 1, que es potencia de 2. Con esto, obtenemos que

$$\begin{aligned} 89 &= 64 + 16 + 8 + 1 = 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^0 \\ &= 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0. \end{aligned}$$

Luego, la representación de 89 en base dos es 1011001_2.
Notemos que el número 89 tiene 7 dígitos en base dos y sólo 2 dígitos en base 10. Así, la numeración binaria tiene su pro (sólo me tengo que aprender dos dígitos) y su contra (los números resultan grandes). Por otro lado, si uso más de diez digitos, el pro será que los números resultan pequeños y el contra será que me tengo que aprender más dígitos. Podemos pensar que el sistema decimal es algo intermedio entre estos dos extremos.
Al pensar en la representación en base 2 del número 2 me acordé de un chiste: “hay 10 tipos de personas: las que saben contar en binario y las que no”.
Independientemente de la representación en base dos, podemos demostrar que todo número tiene una única representación como suma de potencias de 2. Es parte del siguiente

Teorema. Todo entero positivo n se puede escribir de manera única como suma de potencias distintas de 2.

Demostración. Primero demostremos que todo entero tiene al menos una representación como suma de potencias distintas de 2. Lo haremos con inducción, demostrando que todo número del 1 al $2^n - 1$ se puede escribir como suma de potencias distintas de 2.

La base de inducción es $n = 1$. El 1 se puede escribir como suma de potencias de 2: $1 = 2^0$.

La hipótesis de inducción nos dice que todo número entre 1 al $2^n - 1$ se puede escribir como suma de potencias distintas de 2.

A partir de esto, tenemos que demostrar que todo número entre 2^n y $2^{n+1} - 1$ se puede escribir como suma de potencias distintas de 2. Ya sabemos escribir todos los números entre el 0 y el $2^n - 1$ como suma de potencias distinas de 2 y ninguna de estas potencias es 2^n. Así, si a cada una de estas representaciones le sumamos 2^n obtenemos sumas de potencias distintas de 2 para los números entre 2^n y $2^{n+1} - 1$. Esto concluye la inducción.

Ahora resta demostrar que la representación es única. Esto se deja como ejercicio al lector.

Contando con las manos

¿Cuántos números podemos contar con nuestras dos manos? Para muchos, la respuesta natural es que podemos contar hasta el número 10. Pero en verdad, podemos contar hasta el número 1023, y eso que comenzamos en 0. ¿Cómo se logra esto?

Al contar del 0 al 10 con las manos lo hacemos pensando que cada uno de nuestros diez dedos vale 1. Eso, si bien es sencillo, no resulta muy conveniente. Por ejemplo hay muchas maneras de representar al número 2, pues hay $\binom{10}{2} = 45$ maneras de elegir dos dedos de nuestras manos. Veamos si podemos darle valores que eviten representar a un número de más de una manera.

Comencemos con el primer dedo. Como queremos poder representar el número 1, haremos que ese primer dedo valga 1. Ahora, si hacemos que el segundo dedo también valga 1 ya podemos representar el número dos, levantando los dos primeros dedos. Pero, por otro lado, ya tenemos dos representaciones para el número 1: levantar sólo el primero o levantar sólo el segundo dedo. Así, estamos desperdiciando una representación. ¿Qué tal si hacemos que el segundo dedo valga 2? Así, con sólo dos dedos podemos representar cuatro números: los números del 0 al 3. Ya es ganancia, ¿no?

Continuemos el proceso. Es fácil ver que si el tercer dedo vale 1, 2 o 3 volvemos a tener números con más de una representación. Luego, intentamos darle el valor 4 y resulta que si toma ese valor, podemos representar con sólo tres dedos, 8 números: del 0 al 7. Notamos que el valor de cada dedo resulta una potencia de dos.

Seguimos esta construcción: el siguiente dedo vale $2^3 = 8$, el siguiente $2^4 = 16$ hasta llegar a que el décimo dedo tiene que valer $2^9 = 512$. Con ello, podemos representar cualquier número entre el 0 y el 1023 con nuestros diez dedos.

¡Esta representación coincide con la numeración binaria! Pues estamos usando el hecho de que todos los números tienen una única representación como suma de potencias distintas de 2.

¿Podremos lograr más? ¡Veamos que no! Supongamos que le puedes dar valores a los diez dedos de tal manera que con ellos puedas representar más de 1024 números. ¿Cuántas maneras diferentes hay de elegir los dedos que vas a levantar? Como cada dedo puede estar levantado o no, y hay diez, hay exactamente $2^{10} = 1024$ maneras diferentes de elegir los dedos a levantar. Si logro representar más de 1024 números, por el principio de las casillas, habrá dos números con la misma representación, ¡esto contradice nuestra suposición! Luego, la manera que habíamos elegido es óptima.

