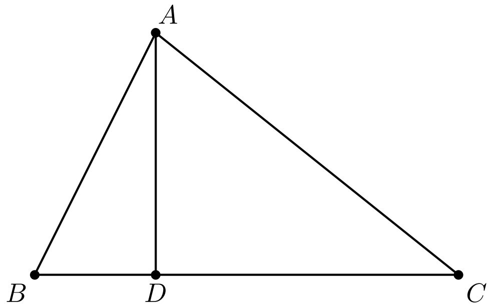
Un Lema de Perpendicularidad

Por José Antonio Gómez Ortega

Nivel Intermedio

En el estudio de la geometría del triángulo las alturas tienen un papel importante. La forma común de definir la altura por el vértice A de un triángulo ABC, es como la recta por A que es perpendicular al lado opuesto BC. A tal recta la llamaremos la *altura geométrica*. Sin embargo, existe una caracterización de la altura como lugar geométrico. Precisemos esto. Primero notemos que si D es el pie de la perpendicular de A sobre BC, se tiene por el teorema de Pitágoras que,

$$AB^2 - AC^2 = (AD^2 + BD^2) - (AD^2 + DC^2) = BD^2 - DC^2.$$



Ahora, si P es un punto sobre la altura geométrica, el pie de la perpendicular de P sobre BC es desde luego D, y de manera análoga se tiene también que,

$$PB^2 - PC^2 = BD^2 - DC^2.$$

Por lo que, $PB^2 - PC^2 = AB^2 - AC^2$, es decir un punto sobre la altura geométrica desde A sobre BC, se encuentra en el conjunto,

$$\{P \text{ tal que } PB^2 - PC^2 = AB^2 - AC^2\},$$

que llamaremos la *altura algebraica*.
Recíprocamente, un punto de este lugar geométrico deberá estar sobre la altura geométrica. En efecto, si P está sobre la altura algebraica, es decir, si cumple que $PB^2 - PC^2 = AB^2 - AC^2$ y si E es el pie de la perpendicular de P sobre BC, se tendrá que P está sobre la altura geométrica si $E = D$. Veamos que esto último sucede.
Por el Teorema de Pitágoras $PB^2 - PC^2 = BE^2 - EC^2$. Pero como $PB^2 - PC^2 = BD^2 - DC^2$, tenemos que (usando segmentos dirigidos),

$$\begin{aligned} BE^2 - EC^2 &= BD^2 - DC^2 \\ (BE + EC)(BE - EC) &= (BD + DC)(BD - DC) \\ BE - EC &= BD - DC \\ BD + DE - EC &= BD - (DE + EC) \\ DE &= -DE. \end{aligned}$$

De donde $D = E$. Todo lo anterior permite afirmar el siguiente,

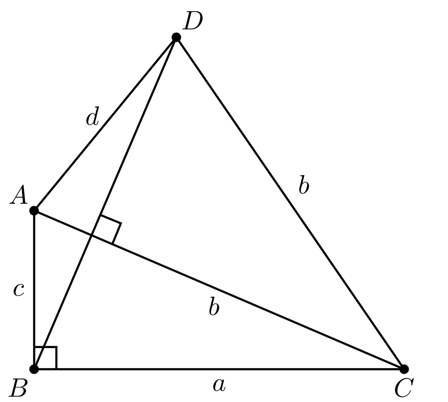
Lema de perpendicularidad. *Los segmentos BC y AD son perpendiculares si y sólo si,*

$$DB^2 - DC^2 = AB^2 - AC^2.$$

Notemos que cuando decimos que los segmentos BC y AD son perpendiculares, hay la posibilidad de que estos no se corten, nos referiremos en tal caso a las rectas que tales segmentos determinan. Veamos ahora varios ejemplos del uso de este singular Lema.

Ejemplos

Ejemplo 1 (Lista corta de la OMCC, 2009). Sea ABC un triángulo rectángulo con ángulo recto en B. Sea D un punto tal que BD es perpendicular a AC y $DC = AC$. Encuentra $\frac{AD}{AB}$.

