El Señor Burns y los Infinitos Monos

Por Eugenio Daniel Flores Alatorre

Nivel Básico

Cuando era niño, mi padre no me dejaba ver *Los Simpsons*. Por eso, todos los días poco antes de las siete, algo surgía para que yo estuviera en casa de mis vecinos, donde sí podían verlos. A veces ni siquiera tenía que entrar a su casa, pues su tele daba directo a la ventana de la sala y yo podía verlos desde la calle, imaginándome unos diálogos. Poco a poco se fue levantando la prohibición y hoy podemos disfrutarlos en familia; si uno ve los capítulos de las primeras temporadas con atención, puede darse cuenta que están llenos de buenos mensajes, incluso si están empapados en humor negro. Además, hay muchísimas referencias no sólo a la cultura popular sino a la literatura —Edgar Allan Poe, Lewis Carol, Walt Whitman, por ejemplo— y también a las matemáticas. Un poco más: con ya 500 episodios, es común la idea de que la vida imita a los Simpsons (en el capítulo *Tomy y Daly y Marge*, Marge le prohíbe a sus hijos ver ese programa así que ellos se van a verlo a casa de sus amigos).

En el capítulo *La última salida a Springfield*, en el que Homero se hace líder sindical, el señor Burns lo lleva a conocer su mansión y en una habitación tiene mil monos con mil máquinas de escribir, pronto habrán terminado la novela más grande de la historia. Después le da un zape por haber escrito “estávamos”. Quizás no se te hubiera ocurrido pensar que en esta pequeña escena, Los Simpsons hicieran referencia a un teorema matemático cuya idea original se le atribuye a Émile Borel, aunque ha sufrido muchas modificaciones a lo largo del tiempo y que podemos resumir en: Un mono tecleando por tiempo infinito en una máquina de escribir, produciría las obras enteras de Shakespeare una tras otra. Cuando menos, esa es la versión que me gusta. Es más, después de tiempo infinito, habría escrito también las obras enteras de Shakespeare una tras otra, en orden inverso; habría escrito Romeo y Julieta entero, en idioma F (Rofomefeofo,

Rofomefeofo, ¿poforquéfe eferefes túfu Rofomefeofo?); habría escrito todos los episodios de Los Simpsons; y, si le buscamos con cuidado, podríamos encontrar que también habría escrito este mismo articulito[2].

No vamos a demostrar este teorema límite de probabilidad, en cambio, vamos a centrarnos en ver qué tan complicado es esto en el mundo real, trabajando con la regla del producto, aproximaciones y números grandes.

No vamos a pensar en las obras completas de William Shakespeare, tan solo en una de sus frases más populares: "To be or not to be, that is the question.", es decir, "Ser o no ser, ésa es la cuestión". Mantenemos el inglés porque es más sencillo hacer las cuentas con un idioma cuya máquina de escribir no tiene acentos. Entonces, vamos a convenir que nuestra máquina de escribir tiene sólo 40 teclas: 26 letras, todas mayúsculas, los 10 dígitos, el punto, la coma, signo de interrogación y el espacio; y además, que es igual de probable que nuestro amigo mono presione cualquiera de ellas.

Esto es muchísima ayuda para el mono: estamos reduciendo un teclado que incluye mayúsculas y minúsculas a uno con solo mayúsculas; nos estamos olvidando de muchísimos símbolos y estamos bajando de 128 posibilidades en el teclado ASCII básico a tan solo 40: menos de la tercera parte[3]. Además, estamos pidiendo que todos los símbolos tengan la misma probabilidad: en tu teclado, cuando quieres guardar un archivo con un nombre al azar, casi siempre termina llamándose adsasd o aslkdj.

Nuestra frase tiene 41 caracteres contando las letras, los espacios, la coma y el punto final. Vamos a suponer que nuestro mono escribe frases de exactamente 41 símbolos y que la máquina automáticamente hace el salto de línea. ¿Cuántas frases de 41 símbolos podemos hacer usando 40 símbolos? Como la frase que buscamos es una en particular, la probabilidad de que nuestro mono la escriba al azar será igual a 1 dividido entre el número que encontremos.

Rápidamente recordemos los problemas de guardarropa: si Carmen tiene 5 blusas y 3 pantalones ¿de cuántas maneras se puede vestir? Una manera sencilla de resolver el problema cuando los números son chicos, es con un diagrama de árbol:

[2] Este es un tema también muy recurrido en la imaginación de Jorge Luis Borges, especialmente en dos hermosos cuentos suyos: *La Biblioteca de Babel* y *El libro de arena*. También hay algo de ello en *El Aleph* y seguramente en algunos más.

