Un poco de bisectrices

Por Luis Eduardo García Hernández

Nivel Intermedio

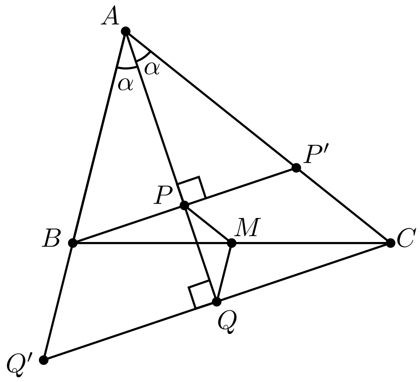
En el estudio de la geometría, como en cualquier rama de las matemáticas, siempre está presente el deseo por descubrir elementos y construcciones que cuenten con propiedades invariantes, con las cuales se logre describir la naturaleza detrás de las estructuras que involucran a estos elementos geométricos; por así decirlo que estén dotados de una *belleza intrínseca*. Este es el caso de las bisectrices en la geometría básica. Estas rectas notables tienen propiedades de gran elegancia, lo cual las convierte en uno de los elementos más recurrentes en los diversos problemas geométricos de la olimpiada. Comencemos recordando un *poco de bisectrices*.

Dado un triángulo ABC, la recta que pasa por A y divide en dos ángulos iguales al ángulo $\angle BAC$ es conocida como la bisectriz del ángulo en el vértice A. Por otro lado, si D y E son puntos sobre AB y AC, respectivamente, tales que A se encuentra entre los puntos D y B sobre AB y entre E y C sobre AC, a los ángulos $\angle CAD$ y $\angle EAB$ se les conoce como ángulos externos asociados al vértice A. De la misma manera los vértices B y C tienen su par respectivo de ángulos externos.

A las rectas que bisecan un ángulo interno se les conoce como bisectrices internas y a las que bisecan un ángulo externo se les conoce como bisectrices externas. Cabe notar que si tomamos la bisectriz del ángulo $\angle CAD$, esta recta coincidirá con la bisectriz del ángulo $\angle EAB$ por ser $\angle CAD$ y $\angle EAB$ ángulos opuestos por el vértice, entonces no hay problemas con la noción de bisectriz externa. El lector podrá verificar fácilmente que la bisectriz interna y externa de un ángulo interno y externo con vértice común, son perpendiculares. Procedamos ahora a resolver un ejemplo sencillo ya que hemos recordado las definiciones básicas.

Ejemplo 1. *Sea ABC un triángulo con $AB < AC$ y l la bisectriz interna del ángulo en A. Sean P y Q los pies de las perpendiculares desde B y C a l, respectivamente. Si M es el punto medio de BC, demuestra que el triángulo PMQ es isósceles.*

Solución. Sea $\angle BAC = 2\alpha$ y sean P' y Q' los puntos de intersección de BP con AC y de CQ con AB, respectivamente.

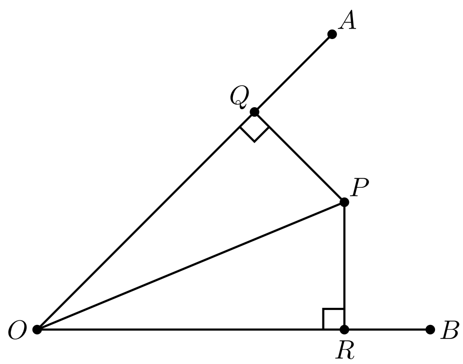


Por ser l tanto bisectriz, como altura en los triángulos ABP' y $AQ'C$, tenemos que estos triángulos son isósceles, por lo tanto P es el punto medio de BP' y Q el punto medio de CQ'. Entonces por el teorema de Thales MP es paralela a AC, luego por ángulos correspondientes se tiene que $\angle QPM = \angle QAC = \alpha$; de manera similar MQ es paralela a AB, entonces por ángulos alternos internos $\angle MQP = \angle BAQ = \alpha$. Por lo tanto el triángulo MPQ es isósceles.