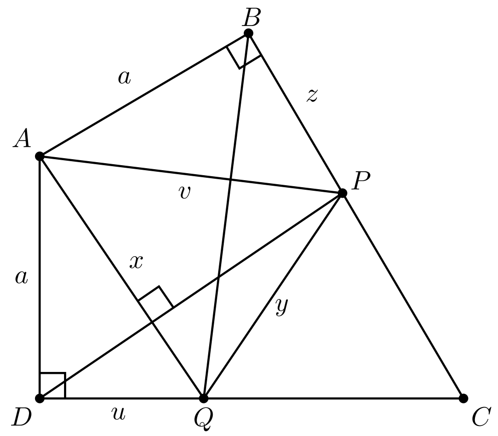


Como BD es perpendicular a AC, se tiene por el lema de perpendicularidad que, $d^2 - b^2 = c^2 - a^2$, por lo que, $d^2 = c^2 + b^2 - a^2$. Y por el teorema de Pitágoras $b^2 = a^2 + c^2$. Luego $d^2 = 2c^2$ y entonces $\frac{AD}{AB} = \frac{d}{c} = \sqrt{2}$.

Ejemplo 2 (Examen regional de la zona centro de la OMM, 2008/6, Rusia, 1995). En el cuadrilátero $ABCD$, se tiene que $AB = AD$ y $\angle B = \angle D = 90°$. Los puntos P y Q se encuentran sobre BC y CD, respectivamente, de manera que AQ es perpendicular a DP. Muestra que AP es perpendicular a BQ.

Solución. Sean $a = AB = AD$, $x = AQ$, $y = QP$, $z = BP$. Por el lema de perpendicularidad bastará ver que: $x^2 - y^2 = a^2 - z^2$.
Sean $u = DQ$ y $v = AP$, entonces tenemos que:

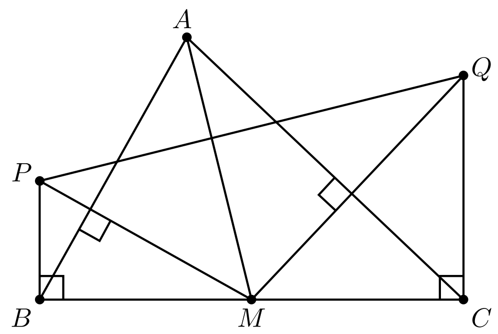
$$x^2 - y^2 = a^2 + u^2 - y^2 = a^2 + a^2 - v^2 = a^2 - z^2.$$



La primera igualdad es por el teorema de Pitágoras en el triángulo ADQ, la segunda por el lema de perpendicularidad con las perpendiculares AQ y DP y la última por el teorema de Pitágoras en el triángulo ABP.

Ejemplo 3 (OMM 2009/5). Sea ABC un triángulo, y sea M un punto en BC. Sea P la intersección de las perpendiculares a AB por M y a BC por B, y sea Q la intersección de las perpendiculares a AC por M y a BC por C. Muestra que PQ es perpendicular a AM si y sólo si M es el punto medio de BC.

Solución. Por el Lema de perpendicularidad, PQ es perpendicular a AM si y sólo si $PA^2 - PM^2 = QA^2 - QM^2$.



Por el lema de perpendicularidad,

$$\begin{array}{rcl} AB \perp PM & \iff & PA^2 - PB^2 = MA^2 - MB^2 \\ AC \perp QM & \iff & QA^2 - QC^2 = MA^2 - MC^2. \end{array}$$

Por el teorema de Pitágoras en los triángulos PBM y QCM se tiene que, $PM^2 = PB^2 + BM^2$ y $QM^2 = QC^2 + MC^2$, respectivamente.
Luego,

$$\begin{array}{rcl} PA^2 - PM^2 & = & PA^2 - (PB^2 + BM^2) = (PA^2 - PB^2) - BM^2 \\ & = & (MA^2 - MB^2) - BM^2 = MA^2 - 2BM^2, \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rcl} QA^2 - QM^2 & = & QA^2 - (QC^2 + MC^2) = (QA^2 - QC^2) - MC^2 \\ & = & (MA^2 - MC^2) - MC^2 = MA^2 - 2MC^2. \end{array}$$