[3] Martin Gardner, en *One, Two, Three… Infinity* no es tan generoso y lo calcula para una frase todavía mayor, con un teclado bastante más completo.

$$\left\{\begin{array}{l} B_1\left\{\begin{array}{l}P_1\\P_2\\P_3\end{array}\right.\\ \\ B_2\left\{\begin{array}{l}P_1\\P_2\\P_3\end{array}\right.\\ \\ B_3\left\{\begin{array}{l}P_1\\P_2\\P_3\end{array}\right.\\ \\ B_4\left\{\begin{array}{l}P_1\\P_2\\P_3\end{array}\right.\\ \\ B_5\left\{\begin{array}{l}P_1\\P_2\\P_3\end{array}\right. \end{array}\right.$$

Sólo necesitamos contar las ramas finales, que son 15. Si ahora consideramos los 21 pares de zapatos que tiene Carmen, puede volverse tardado hacer un diagrama de árbol. En lugar, vemos que cada una de las combinaciones que ya tenemos, puede combinarse con cada uno de los 21 pares de zapatos. Si por una combinación tenemos 21 combinaciones nuevas, por 15 vamos a tener quince veces 21; es decir, $21 \times 15 = 315$.

Nuestro problema se parece a este, pero no tanto. Vamos a pensar en otro problema distinto: Si el examen de la primera etapa de la Olimpiada tiene 15 preguntas y cada una de ellas tiene 4 opciones distintas, ¿de cuántas maneras distintas se puede llenar una hoja de respuestas? Por ejemplo:

AABCDBABCDCABCD.

Si en la primera contestamos A, tenemos 16 maneras de contestar las 3 primeras, porque en cada pregunta hay 4 opciones. Si contestamos B, también hay 16 maneras distintas, igual para C y para D. Entonces, en total hay $16+16+16+16 = 64 = 4\times4\times4$ maneras distintas de contestar las primeras 3 preguntas. Si agregamos una pregunta más, vamos a tener 4^4; con cinco preguntas vamos a tener 4^5 hasta que lleguemos a 15 preguntas y en total hay 4^{15} maneras distintas de contestar el examen.

Volviendo a nuestro problema, en lugar de 5 blusas tenemos 40 letras, en lugar de 3 pantalones tenemos 40 letras y en lugar de Carmen tenemos un mono. Pero como podemos repetir letras, se parece más al segundo problema: si la primera letra puede ser cualquiera de las 40 y la segunda letra puede ser cualquiera de las 40 entonces para las primeras dos letras hay un total de $40 \times 40 = 1600$ combinaciones posibles. Como en total queremos 41, vamos a tener 40^{41}, que podemos encontrar, igual que el examen de opción múltiple.

¿Qué tan grande es este número? Probablemente tu calculadora no puede hacerlo. Estoy casi seguro que tu calculadora no puede hacerlo. Vamos a hacer un estimado:
$40 = 4 \times 10$, ¿verdad? Entonces $40^{41} = (4 \times 10)^{41} = 4^{41} \times 10^{41}$. Las potencias de 10 son fáciles de calcular: nuestro número es 4^{41} seguido de 41 ceros:

$$4^{41} \times 100,000'000,000'000,000'000,000'000,000'000,000'000,000.$$

Ahora, $4 = 2^2$, ¿verdad? Entonces $4^{41} = (2^2)^{41} = 2^{82}$. Si pensamos que $2^{10} = 1024 \approx 1000$, entonces

$$2^{82} = (2^{10})^8 \times 4 \approx 1000^8 \times 4 = 4'000,000'000,000'000,000'000,000.$$

Es decir, un 4 seguido de 24 ceros. Entonces, nuestro número es más o menos un 4 seguido de $24 + 41 = 65$ ceros. O bien:

$$\begin{gathered}400,000'000,000'000,000'000,000'000,000'\ldots\\ 000,000'000,000'000,000'000,000'000,000'000,000.\end{gathered}$$

¿Tienes alguna idea de cómo se llama ese número? Yo no. Debe andar por el orden de decillones que ni siquiera estoy seguro que esa palabra exista. Preguntándole a calculadoras más poderosas como *Wolfram Alfa*, podemos ver que el número exacto es:

$$\begin{gathered}483,570'327,845'851,669'882,470'400,000'\ldots\\ 000,000'000,000'000,000'000,000'000,000'000,000.\end{gathered}$$