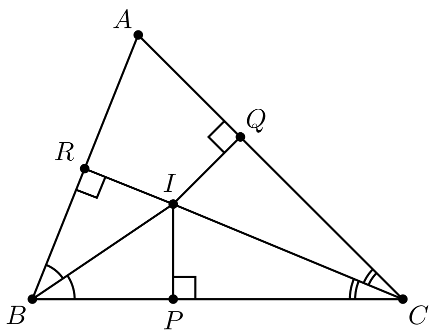
Claramente este ejercicio no requirió un gran conocimiento sobre bisectrices, sin embargo este no será el caso en los siguientes ejemplos, por ello estudiemos un par de cualidades importantes (y algunas aplicaciones) de estas increíbles rectas antes de continuar.

Proposición 1. (a) *Sea P un punto dentro del ángulo $\angle AOB$. Sean Q y R las proyecciones desde P a las rectas que contienen a OA y OB, respectivamente, entonces P está sobre la bisectriz de $\angle AOB$ si y sólo si $PQ = PR$.*
(b) *Las bisectrices internas de un triángulo ABC concurren en un punto que es a su vez, centro de la circunferencia inscrita al triángulo ABC.*

Demostración. (a) Sea P un punto sobre la bisectriz del $\angle AOB$.

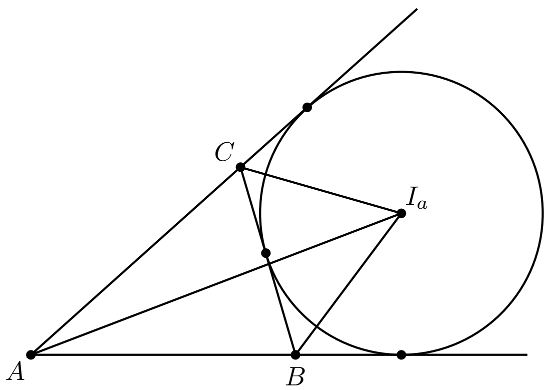


Como $\angle POQ = \angle POR$ y $\angle PQO = \angle PRO = 90°$, los triángulos OPR y OPQ son semejantes por el criterio AAA. Pero además tienen la misma hipotenusa, por lo que son congruentes y $PR = PQ$.
Recíprocamente, si $PQ = PR$, por el Teorema de Pitágoras tenemos que $OQ = \sqrt{OP^2 - PQ^2} = \sqrt{OP^2 - PR^2} = OR$, y así los triángulos OPQ y OPR son congruentes por el criterio LLL. En particular $\angle POQ = \angle POR$. Luego, P está sobre la bisectriz del ángulo $\angle AOB$.
(b) Sea I el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos $\angle CBA$ y $\angle ACB$. Sean P, Q y R las proyecciones desde I sobre BC, CA y AB, respectivamente.



Por estar I en la bisectriz del ángulo $\angle CBA$ tenemos que $IR = IP$, y por estar sobre la bisectriz del ángulo $\angle ACB$ tenemos que $IP = IQ$. Por lo tanto, $IQ = IR$, lo cual nos dice que I está sobre la bisectriz del ángulo $\angle BAC$ y las bisectrices internas concurren. Además, la circunferencia con centro I y radio IP es tangente a los lados del triángulo ABC y está contenida en él. A este punto I se le conoce como *incentro* y a esta circunferencia se le llama *incírculo* o *circunferencia inscrita*.

Como la demostración del inciso (b) sólo usó el hecho de que I se encuentra sobre la bisectriz de dos ángulos internos, de la misma manera podemos demostrar que dos bisectrices externas de dos ángulos de un triángulo y la bisectriz interna del tercer ángulo son concurrentes (observemos que existen tres de estos puntos). En la siguiente figura, I_a es la intersección de las bisectrices externas de los ángulos en B y C con la bisectriz del ángulo en A.