Números fraccionaros y divisibilidad

Ya hemos dicho que no tiene nada de especial el haber elegido el número 10 para nuestro sistema de numeración. Así que varios de los resultados que en base 10 tenemos, deben conservarse en base 2. Por ejemplo el siguiente: un número es racional si y sólo si su expansión decimal es finita o infinita periódica. Por ejemplo, el número 1.5 es igual a 1.1 en base 2, el $\frac{8}{3}$ es igual a $10.1010101010\ldots$ y π es igual a

$$11.0010010000\,1111110110\,1010100010\,0010000101\,10100011\ldots$$

Por otro lado, las reglas de divisibilidad entre 2, 5, 9, 10 y 11 que resultan tan útiles por lo sencillas que son, sí usan que la base sea 10. En base dos, algunas reglas de divisibilidad son:

- Un número en base 2 es múltiplo de 2 si y sólo si termina en 0.
- Un número en base 2 es múltiplo de 4 si y sólo si termina en 00.
- Un número en base 2, digamos $a_k a_{k-1} a_{k-2} \cdots a_1 a_0$ es múltiplo de 3 si y sólo si 3 divide a $a_k - a_{k-1} + a_{k-2} - \cdots + (-1)^k a_0$.

Así que la regla de divisibilidad por 3 en base 2 es exactamente la misma que la regla de divisibilidad por 11 en el sistema decimal. De hecho la demostración es exactamente la misma.

Algunos ejercicios resueltos

Hay muchos problemas de olimpiada, tanto de teoría de números como de combinatoria, que pueden resolverse considerando la representación binaria de algún número o alguna idea similar. Presentamos algunos ejemplos resueltos al lector.

Ejemplo 1. Demuestra que entre cualesquiera $n + 1$ enteros del conjunto $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ existen dos números, digamos a y b, tales que a divide a b.

Solución. Escribamos cada uno de los enteros del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ en la forma $k = 2^x y$ con x un entero no negativo e y un entero positivo impar (nota que el número al ser escrito en binario termina en exactamente x ceros).
Como y es un impar menor o igual a k, y tiene que ser un impar entre el 1 y el $2n - 1$. Luego, hay n posibles valores para y. Como tengo que elegir $n+1$ números del conjunto, por el principio de las casillas, habrá dos de ellos con la misma y. Es decir, dos de los números serán $2^x y$ e $2^z y$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x < z$ de donde $2^x y$ divide a $2^z y$.

Ejemplo 2. Si escribimos en base dos todos los números del 1 al 1023, inclusive. ¿Cuántos unos usamos?

Solución. Primero notamos que la representación binaria de 1023 es 1111111111, que es el número más grande que ocupa 10 dígitos en binario. Luego, todos los números del 0 al 1023 se pueden escribir con exactamente 10 dígitos, si permitimos que hayan ceros a la izquierda cuando sean necesarios.
Por otro lado, cualquier combinación de diez dígitos, cada uno de ellos 1 o 0 nos dará la representación binaria de cada número entre 0 y 1023. Hay exactamente 2^{10} de estas combinaciones y se usan $10 \cdot 2^{10}$ dígitos. Por simetría, debe haber la misma cantidad de unos que de ceros (pues están consideradas todas las posibilidades). Luego, se usaron $5 \cdot 2^{10}$ unos.

Ejemplo 3. Sea n un entero positivo y sea 2^m la máxima potencia de 2 que divide a $n!$. Demuestra que el número de unos en la representación binaria de n es $n - m$.

Solución. Recordemos que el exponente de la máxima potencia de 2 que divide a $n!$ es

$$\left\lfloor \frac{n}{2^1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2^3} \right\rfloor + \cdots$$

Si $a_k a_{k-1} a_{k-2} \ldots a_3 a_2 a_1$ es la representación binaria de n notamos que, por la fórmula de arriba, obtenemos que m es (en base dos)

$$m = a_k a_{k-1} a_{k-2} \ldots a_3 a_2 + a_k a_{k-1} a_{k-2} \ldots a_3 + \cdots + a_k a_{k-1} + a_k.$$

Ahora, volviendo a decimal y agrupando las a_i

$$\begin{aligned} m &= a_k(2^{k-2} + 2^{k-3} + \cdots + 2^0) + a_{k-1}(2^{k-3} + 2^{k-4} + \cdots + 2^0) + \cdots + a_2(2^0) \\ &= a_k(2^{k-1}) + a_{k-1}(2^{k-2} - 1) + \cdots + a_2(2^1 - 1) + a_1(2^0 - 1) \\ &= (a_k 2^{k-1} + a_{k-1} 2^{k-2} + \cdots + a_2 2^1 + a_1 2^0) - (a_k + a_{k-1} + \cdots + a_2 + a_1) \\ &= n - m, \end{aligned}$$

ya que la suma de los dígitos en binario es exactamente el número de unos.