No estábamos tan lejos. Sólo nos equivocamos por varios miles de decillones. Cuando menos los números tienen el mismo tamaño que, con números muy grandes, es un muy buen avance.
Ahora, vamos a suponer que nuestro mono tiene la peor de las suertes y escribe la frase que quiere hasta el mero final. También, vamos a suponer que escribe una frase por segundo. Para ayudarle –y facilitar nuestras cuentas— vamos a mudarnos a un universo donde los minutos tienen 100 segundos, las horas tienen 100 minutos, los días tienen 100 horas y los años tienen $1,000$ días. No querrías ir a la escuela en un universo así.
Haciendo unas cuentas sencillas, nuestro mono haría $1,000'000,000$ frases en cada año. Este número tiene sólo 9 ceros y nuestra aproximación tiene 65. Está increíblemente lejos. Si fuera un súper mono e hiciera $1,000$ frases por segundo, sólo le estamos agregando 3 ceros al número, todavía nos faltan $65 - 9 - 3 = 53$ ceros.
Vamos a dejar que nuestro mono invite a todos sus amigos monos, que son igual de capaces que él. Según Wikipedia, no hay más de $1'000,000$ de monos, gorilas y chimpancés en el mundo —tristemente, la cifra es mucho menos. Nos siguen faltando 47 ceros. Mejor que invite a todos los animales que pueda: según cifras de Wikipedia ligeramente alteradas por mí, por cada mono hay mil vacas, mil borregos, cuatro mil ratas, cuatro mil ratones y seis mil humanos. Si le sumamos perros, gatos, cabras, búfalos, caballos y elefantes, osos y mosquitos, vamos a decir que cada mono puede invitar

$100,000$ amigos —porque mosquitos hay muchos en las noches. Nos siguen faltando 42 ceros. ¡Tenemos más de cien mil millones de animales tecleando mil frases por segundo y un año de mil días, con días de cien horas, con horas de cien minutos y minutos de cien segundos! ¡Y todavía nos faltan 42 ceros!
Si los dejáramos teclear por mil años, nos faltarían 39 ceros. Cien mil años, nos faltan 37 ceros. La edad de la Tierra es de unos 5 mil millones de años y la edad del Universo –el tiempo transcurrido desde el Big Bang— se cree que son unos $13,700$ millones de años; si fueran 100 mil millones de años nos seguirían faltando 31 ceros. ¡Todos los animales de la Tierra escribiendo desde el inicio del Universo no se acercan a la quintillonésima parte de frases posibles!
A estas alturas, estoy seguro, puedes estar de acuerdo conmigo en que escribir esa frase al azar es un evento extremadamente poco probable. Y sin embargo, sin lugar a dudas, un solo mono en tiempo infinito la escribe. Es más, la escribe una infinidad de veces.
¿Te gustaría probar tu suerte? Visita

http://escribesaurio.blogspot.com/p/editorial-dinosaurio.html

donde puedes encontrar un pequeño programa para simular un mono y puedas ver lo difícil que es que una frase tenga sentido.

Ejercicios.

1. En realidad, Carmen tiene 22 blusas, 6 pantalones, 4 vestidos y 20 pares de zapatos.
   a) ¿De cuántas maneras distintas puede vestirse si nunca usa un pantalón y un vestido al mismo tiempo?
   b) ¿De cuántas maneras distintas puede vestirse si sí puede usar pantalón y vestido al mismo tiempo?
2. Una boleta de *Progol* tiene 14 partidos y en cada uno debes escoger Local, Empate o Visitante. ¿Cuántas boletas distintas hay?
3. Se tienen 15 tiras de colores distintos. ¿De cuántas maneras se puede hacer una bandera tricolor con estas tiras?
4. Cinco personas de la planilla azul, ocho personas de la planilla roja y siete personas de la planilla verde quieren ser presidentes del Mundo. Si sólo uno de cada planilla puede ser candidato, ¿de cuántas maneras puede quedar la boleta electoral? ¿Cuántos posibles presidentes hay?
5. Las placas de automóvil en México tienen 3 letras y 4 dígitos (aunque las del Distrito Federal tienen 3 dígitos y luego 3 letras).
   a) Si todas las placas de Guanajuato empiezan con la letra G, ¿cuántas placas se pueden hacer?
   b) ¿Cuántas placas distintas se pueden hacer en el país, incluyendo al DF?

6. *a*) Once personas están formadas en la cola de las tortillas. Una señora es supersticiosa y no le gusta la forma en que están formadas y les dice que se reacomoden. ¿De cuántas maneras se pueden reacomodar?

   b) Llegan dos personas nuevas a la fila y en total son 13. La señora supersticiosa les dice que sólo pueden hacer fila de 7. ¿De cuántas maneras se puede hacer esto?

7. Ocho personas están sentadas en una mesa redonda. ¿De cuántas maneras se pueden sentar? Consideramos que dos maneras son idénticas si una se puede obtener de la otra rotando la mesa.

8. Cinco amigos juegan carreras y nunca hay empates. ¿En cuántos resultados Luis le gana a Josué?

9. Un examen de Olimpiada tiene 30 preguntas de opción múltiple. En cada pregunta hay cuatro opciones distintas. Supón que no sabes nada y contestas completamente al azar.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de sacar todo mal?

   b) ¿Cuál es la probabilidad de sacar todo bien?

10. Una boleta del Melate tiene 56 números distintos, de los cuales debes escoger 6. ¿Cuál es la probabilidad de atinarle a los 6 números con una única boleta? ¡OJO! Los números no se pueden repetir.