Una desigualdad básica

Por Marco Antonio Figueroa Ibarra

Nivel Intermedio

Una de las desigualdades más importantes en la solución de problemas tipo olimpiada es la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica (MA-MG). Si tenemos dos números positivos a y b, su media aritmética es $\frac{a+b}{2}$. La media aritmética es simplemente el promedio que estamos acostumbrados a utilizar. Por ejemplo, si sacamos de calificaciones 10 y 9, el promedio de las dos calificaciones (o su media aritmética) es $\frac{10+9}{2} = 9.5$. Siempre que los dos números sean iguales, también serán iguales a su media aritmética, pues $\frac{a+a}{2} = a$.

Por otro lado, la media geométrica es otro tipo de promedio, pero que tiene que ver con la multiplicación en vez de con la suma. Dados los números positivos a y b, su media geométrica es $\sqrt{a \cdot b}$. De nuevo, si los dos números son iguales, también su media geométrica es igual a cada uno de ellos, pues $\sqrt{a \cdot a} = a$.

Desigualdad MA-MG para dos números

Para cualesquiera dos números positivos a y b, la media geométrica siempre es menor o igual que la media aritmética. Es decir,

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

Además, la igualdad se verifica si y sólo si $a = b$.

Demostración 1. Factorizando obtenemos,

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{1}{2}(a + b - 2\sqrt{ab}) = \frac{1}{2}(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0,$$

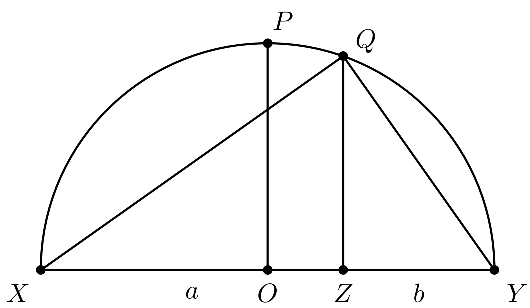
luego, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Ahora, para que la igualdad se dé, necesitamos que $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 0$, y esto sólo sucede si $a = b$.

Demostración 2. Notamos que $a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}$ y $b = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}$. Luego,

$$\begin{aligned} \sqrt{ab} = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right)} &= \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} \\ &\leq \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2} = \frac{a+b}{2}, \end{aligned}$$

nuevamente, para que la igualdad se dé, necesitamos que $\frac{a-b}{2} = 0$, es decir, $a = b$.

Demostración 3. Tomemos una semicircunferencia con diámetro $XY = a + b$ y un punto Z en el segmento XY tal que $XZ = a$ y $YZ = b$. Sea O el punto medio de XY y sean P y Q puntos sobre la semicircunferencia tales que OP y ZQ son perpendiculares a XY.



Como O es el centro, OP es un radio. Luego, $OP = \frac{a+b}{2}$. Por otro lado, es fácil ver que los triángulos XQZ y QYZ son semejantes (por el criterio AAA). Luego,

$$\frac{XZ}{QZ} = \frac{QZ}{YZ},$$

de donde $QZ = \sqrt{a\,b}$. Pero este segmento siempre será menor o igual que el radio OP, por lo que $\sqrt{a\,b} \leq \frac{a+b}{2}$. Para que la igualdad se dé, es necesario que los puntos O y Z coincidan, o sea, $a = b$.

De las dos primeras demostraciones podemos notar que la desigualdad entre la Media Aritmética y la Media Geométrica para dos números (para más números también) depende simplemente del hecho $x^2 \geq 0$. Esta última puede bien ser considerada como la base de las desigualdades. Este simple hecho puede demostrar desigualdades muy complicadas. Cuando así pasa, se dice que se usó el método SOS (*sum of squares*).

Ejemplo 1. De entre todos los rectángulos con perímetro fijo, ¿cuál tiene más área?

Solución. Veamos que el cuadrado es el que tiene más área. Digamos que el perímetro es la constante p y que las dimensiones del cuadrado son $a \times b$. Como el perímetro es p se tiene que $2a + 2b = p$ o $a + b = \frac{p}{2}$. Como el área del rectángulo es $a \cdot b$, tenemos que,

$$a \cdot b \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{4}\right)^2.$$

Como $(\frac{p}{4})^2$ no depende de a y b, hemos terminado. Y justamente la igualdad se obtiene cuando $a = b$, es decir, cuando el rectángulo es un cuadrado.
Podemos pensar en el mismo problema sin la restricción de ser un rectángulo. De entre todas las figuras con perímetro fijo, ¿cuál es la que encierra más área? ¡El círculo! Lo malo es que es difícil demostrarlo.