Ejemplo 4. Demuestra que es posible elegir 2^k enteros del conjunto $\{0, 1, 2, \ldots, 3^k - 1\}$ tales que no haya tres de ellos en progresión aritmética.

Solución. De la misma manera que en el Ejemplo 2, los números $0, 1, 2, \ldots, 3^k - 1$ son todos los que se pueden escribir con k dígitos en base 3 si permitimos que haya ceros a la izquierda cuando sea necesario. De entre todos ellos, elegiremos los que sólo usan los dígitos 0 y 1. Como tenemos k posiciones, hay exactamente 2^k de estos números. Veamos que no hay tres números en progresión aritmética.
Tres números $a < b < c$ están en progresión aritmética si $c - b = b - a$, o equivalentemente, si $a + c = 2b$. Veamos que esto no sucede entre los números que elegimos.
Supongamos que hay tres números de entre los que elegimos, $a < b < c$ tales que $a + c = 2b$. Denotemos los tres números en binario

$$\begin{aligned} a &= a_k a_{k-1} \ldots a_2 a_1, \\ b &= b_k b_{k-1} \ldots b_2 b_1, \\ c &= c_k c_{k-1} \ldots c_2 c_1. \end{aligned}$$

Como todos los dígitos a_i, b_i son ceros o unos, al hacer la suma $a + b$ en base tres, en cada posición la suma de los dos dígitos no se pasa de 2 y la suma en base tres tendrá exactamente los dígitos $a_k + b_k, a_{k-1} + b_{k-1}, \ldots, a_2 + b_2$ y $a_1 + b_1$. Por otro lado, los dígitos de $2c$ son exactamente $2c_k, 2c_{k-1}, \ldots, 2c_2$ y $2c_1$, pues cada $2c_i$ es 0 o 2. Luego, para cada i se tiene que $a_i + b_i = 2c_i$. Como a_i, b_i y c_i sólo pueden ser ceros o unos, la única manera que esto suceda es que $a_i = b_i = c_i$. Luego, $a = b = c$, lo cual es una contradicción y concluimos que no hay tres enteros en progresión aritmética entre los 2^k números elegidos.

Ejemplo 5 (IMO 2011). Sea $n > 0$ un entero. Se tiene una balanza y n pesas con pesos $2^0, 2^1, 2^2, \ldots, 2^{n-1}$. Se van a poner cada una de las pesas sucesivamente en uno de los dos platillos de tal manera que el de la derecha siempre pese más. ¿De cuántas maneras se puede hacer esto?

Solución. Sea A_n el número que buscamos. Digamos que en algún momento ya pusimos la pesa que pesa 2^0 y al menos una más. En ese momento, si ignoramos esa pesa la diferencia entre los pesos de los platillos debe ser par positivo. Así, es irrelevante dónde esté la pesa que pesa 2^0, pues si el platillo de la derecha pesa más sin considerar la pesa que pesa 2^0, seguirá pesando más si la ponemos en la derecha o en la izquierda. Ahora, si ignoramos la pesa que pesa 2^0 obtenemos exactamente un acomodo válido para $n - 1$ pesas (simplemente consideramos que cada pesa pese la mitad de lo que pesa). Sabemos que eso se puede hacer de A_{n-1} maneras. Ahora, la pesa que pesa 2^0 puede ser puesta en cualquier momento, salvo que cuando se pone la primera pesa, no podemos poner esta pesa en el platillo de la izquierda. Así, hay $2n - 1$ posibilidades para poner esa pesa (1 poniéndola la primera vez y 2 en cada una de los siguientes turnos).
Luego, $A_n = (2n - 1)A_{n-1}$. Como $A_1 = 1$ y $A_2 = 3$, una sencilla inducción muestra que A_n es el producto de todos los impares desde 1 hasta $2n - 1$.

A continuación dejamos unos ejercicios para el lector.

Ejercicios

1. Escribe cada número del 1 al 32 en binario. ¿Cómo sabemos si un número en binario es múltiplo de 4 u 8? ¿Cómo son los que dejan residuo 2 al ser divididos entre 4?

2. Sean $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ y $b_1 < b_2 < \cdots < b_l$ enteros no negativos tales que

$$2^{a_0} + 2^{a_2} + \cdots + 2^{a_k} = 2^{b_0} + 2^{b_2} + \cdots + 2^{b_l}.$$

   Demuestra que $k = l$ y que $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots, a_k = b_k$.