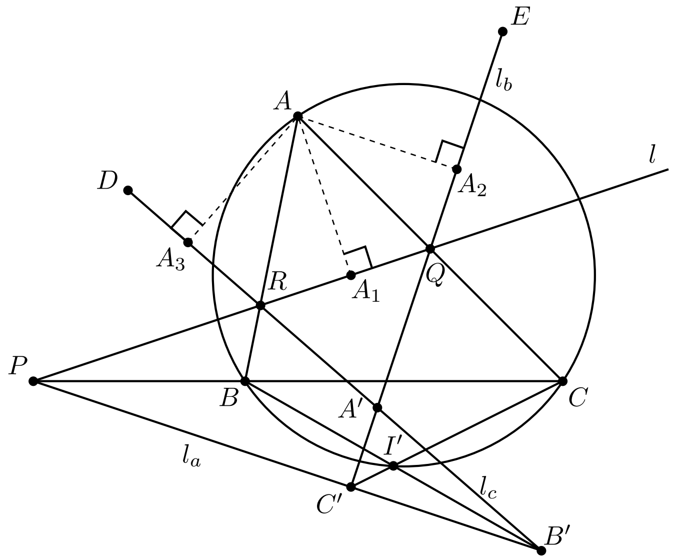
Estos tres puntos, así como el incentro, son centros de circunferencias tangentes a los lados del triángulo con la única diferencia de que estas circunferencias son externas a él. Por esta propiedad, a estos puntos se les conoce como los *excentros* del triángulo.

Estos resultados son elementales, pero no nos dejemos llevar por su aparente inocencia. Estas propiedades resultan bastante prácticas como podemos apreciar en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2. *Sean ABC un triángulo acutángulo y l una recta. Sean l_a, l_b y l_c las reflexiones de l con respecto a los lados BC, CA y AB, respectivamente. Sean A', B', C' los puntos de intersección de las rectas l_b y l_c, l_c y l_a, l_a y l_b, respectivamente. Demuestra que las rectas AA', BB' y CC' concurren en un punto sobre el circuncírculo del triángulo ABC.*

Solución. Denotemos por $\angle BAC = \alpha$, $\angle CBA = \beta$, $\angle ACB = \gamma$ y sean P, Q y R los puntos de intersección de l con BC, CA y AB, respectivamente.
Comencemos demostrando el siguiente resultado.

Lema. *La recta AA' es la bisectriz interna del ángulo en A' en el triángulo $A'B'C'$ y $\angle B'A'C' = 180° - 2\alpha$.*
Demostración del Lema. Sean A_1, A_2 y A_3 las proyecciones desde A sobre las rectas l, l_b y l_c, respectivamente.



Puesto que A pertenece al lado AB y l_c es la reflexión de l con respecto AB se tiene que $AA_1 = AA_3$. Con la misma idea, usando el hecho de que A pertenece a AC se tiene que $AA_1 = AA_2$, entonces $AA_2 = AA_1 = AA_3$. Por lo tanto A pertenece a la bisectriz interna por A' en el triángulo $A'B'C'$. Para lo segundo, sean D y E puntos sobre l_b y l_c, respetivamente, de manera que se encuentran en el mismo lado del punto

A con respecto a la recta l. En el triángulo AQR se cumple que $\angle AQR + \angle QRA = 180^\circ - \alpha$, entonces (puesto que l_b y l_c son reflexiones de l),

$$\angle EQR + \angle QRD = 2(\angle AQR + \angle QRA) = 360^\circ - 2\alpha.$$

Tomando ángulos suplementarios tenemos que,

$$\angle A'RQ + \angle RQA' = 180^\circ - \angle QRD + 180^\circ - \angle EQR = 2\alpha.$$

Por lo tanto $\angle C'A'B' = \angle QA'R = 180^\circ - 2\alpha$. De manera análoga se pueden demostrar hechos similares para los vértices B' y C'.