Ejemplo 2. Demuestra que para reales positivos x, y, z se tiene que,

$$(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz.$$

Solución. En este problema, aprovecharemos que el lado izquierdo de la desigualdad está factorizado y cada factor es una suma. Dividimos todo entre 8 y vemos que la desigualdad original es equivalente a:

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)\left(\frac{y+z}{2}\right)\left(\frac{z+x}{2}\right) \geq xyz.$$

Ahora, cada factor del lado izquierdo es la media aritmética de dos números. Aplicamos la desigualdad en cada factor (todos los números involucrados son positivos),

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)\left(\frac{y+z}{2}\right)\left(\frac{z+x}{2}\right) \geq \sqrt{xy}\,\sqrt{yz}\,\sqrt{zx} = xyz.$$

Lo cual demuestra la desigualdad. Podemos notar que para que se dé la igualdad tiene que suceder que $x = y$, $y = z$ y $z = x$ al mismo tiempo, es decir, los tres números tienen que ser iguales.

Ejemplo 3. Encuentra el menor valor de la expresión $x^2 + \frac{1}{x}$, para $x > 0$. ¿Para qué valor de x se obtiene este valor?

Solución. Este puede pensarse como un ejercicio de cálculo diferencial, pero veremos cómo hacerlo con la desigualdad MA-MG. Si usamos directamente la desigualdad,

$$\frac{x^2 + \frac{1}{x}}{2} \geq \sqrt{x^2 \cdot \frac{1}{x}} = \sqrt{x}.$$

Hemos probado que $x^2 + \frac{1}{x}$ es mayor o igual que $2\sqrt{x}$, pero esta última expresión sigue dependiendo de x, por lo que no hemos encontrado el menor valor. Hay que pensar cómo escribir la expresión como la suma de varios números tales que su producto sea constante. No resulta muy difícil, simplemente hay que cambiar $\frac{1}{x}$ por $\frac{1}{2x} + \frac{1}{2x}$:

$$x^2 + \frac{1}{x} = 3\left(\frac{x^2 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x}}{3}\right) \geq 3\sqrt{x^2\left(\frac{1}{2x}\right)^2} = 3\sqrt[3]{\frac{1}{4}}.$$

Como $3\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ no depende de x, ya casi terminamos. Para que la igualdad se dé, necesitamos que $x^2 = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2x}$, o sea, $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.
Otra manera de pensar la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica es: dados dos números positivos, cuyo producto es constante, su suma será mínima cuando los números son iguales.

Ejemplo 4. Sean a, b y c números reales positivos. Demuestra que,

$$(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) \leq abc.$$

Solución. En el lado izquierdo tenemos un producto de tres números. Si sólo uno de ellos es negativo, el producto de los tres será también negativo y la desigualdad resultará cierta, pues el lado derecho es positivo.
Si al menos dos de los factores son negativos, sin perdida de generalidad los dos primeros, tenemos que,

$$\begin{aligned} a+b-c &< 0, \\ a-b+c &< 0. \end{aligned}$$

Sumando estas dos desigualdades se tiene que $2a < 0$, lo cual es una contradicción y por tanto no puede haber más de un factor negativo. Resta ver el caso cuando los tres son positivos.
Apliquemos la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica para los dos primeros factores,

$$\sqrt{(a+b-c)(a-b+c)} \leq \frac{(a+b-c)+(a-b+c)}{2} = a,$$

De la misma manera, obtenemos,

$$\begin{aligned} \sqrt{(a-b+c)(-a+b+c)} &\leq b, \\ \sqrt{(-a+b+c)(a+b-c)} &\leq c. \end{aligned}$$

Y como cada lado de cada una de las tres desigualdades es positivo, podemos multiplicar las tres y obtenemos que $(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) \leq abc$, que era lo que se quería demostrar.