3. Determina una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que $f(1) = 1$ y

$$f(n) = \begin{cases} 1 + f\left(\frac{n-1}{2}\right) & \text{si } n \text{ es impar,} \\ 1 + f\left(\frac{n}{2}\right) & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

4. Encuentra los últimos ocho dígitos de la representación binaria de 27^{1986}.

5. Demuestra que para cualquier entero positivo n se cumple que
$$\left\lfloor \frac{n+2^0}{2^1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+2^1}{2^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+2^2}{2^3} \right\rfloor + \cdots = n.$$

6. Martín tiene la lista de todos los números de 25 dígitos que se pueden formar utilizando sólo los dígitos $1, 2, 3$ y 4 y que tienen la misma cantidad de dígitos 1 que de dígitos 2. Jorge tiene la lista de todos los números de 50 dígitos formados por 25 dígitos 1 y 25 dígitos 2. Demuestra que la lista de Martín tiene la misma cantidad de números que la de Jorge.

7. Demuestra que cada entero positivo se puede escribir como
$$a_0 \cdot 3^0 + a_1 \cdot 3^1 + a_2 \cdot 3^2 + \cdots + a_k \cdot 3^k$$
para cierto entero positivo k, donde cada a_i vale -1, 0 o 1.

8. Hay 2^n soldados formados en fila, donde n es un entero positivo. Los soldados se reacomodan en otra fila de la siguiente manera: Los soldados que estén en posición impar se van al frente de la fila, conservando su lugar entre ellos; los soldados en posición par se van al final de la fila, respetando los lugares entre ellos. Por ejemplo, si hay ocho soldados formados a, b, c, d, e, f, g, h, después del reacomodo obtenemos la fila a, c, e, g, b, d, f, h. Demuestra que después de n reacomodos los soldados estarán formados como al inicio.

9. Demuestra que existe un entero n tal que es múltiplo de 2004 y al ser escrito en base dos tiene exactamente 2004 ceros y 2004 unos.

10. (OMM, 2011) Una cuadrícula con lados de longitudes $(2^n - 1)$ y $(2^n + 1)$ se quiere dividir en rectángulos ajenos con lados sobre líneas de la cuadrícula y con un número de cuadraditos de 1×1 dentro del rectángulo igual a una potencia de 2. Encuentra la menor cantidad de rectángulos en los que se puede dividir la cuadrícula. (*Nota: El* 1 *es considerado una potencia de* 2 *pues* $2^0 = 1$.)

11. Demuestra que hay una infinidad de potencias de 2 de la forma $\lfloor n\sqrt{2} \rfloor$.

12. Sea n un entero positivo. Determina la cantidad de números que escritos en base 2 tienen exactamente $2n$ dígitos y son tales que la suma de los dígitos en las posiciones pares es igual a la suma de los dígitos de las posiciones impares.

13. La sucesión de Fibonacci se define por $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ y $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$ para todo $n \geq 0$. Demuestra que todo entero n se puede escribir como suma de números diferentes de Fibonacci tales que no hay dos de ellos consecutivos.

14. Comenzamos con el estado inicial (a, b) donde a y b son enteros positivos. A partir de este estado incial se aplica el siguiente algoritmo siempre que $a > 0$.

    - Si $b > a$ cambiamos (a, b) por $(2a, b - a)$.

- En otro caso, cambiamos (a, b) por $(a - b, 2b)$.

¿Para qué estados iniciales el algoritmo termina? Si termina, ¿en cuántos pasos termina? ¿Qué sucede si a y b no son enteros?

15. Supón que f es una función definida en el conjunto de los enteros positivos tal que $f(2k) = 2f(k)-1$ y $f(2k+1) = 2f(k)+1$. Si a es un entero positivo arbitrario cuya representación en base dos está dada por $a = a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0$, demuestra que
$$f(a) = b_n \cdot 2^n + b_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \cdots + b_1 \cdot 2 + b_0,$$
donde
$$b_i = \begin{cases} 1 & \text{si } a_i = 1, \\ -1 & \text{si } a_i = 0. \end{cases}$$

16. Sea f una función que a cada entero entre 0 y 2013 le asigna un número entero no negativo tal que
$$\begin{aligned} f(3m) &= f(m), \\ f(3m+1) &= f(3m) + 1, \\ f(3m+2) &= f(3m). \end{aligned}$$
Si $f(0) = 0$, determina el valor máximo que puede tomar f.

Bibliografía

1. Arthur Engel. *Problem Solving Strategies.* Springer-Verlag, 1998.
2. Titu Andreescu, Răzvan Gelca. *Mathematical Olympiad Challenges.* Birkhäuser, 2000.
3. Titu Andreescu, Dorin Andrica, Zuming Feng. 104 *Number Theory Problems: From the Training of the USA IMO Team.* Birkhäuser, 2007.