Entonces, retomando nuestro problema original, tenemos que AA', BB' y CC' concurren por ser las bisectrices internas del triángulo $A'B'C'$. El punto de intersección I' es el incentro del triángulo $A'B'C'$.
Finalmente, veamos que I' está sobre el circuncírculo del triángulo ABC. Por el lema anterior para los vértices B' y C' se cumple que $\angle I'B'C' = 90^\circ - \beta$ y $\angle B'C'I' = 90^\circ - \gamma$. Luego,

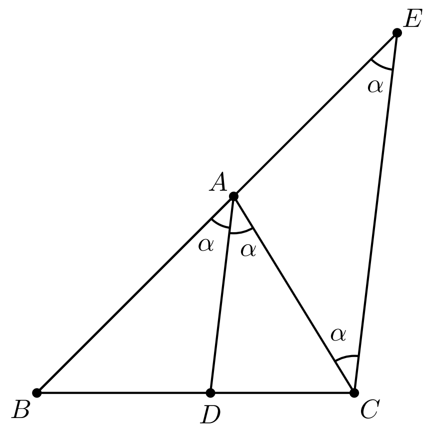
$$\begin{aligned}\angle BI'C = \angle B'I'C' &= 180^\circ - \angle I'B'C' - \angle B'C'I' \\ &= 180^\circ - (90^\circ - \beta) - (90^\circ - \gamma) = \beta + \gamma.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\angle BAC + \angle CI'B = \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, entonces el cuadrilátero $ABI'C$ es cíclico. Luego, I' está en el circuncírculo del triágulo ABC.

Para continuar, veamos una nueva propiedad acerca de las bisectrices.

Teorema de la Bisectriz. *Sean ABC un triángulo y D el punto de intersección de la bisectriz del ángulo $\angle BAC$ con BC. Entonces, $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$.*

Demostración. Sea E un punto sobre la prolongación de BA tal que $AE = AC$. Si $\angle CAB = 2\alpha$, entonces $\angle BAD = \alpha$. Como el ángulo $\angle EAC$ es el ángulo externo del vértice A tenemos que $\angle EAC = 180^\circ - 2\alpha$.

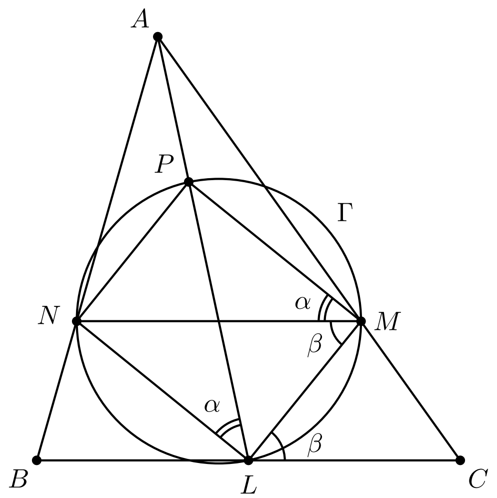


Como el triángulo EAC es isósceles, tenemos que $\angle AEC = \alpha$. Por lo tanto EC es paralela a AD. Luego, por el teorema de Thales, $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AE} = \frac{BA}{AC}$.

Veamos una aplicación de este resultado.

Ejemplo 3. *Sean ABC un triángulo y L el punto medio de BC. Sean M y N puntos sobres CA y AB tales que LM y LN son bisectrices de los ángulos $\angle CLA$ y $\angle ALB$, respectivamente. Sean Γ el circuncírculo del triángulo LMN y P el punto de intersección de Γ con AL, distinto de L. Demuestra que el cuadrilátero $MPNL$ es un rectángulo.*

Solución. Denotemos $\angle ALB = 2\alpha$ y $\angle CLA = 2\beta$. Por ser LM y LN bisectrices de $\angle CLA$ y $\angle ALB$, tenemos que $\angle MLP = \beta$ y que $\angle PLN = \alpha$, de donde $\angle MLN = \alpha + \beta = 90°$.