Desigualdad MA-MG para más de dos números

Para cualesquiera números positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, la media geométrica siempre es menor o igual que la media aritmética. Es decir,

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_2 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Además, la igualdad se verifica si y sólo si $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Hay muchas maneras de demostrar la desigualdad MA-MG. Veamos una demostración de uno de los matemáticos más influyentes del siglo XIX, Agustin-Louis Cauchy. Esta prueba es por inducción sobre n, pero no de la manera usual. La idea es la siguiente:

1. Probar que la desigualdad es cierta para $n = 2$.

2. Probar que si la desigualdad es cierta para $n = k$, también es cierta para $n = 2k$. Esto, con el punto anterior, demuestra que la desigualdad es cierta para toda n igual a una potencia de 2.

3. Probar que si la desigualdad es cierta para $n = k + 1$, también lo es para $n = k$.

Con esto quedaría demostrada la desigualdad MA-MG para toda n, pues ya tendríamos que es cierta para una potencia $2^x \geq n$ y por el punto 3, sería cierta para los números $2^x - 1, 2^x - 2, \ldots, n$. Veamos la demostración.

1. Este punto ya fue demostrado.

2. Supongamos que la desigualdad es cierta para $n = k$, veamos que es cierta para $n = 2k$.

   Sean $a_1, a_2, \ldots, a_{2k}$ reales positivos. Queremos demostrar la desigualdad MA-MG para ellos. Como estamos suponiendo que la desigualdad es cierta para $n = k$, tenemos que

$$\begin{aligned} A = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k} &\geq \sqrt[k]{a_1 a_2 \cdots a_k}, \\ B = \frac{a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{2k}}{k} &\geq \sqrt[k]{a_{k+1} a_{k+2} \cdots a_{2k}}. \end{aligned}$$

   Por otro lado, por el punto 1 tenemos que la desigualdad MA-MG es cierta para $n = 2$. Como A y B son positivos, tenemos que $\frac{A+B}{2} \geq \sqrt{AB}$. Luego,

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2k}}{2k} &= \frac{A + B}{2} \geq \sqrt{AB} \\ &\geq \sqrt{\sqrt[k]{a_1 a_2 \cdots a_k}\,\sqrt[k]{a_{k+1} a_{k+2} \cdots a_{2k}}} \\ &= \sqrt[2k]{a_1 a_2 \cdots a_{2k}}. \end{aligned}$$

   Lo cual demuestra la desigualdad MA-MG para $n = 2k$. Ahora, para que la igualdad se dé, es necesario que se den simultáneamente $a_1 = a_2 = \cdots = a_k$, $a_{k+1} = a_{k+2} = \cdots = a_{2k}$ y $A = B$. Si $a_1 = a_2 = \cdots = a_k$, se tiene que $A = a_1 = a_2 = \cdots = a_k$ y si $a_{k+1} = a_{k+2} = \cdots = a_{2k}$ se tiene que $B = a_{k+1} = a_{k+2} = \cdots = a_{2k}$. Luego, es necesario que todos los números sean iguales.

3. Suponiendo que la desigualdad Ma-MG es cierta para $n = k + 1$, hay que demostrar que es cierta para $n = k$. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_k$ números reales positivos. Demostremos la desigualdad MA-MG para estos valores.

Sea m la media aritmética de $a_1, a_2, \ldots, a_k$ y sea $a_{k+1} = m$. Como todas los a_i son positivos, a_{k+1} también es positivo. Luego, podemos aplicar la desigualdad MA-MG para estos $k+1$ valores,

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1}}{k+1} \geq \sqrt[k+1]{a_1 a_2 \cdots a_k a_{k+1}}.$$

El lado izquierdo de la desigualdad es,

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1}}{k+1} = \frac{km + m}{k+1} = m.$$

Luego,

$$\begin{aligned} m &\geq \sqrt[k+1]{a_1 a_2 \cdots a_k a_{k+1}} \\ m^{k+1} &\geq a_1 a_2 \cdots a_k m \\ m^k &\geq a_1 a_2 \cdots a_k \\ m &\geq \sqrt[k]{a_1 a_2 \cdots a_k}. \end{aligned}$$

Lo cual es justo la desigualdad para $n = k$. Además, para que se dé la igualdad, es necesario que $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = a_{k+1}$ y esto es cierto cuando $a_1 = a_2 = \cdots = a_k$.

Por lo tanto, queda demostrada la desigualdad MA-MG para n valores.

Ejemplo 5. Demuestra que para números reales positivos a, b, c y d se tiene que

$$(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right) \geq 16.$$

¿Cuándo se da la igualdad?