Por tanto,

$$\begin{array}{rcl} PA^2 - PM^2 = QA^2 - QM^2 & \iff & MA^2 - 2BM^2 = MA^2 - 2MC^2 \\ & \iff & BM = MC \\ & \iff & M \text{ es el punto medio de } BC. \end{array}$$

Ejemplo 4 (OIM 1996/6). Se tienen n puntos distintos $A_1, \ldots, A_n$ en el plano y a cada punto A_i se ha asignado un número real λ_i distinto de cero, de manera que

$$A_iA_j^2 = \lambda_i + \lambda_j, \text{para todos los } i, j \text{ con } i \neq j.$$

Demuestre que $n \leq 4$.

Solución. Supongamos que $n \geq 4$ (si no, la afirmación es evidente) y consideremos cuatro de tales puntos A_i, A_j, A_k, A_l. Por hipótesis tenemos

$$A_iA_j^2 + A_kA_l^2 = (\lambda_i + \lambda_j) + (\lambda_k + \lambda_l) = (\lambda_i + \lambda_k) + (\lambda_j + \lambda_l) = A_iA_k^2 + A_jA_l^2$$

luego,

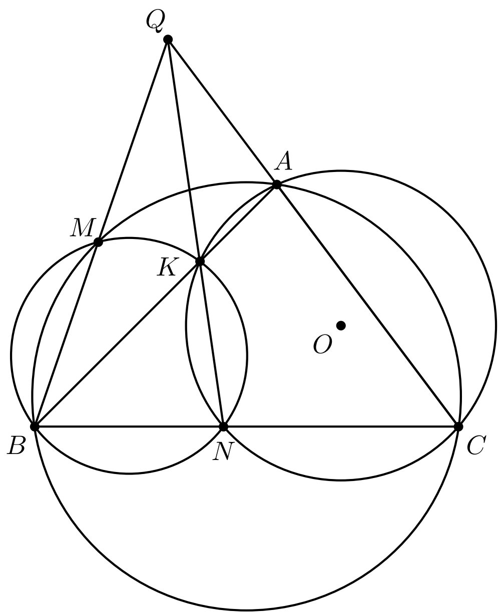
$$A_iA_j^2 - A_iA_k^2 = A_jA_l^2 - A_kA_l^2.$$

Por el lema, las rectas A_jA_k y A_iA_l son perpendiculares. Por simetría, se tiene que la recta que pasa por cualesquiera dos de los puntos $A_1, \ldots, A_n$ es perpendicular a la recta por cualesquiera otros dos.

Consideremos ahora el triángulo $A_1A_2A_3$. Cualquier otro punto A_i con $i \geq 4$ debe estar sobre la perpendicular a A_1A_2 trazada por A_3, esto es, sobre la altura correspondiente a A_3 en este triángulo, y también sobre las otras dos alturas de tal triángulo. El único punto que reúne estos requisitos es el ortocentro del triángulo $A_1A_2A_3$. En consecuencia si $n \geq 4$ deberá suceder forzosamente $n = 4$.

Ejemplo 5 (IMO, 1985/5). Una circunferencia con centro O pasa por los vértices A y C del triángulo ABC, y corta a los lados AB y BC en los puntos K y N, respectivamente. Sea M el punto de intersección de los circuncírculos de los triángulos ABC y KBN (diferente de B). Muestra que $\angle OMB = 90°$.

Solución. Usaremos varios hechos que la geometría del problema sugiere. Primero necesitamos tener un buen dibujo, donde se resalten las circunferencias del problema, que son los circuncírculos de los triángulos ABC, KAC y BNK. Sea Q el cento radical de estas circunferencias, es decir, el punto donde concurren las rectas BM, KN y CA y sea r el radio de la circunferencia con centro O.