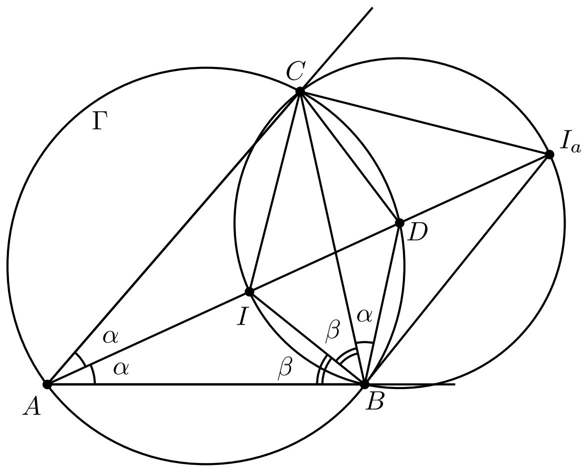
Como el cuadrilátero $MPNL$ es cíclico, bastará demostrar que $\angle PML = 90°$. Por el teorema de la bisectriz aplicado a los triángulos ABL y ALC, tenemos que $\frac{AM}{MC} = \frac{LA}{CL} = \frac{LA}{BL} = \frac{AN}{NB}$, donde la segunda igualdad se debe a que L es el punto medio de BC. Entonces por el teorema de Thales se tiene que MN es paralela a BC, por lo tanto, por ángulos alternos internos $\angle NML = \angle CLM = \beta$, además, por ser cíclico $PMLN$, tenemos que $\angle PMN = \angle PLN = \alpha$. Por lo tanto, $\angle PML = \angle PMN + \angle NML = \alpha + \beta = 90°$.

Como hemos visto, las bisectrices cumplen propiedades fascinantes relacionadas con la incidencia de rectas y con la métrica del triángulo. Para terminar, veamos una última relación de las bisectrices con la geometría del triángulo. Este resultado, al igual que los anteriores, es un hecho elemental, sin embargo es muy útil al momento de atacar problemas.

Proposición 2. *Sea ABC un triángulo y sean Γ su circuncírculo, I su incentro e I_a el excentro asociado al vértice A. Si D es el punto de intersección de la bisectriz* *interna de A con Γ, distinto de A, entonces los puntos I, I_a, B y C están sobre una circunferencia con centro en D.*

Demostración. Denotemos por $\angle BAC = 2\alpha$, $\angle CBA = 2\beta$ y $\angle ACB = 2\gamma$.

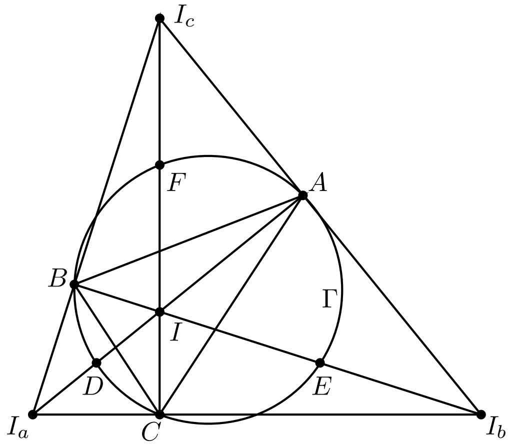
Por ser I el incentro del triángulo ABC, se tiene que $\angle CBI = \beta$ y por ser $ABDC$ cíclico, se cumple que $\angle DBC = \angle DAC = \alpha$; entonces $\angle DBI = \angle DBC + \angle CBI = \alpha + \beta$.



Por otro lado, en el triángulo ABI, el ángulo $\angle BID$ es un ángulo externo, por lo tanto $\angle BID = \angle BAI + \angle IBA = \alpha + \beta$. Entonces el triángulo IBD es isósceles. Análogamente, IDC es isósceles, por lo que $DB = DI = DC$. Luego, D es el circuncentro del triángulo BIC. Resta probar que I_a está en ese circuncírculo.
Puesto que BI es bisectriz interna del ángulo en B y BI_a es bisectriz externa del ángulo externo en B, se cumple que $\angle I_aBI = 90°$. De la misma forma se cumple que $\angle ICI_a = 90°$. Por lo tanto $\angle I_aBI + \angle ICI_a = 180°$, lo cual implica que el cuadrilátero IBI_aC es cíclico.