Solución. En este caso, dividimos entre 16 y vemos que la desigualdad es equivalente a,

$$\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)\left(\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}}{4}\right) \geq 1.$$

Notamos que cada factor del lado izquierdo es una media aritmética de números positivos, así que usamos dos veces la desigualdad MA-MG.

$$\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)\left(\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}}{4}\right) \geq \sqrt{abcd}\sqrt{\frac{1}{abcd}} = 1.$$

Para que la igualdad se dé, necesitamos que $a = b = c = d$ y que $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{c} = \frac{1}{d}$, es decir, los cuatro números tienen que ser iguales.

Esta desigualdad se puede generalizar para n números como sigue: Si se tienen reales positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, se tiene que

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2.$$

Y la demostración es igual a la anterior. Usualmente esta desigualdad está en la forma:

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$$

y es llamada la desigualdad entre la media aritmética y la media armónica. De hecho, se puede probar algo más fuerte:

Ejemplo 6. Demuestra que para números reales positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ se tiene que,

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}.$$

Solución. Reacomodando obtenemos que la desigualdad es equivalente a,

$$\frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdots \frac{1}{a_n}},$$

lo cual es justamente la desigualdad MA-MG para los números positivos $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}$, por lo que la igualdad se da cuando todos los números son iguales. Podemos incluir esta desigualdad a la desigualdad MA-MG y obtener la:

Desigualdad entre la media aritmética, la media geométrica y la media armónica. Dados números reales positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ se tiene que

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}.$$

Con una doble igualdad cuando los números son iguales.

Ejemplo 7. Desigualdad de Nesbitt. Dados tres números reales positivos a, b y c se tiene que,

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Solución. Sumando 1 a cada sumando del lado izquierdo, se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} &= \frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{a+c} + \frac{a+b+c}{a+b} - 3 \\
&= (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b}\right) - 3 \\
&= \frac{1}{2}((b+c) + (a+c) + (a+b))\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b}\right) - 3 \\
&\geq \frac{1}{2}(9) - 3 = \frac{3}{2},
\end{aligned}$$

donde hemos usado la desigualdad entre la media armónica y la media aritmética.

El siguiente problema es un ejemplo donde se pide demostrar una desigualdad, pero no se puede alcanzar la igualdad. Dicho problema apareció en la Olimpiada Internacional de Matemáticas de 2012.

Ejemplo 8. Sea $n \geq 3$ un entero y sean a_2, a_3,..., a_n números reales positivos tales que $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$. Demuestra que

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3\cdots(1+a_n)^n > n^n.$$

Solución. Para cada $i = 2$, 3,..., n, usamos la desigualdad MA-MG con $i-1$ números iguales a $\frac{1}{i-1}$ y el i-ésimo igual a a_i,

$$\frac{1+a_i}{i} = \frac{\frac{1}{i-1}+\frac{1}{i-1}+\cdots+\frac{1}{i-1}+a_i}{i} \geq \sqrt[i]{\frac{a_i}{(i-1)^{i-1}}},$$

de donde,

$$(1+a_i)^i \geq a_i\,\frac{i^i}{(i-1)^{i-1}},$$

y para que la igualdad en ésta se alcance, es necesario que $a_i = \frac{1}{i-1}$.

Multiplicando todas estas desigualdades, para $i = 2, 3, \ldots, n$, se tiene que,

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3\cdots(1+a_n)^n \geq (a_2a_3\cdots a_n)n^n = n^n.$$

Ahora, hemos obtenido la desigualdad que se pide, pero hay que demostrar que no se puede alcanzar la igualdad, pues en el problema la desigualdad es estricta (es decir, hay que probar que es mayor, no mayor o igual). Ya vimos que para que se cumpla la i-ésima igualdad tiene que pasar que $a_i = \frac{1}{i-1}$. En particular, es necesario que $a_2 = 1$ y $a_3 < 1$ para toda $i \geq 3$. Como $n \geq 3$, si se dieran todas las igualdades, se tendría que $a_2a_3\cdots a_n < 1$, lo cual es una contradicción. Luego, la igualdad no puede darse y la desigualdad es estricta.

Por último, veremos que la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica vale también cuando algunos de los números son 0. Es decir, que la desigualdad vale cuando los números son no-negativos.
Esto es cierto, ya que si se tiene que $a_i = 0$ para cierto i (usando la notación de la desigualdad), se tiene que la media geométrica es igual a 0. Como la media aritmética sería no-negativa, se tiene la desigualdad,

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} = 0.$$

Para que la igualdad se dé, la media aritmética tendría que ser igual a 0 y esto sólo se logra cuando todos son 0, así que también podemos decir que la igualdad se da cuando todos los números son iguales.