Como los cuadriláteros $AKNC$ y $BNKM$ son cíclicos se tiene que $AKMQ$ es también un cuadrilátero cíclico (se sigue de que los ángulos $\angle KAQ$, $\angle KMB$ y $\angle KNC$, son iguales).

La potencia de Q al circuncírculo (O, r) de $AKNC$ es, $QO^2 - r^2 = QK \cdot QN = QM \cdot QB$ y la potencia de B a (O, r) es, $BO^2 - r^2 = BK \cdot BA = BM \cdot BQ$, por lo que,

$$\begin{aligned} QO^2 - BO^2 &= QM \cdot QB - BM \cdot BQ \\ &= QM \cdot (QM + MB) - BM \cdot (BM + MQ) \\ &= QM^2 + QM \cdot MB - BM \cdot MQ - BM^2 \\ &= QM^2 - BM^2. \end{aligned}$$

Por el lema, lo anterior basta para garantizar que OM es perpendicular a BQ.

Ejercicios

1. Dos circunferencias, una con centro P y otra con centro Q, se intersectan en los puntos A y B. Muestra que AB es perpendicular a PQ. (Sugerencia: Expresa $AP^2 - AQ^2$ en términos de los radios de las circunferencias.)

2. Demuestra que las alturas de un triángulo concurren. (Sugerencia: Considera H la intersección de las alturas por A y B. Demuestra que H está en la altura algebraica por C.)

3. Sean ABC un triángulo, AD, BE, CF sus alturas y H su ortocentro. Si N es el punto medio de AH y M el punto medio de BC. Muestra que MN es perpendicular a EF. (Sugerencia: $AFHE$ y $BCEF$ son cuadriláteros cíclicos y los centros de las circunferencias donde se encuentran tales cuadriláteros son N y M.)

4. Sea ABC un triángulo isósceles, L el punto medio de la base BC y N sobre AC de manera que LN es perpendicular a AC. Si M es el punto medio de LN, muestra que AM es perpendicular a BN. (Sugerencia: Considera el punto N' sobre la recta LN de manera que $N'L = LN$, el triángulo rectángulo $BN'M$ es clave para encontrar BM^2.)

5. (Bielorrusia, 2000) Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo con $AB = BD = AC$. Sea P el punto de intersección de las diagonales AC y BD, y sean O e I el circuncentro e incentro de ABP. Muestra que OI es perpendicular a CD. (Sugerencia: Sean E, F, G los puntos de contacto del incírculo de ABP con BP, PA, AB, respectivamente. Sean R y r el circunradio e inradio de ABP. Nota que $AF = AD = DE$, $GB = BE = CF$ y $FP = PE$. Para calcular CI^2, DI^2 usa Pitágoras y para calcular CO^2 y DO^2 usa la potencia al circuncírculo (O, R) de ABP.)

6. (Estados Unidos, 1997) Sea ABC un triángulo. Sobre los lados se construyen exteriormente triángulos equiláteros BCD, CAE, ABF. Muestra que las rectas perpendiculares a EF, FD, DE que pasan por A, B, C, respectivamente son concurrentes. (Sugerencia: Sea P el punto común de la perpendicular a FD por B con la perpendicular a DE por C. Ahora muestra que $AP \perp EF$.)

7. (Hong Kong, 2001) Sean ABC un triángulo, AD, BE, CF sus alturas, O su circuncentro y H su ortocentro. Si las rectas ED y AB se cortan en M y las

rectas FD y AC se cortan en N, muestra que OH y MN son perpendiculares. (Sugerencia: Primero demuestra que $OB \perp DN$ y $OC \perp DM$. Después usa también que $CH \perp MA$, $BH \perp NA$ y $DA \perp BC$.)

Bibliografía

1. Bulajich, R., Gómez, J.A. *Geometría.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. SMM-Imate de la UNAM, 2002.

2. Gómez Ortega, J.A. *Algunas maneras de usar la potencia.* Revista Tzaloa de la OMM, No. 4, 2009.