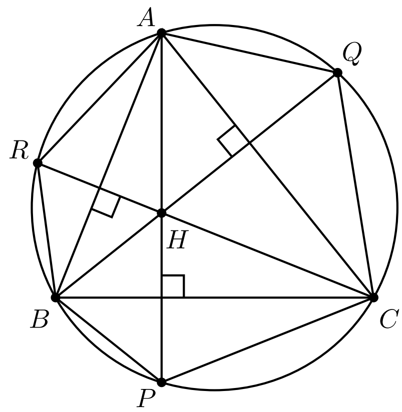
Ejemplo 4. *Sean ABC un triángulo e I_a, I_b e I_c los excentros asociados a los vértices A, B y C, respectivamente. Demuestra que $(I_aI_bI_c) \geq 4(ABC)$, donde (XYZ) denota el área del triángulo XYZ.*

Solución. Sean Γ el circuncírculo del triángulo ABC, I el incentro y D, E y F los puntos de intersección de las rectas AI_a, BI_b y CI_c con Γ distintos de A, B y C, respectivamente.



Usando el hecho de que D es el centro de la circunferencia que pasa por los puntos B, I, C, I_a y que los puntos I, D y I_a son colineales se sigue que D es el punto medio de II_a. Esto garantiza que $(II_aB) = 2(IDB)$ y $(II_aC) = 2(IDC)$, por lo tanto el área del cuadrilátero IBI_aC es el doble del área del cuadrilátero $IBDC$, lo cual escribiremos como $(IBI_aC) = 2(IBDC)$. Análogamente $(ICI_bA) = 2(ICEA)$ y $(IAI_cB) = 2(IAFB)$. Por lo tanto el área del triángulo $I_aI_bI_c$ es el doble del área del hexágono $AECDBF$. Entonces, bastará demostrar que el área del hexágono $AECDBF$ es mayor o igual a dos veces el área del triángulo ABC.

Sea H el ortocentro del triángulo ABC y sean P, Q y R los puntos de intersección de AH, BH y CH con Γ, respectivamente.
Por ángulos inscritos tenemos que $\angle PAC = \angle PBC$ y por ser BQ altura tenemos que $\angle CBQ = \angle PAC$, entonces $\angle CBQ = \angle PBC$. Análogamente $\angle RCB = \angle BCP$, por lo tanto los triángulos BHC y BPC son congruentes, de donde $(BHC) = (BPC)$.
Puesto que D es el punto medio del arco $\widehat{BC}$ la altura desde D del triángulo BDC es mayor o igual que la altura desde P del triángulo BPC. Entonces $(BDC) \geq (BPC)$.



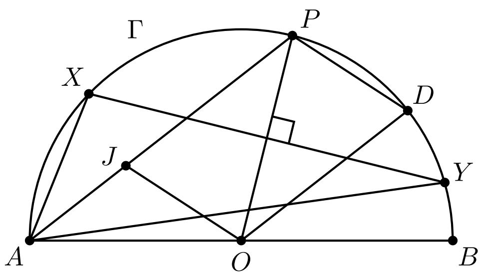
Análogamente, $(CQA) = (CHA)$ y $(CEA) \geq (CQA)$, $(ARB) = (AHB)$ y $(AFB) \geq (ARB)$. Por último, tenemos que,

$$\begin{aligned}(BDC) + (CEA) + (AFB) &\geq (BPC) + (CQA) + (ARB) \\ &= (BHC) + (CHA) + (AHB) = (ABC),\end{aligned}$$

lo cual garantiza la desigualdad deseada.

Ejemplo 5. *Sean Γ una circunferencia con centro O y AB un diámetro de ella. Sean P un punto sobre Γ tal que $\angle POB \leq 120°$, D el punto medio del arco $\widehat{PB}$ que no contiene a A. Además, sean X e Y los puntos de intersección de la mediatriz del segmento OP con Γ. Si J es un punto sobre AP tal que OJ y PD son paralelas, demuestra que J es el incentro del triángulo AXY.*

Solución. Denotemos por $\angle POA = 2\alpha$ y $\angle BOP = 2\beta$.