Usaremos este hecho en el siguiente problema, que apareció en el Concurso Nacional de la 25^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas.

Ejemplo 9. Sea $n \geq 3$ un entero positivo. Encuentra todas las soluciones de números reales $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ que satisfacen el siguiente sistema de n ecuaciones,

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_1 - 1 &= a_2, \\ a_2^2 + a_2 - 1 &= a_3, \\ &\vdots \\ a_{n-1}^2 + a_{n-1} - 1 &= a_n, \\ a_n^2 + a_n - 1 &= a_1. \end{aligned}$$

Solución. Es claro que si $a_j = 1$ para alguna j, entonces $a_i = 1$ para toda i; y si $a_j = -1$ para alguna j, entonces $a_i = -1$ para toda i. Además, $(1, 1, \ldots, 1)$ y $(-1, -1, \ldots, -1)$ son soluciones.
Sumando las n ecuaciones obtenemos que,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} a_i - n = \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

de donde $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = n$.
Por otro lado, podemos reescribir las ecuaciones de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_1 &= a_2 + 1, \\ a_2^2 + a_2 &= a_3 + 1, \\ &\vdots \\ a_{n-1}^2 + a_{n-1} &= a_n + 1, \\ a_n^2 + a_n &= a_1 + 1. \end{aligned}$$

Multiplicando todas las ecuaciones, obtenemos

$$a_1(a_1+1)a_2(a_2+1)\cdots a_n(a_n+1) = (a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_n+1),$$

de donde $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$ si $a_i \neq -1$ para todo $1 \leq i \leq n$.
De las dos ecuaciones $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = n$ y $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$, obtenemos, usando la desigualdad MA-MG con los números no negativos $a_1^2, a_2^2, \ldots, a_n^2$, que

$$1 = \frac{n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geq \sqrt[n]{a_1^2 a_2^2 \cdots a_n^2} = 1,$$

de donde se sigue que $a_1^2 = a_2^2 = \cdots = a_n^2 = 1$.
Por lo tanto, concluimos que sólo hay dos soluciones: $(1, 1, \ldots, 1)$ y $(-1, -1, \ldots, -1)$.

Ejercicios

1. Demuestra que para x, y reales, $x^4 + y^4 + 8 \geq 8xy$.

2. ¿Cuál es el máximo valor de la expresión $x(1 - x^3)$ para $0 \leq x \leq 1$?

3. Sean a, b y c reales positivos. Demuestra que,
$$\frac{2ab}{a+b} + \frac{2bc}{b+c} + \frac{2ca}{c+a} \leq a + b + c.$$

4. Si a, b, c son reales positivos demuestra que $a(1-b) > \frac{1}{4}$, $b(1-c) > \frac{1}{4}$ y $c(1-a) > \frac{1}{4}$ no se pueden dar simultáneamente.

5. Si a, b, c son reales positivos tales que $(a+1)(b+1)(c+1) = 8$, demuestra que $abc \leq 1$.

6. Las diagonales del cuadrilátero convexo $ABCD$ se intersectan en O de tal manera que las áreas de los triángulos AOB y COD son 4 y 9, respectivamente. ¿Cuál es el mínimo valor del área del cuadrilátero?

7. Sean a, b, c reales positivos tales que $a + b + c = 1$, demuestra que,
$$\left(\frac{1}{a} + 1\right)\left(\frac{1}{b} + 1\right)\left(\frac{1}{c} + 1\right) \geq 64.$$

8. Si a, b y c son números reales positivos tales que $abc = 1$, demuestra que,

   (a) $\dfrac{1+ab}{1+a} + \dfrac{1+bc}{1+b} + \dfrac{1+ca}{1+c} \geq 3.$

   (b) $\dfrac{a^3}{a^3+2} + \dfrac{b^3}{b^3+2} + \dfrac{c^3}{c^3+2} \geq 1.$

   (c) $\left(a - 1 + \dfrac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \dfrac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \dfrac{1}{a}\right) \leq 1.$

Bibliografía

1. R. Bulajich Manfrino, J.A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Inequalities. A Mathematical Olympiad Approach.* Birkhäuser, 2009.

2. A. Engel. *Problem Solving Strategies.* Springer-Verlag, 1998.