Por ser OP y OA radios de Γ se tiene que el triángulo APO es isósceles, entonces $\angle APO = 90° - \alpha$, mientras que $\angle DOP = \beta$, pero puesto que $\angle POA + \angle BOP = 2\alpha + 2\beta = 180°$, tenemos que $\alpha + \beta = 90°$, de donde se obtiene $\angle DOP = \angle JPO$ y JP es paralela a OD. Entonces, por ser PD paralela a JO, se sigue que $PODJ$ es paralelogramo, luego $PJ = DO$. Puesto que XY mediatriz del segmento OP y $OX = OY$, por ser radios de Γ, se deduce que $PX = PY = OY = OD = PJ$. Por último, de nuevo por ser XY mediatriz de OP, el punto P es el punto medio del arco $\widehat{XY}$, entonces AP es bisectriz interior del ángulo $\angle YAX$. Por lo tanto, por la proposición 2, si I es el incentro del AXY se cumple que I se encuentra sobre AP y que $PI = PX = PY$, esto junto con $PJ = PX = PY$ implica que $J = I$.

Para concluir dejamos algunos ejercicios que mejorarán las habilidades del lector.

Ejercicios

1. Sea ABC un triángulo y Γ su circuncírculo. Demuestra que la bisectriz del ángulo $\angle BAC$ y la mediatriz del segmento BC se cortan sobre Γ.

2. Sea I el incentro del triángulo ABC. Consideremos M y N los puntos medios de AB y AC, respectivamente. Si $MI = NI$, demuestra que el cuadrilátero $AMIN$ es cíclico.

3. Sean ABC un triángulo y Γ su circuncírculo. Sean D, E y F los puntos de intersección de las bisectrices internas de los vértices A, B y C con Γ, respectivamente. Si I es el incentro del triángulo ABC, demuestra que I es el ortocentro del triángulo DEF.

4. Sean ABC un triángulo y l la recta tangente a su circuncírculo que pasa por A. Sean D y E puntos sobre l y AC, respectivamente, tales que $AD = AB = AE$ y con D del mismo lado que B con respecto a AC. Demuestra que DE pasa por el incentro del triángulo ABC.

5. Sean ABC un triángulo e I su incentro. Sean L y D los puntos de intersección de la bisectriz interior del ángulo en A con el lado BC y el circuncírculo del triángulo ABC, respectivamente. Demuestra que $\frac{AD}{DI} = \frac{AI}{IL}$.

6. Sean Γ una semicircunferencia con diámetro AB y D un punto sobre el segmento AB. La perpendicular por D al segmento AB intersecta a Γ en C. Si P y Q son puntos sobre Γ tales que $CP = CD = CQ$, demuestra que PQ corta a CD en su punto medio.

7. Sea ABC un triángulo con $AB \neq AC$. Sean I el incentro del triángulo ABC y P el otro punto de intersección de la bisectriz exterior del ángulo A con el circuncírculo de ABC. La recta PI intersecta por segunda vez al circuncírculo de ABC en J. Demuestra que los circuncírculos de los triángulos BIJ y CIJ son tangentes a las rectas IC e IB, respectivamente.

8. Sean ABC un triángulo y AD la bisectriz del ángulo $\angle BAC$, con D sobre BC. Sea E un punto sobre el segmento BC tal que $BD = EC$. Por E se traza una recta l paralela a AD y se considera un punto P sobre l y dentro del triángulo. Sea G el punto donde la recta BP corta al lado AC y sea F el punto donde la recta CP corta al lado AB. Demuestra que $BF = CG$.

Bibliografía

1. R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. SMM-Imate de la UNAM, 2002.

2. S. Levi, Shively. *Introducción a la geometría moderna.* Compañía Editorial Continental, México, 1984.